Math. A.

114 td

Hoppe

Elementares Lehrbuch

der

Technischen Mechanik

für

Studirende und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Oscar Hoppe,

Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Erste Abtheilung.

Mechanik des Punktes — Mechanik der Körper.

Mit 453 Abbildungen im Text.

Leipzig.

Verlag von Arthur Felix.

1894.

Die Fördermaschinen der Bergwerke.

Von **Julius Ritter von Hauer,**

k. k. Oberbergrath und Professor an der k. k. Bergakademie zu Leoben.

Dritte vermehrte Auflage.

Mit einem Atlas von 61 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. 1885. XXIV, 872 Seiten. Gebunden. (Text und Atlas apart.)

Preis 45 Mark.

Die Hüttenwesens-Maschinen.

Von **Julius Ritter von Hauer.**

Zweite, vermehrte und grösstentheils umgearbeitete Auflage.

Mit einem Atlas von 47 Tafeln.

In gr. 8. 1876. XXIII, 613 Seiten. Brosch. Preis 32 Mark.

Die Hüttenwesens-Maschinen.

Fortschritte in der Construction und Anwendung derselben seit dem Jahre 1876.

Von **Julius Ritter von Hauer,**

k. k. Oberbergrath und Professor an der k. k. Bergakademie in Leoben.

Supplement.

Mit 19 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. 1887. XI, 207 Seiten. Brosch. Preis 12 Mark.

Feste Bestellungen auf das ganze Werk werden zum Vorzugspreise von ☞ 40 Mark ☜ erledigt.

Die Wasserhaltungs-Maschinen der Bergwerke.

Von **Julius Ritter von Hauer,**

k. k. Oberbergrath und Professor der Berg- und Hüttenmaschinenlehre an der k. k. Bergakademie in Leoben.

Mit einem Atlas von 65 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. 1879. XX, 797 Seiten. Gebunden. Preis 45 Mark.

Die Wettermaschinen.

Von **Julius Ritter von Hauer,**

k. k. Oberbergrath und Professor an der Bergakademie zu Leoben.

Mit einem Atlas von 28 Tafeln in gr. Folio.

In gr. 8. 1889. VIII, 219 Seiten. Gebunden. Preis 19 Mark 80 Pf.

Elementares Lehrbuch

der

Technischen Mechanik

für

Studirende und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Oscar Hoppe

Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal.

Erste Abtheilung.

Mechanik des Punktes — Mechanik der Körper.

Mit 453 Abbildungen im Text.

Leipzig.

Verlag von Arthur Felix.

1894.

MOTTO: Die allgemeinen Principien der Mechanik bilden die einzig wahre und dauernde Grundlage nicht nur für die Technik, sondern auch für das ganze weite Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften.

Redtenbacher.
(1809—1863.)

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Schon seit einer Reihe von Jahren hat der Verfasser den Wunsch gehegt, eine gedrängt gehaltene, dem Bedürfniss des Praktikers entsprechende, sachlich und logisch im Zusammenhange stehende, auch die geschichtliche Entwickelung thunlichst berücksichtigende Physik — Mechanik — Maschinenlehre zu bearbeiten.

Das Lehrbuch der Mechanik, als Grundlage, sollte zuerst erscheinen und wagt sich hiermit an die Oeffentlichkeit.

Ein Lehrbuch sollte im Allgemeinen mehr durch die Anordnung und Behandlung als durch die Menge des verarbeiteten Stoffes sich auszeichnen.

Ein Lehrbuch der Mechanik (Bewegungslehre) im Besonderen müsste nicht nur für die technischen, sondern für die gesammten Naturwissenschaften sein und werden, was etwa die Grammatik (Sprachlehre) für die betreffende Sprachwissenschaft bedeutet. Denn es handelt (wie auf Seite 1 der Einleitung ausführlicher hervorgehoben wurde) von den Regeln und Gesetzen aller Bewegungen, durch welche die Natur zu uns spricht; und diejenigen Theile der Naturwissenschaften, welche noch nicht auf die Grundlehren der Mechanik sich stützen, sind mit ihren Wurzeln eben noch nicht tief genug eingedrungen.

Licht und Wärme sind längst dem Reiche der Mechanik verfallen und fühlen sich wohl unter dieser Herrschaft. Die klassischen Untersuchungen Maxwell's, Hertz's und anderer hervorragender Forscher bis in die letzten Tage haben auch die Elektricität und den Magnetismus unzweifelhaft als Bewegungszustände nachgewiesen. Schon wird von einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation gesprochen und diese verglichen mit der des Lichtes. Die Bewegungsvorgänge an dem Schwingungspendel geben dem Geologen Aufschluss über gewisse geognostische Verhältnisse der Erdrinde.

Einen grösseren Aufschwung hat die Chemie genommen, seit sie neben ihren obersten Grundsatz, nämlich den „Satz von der Unzerstörbarkeit des Stoffes“, nun auch den obersten Grundsatz der Mechanik, den „Satz von der Unzerstörbarkeit der Bewegungen“, oder mit anderen Worten, den „Satz von der Erhaltung der Energie“, setzte.

Es gab eine Zeit, in welcher selbst die grössesten Forscher noch an die Möglichkeit eines „Perpetuum mobile“ dachten. So hielt Huygens zwar auch die Ausführung desselben durch mechanische Mittel für unmöglich, nicht aber durch Benutzung anderer Mittel, vielleicht der Elektricität und des Magnetismus.

Heute könnte in dieser Erkenntniss der unsterbliche Forscher von jedem Gebildeten übertroffen werden, denn dieser sollte ohne Ausnahme sich mit der grössesten Errungenschaft der Neuzeit auf dem Gebiete der Mechanik, nämlich mit dem „Principe der Energie“ genügend vertraut

gemacht haben, wenn er Anspruch auf allgemeine Durchbildung erheben will.

Man hat von einem Zeitalter der Dampfmaschinen, der Eisenbahnen, der Elektricität gesprochen. Mit demselben Rechte könnte man heute in Bezug auf die Naturwissenschaften von dem Zeitalter der „Mechanik“ reden, denn die hervorragendsten Forscher der Gegenwart suchen alle Erscheinungen ohne Ausnahme als Bewegungserscheinungen nachzuweisen.

So leben wir in der That in einer Zeit, in der es weit erforderlicher erscheint, bis zu einer gewissen Tiefe in die Principien der Mechanik als z. B. in die der älteren Sprachen einzudringen.

Auch die Grundgesetze der Mathematik lassen sich aus den Grundsätzen der Mechanik herleiten. Das gilt von dem Wachsen und Abnehmen der mathematischen Grössen, von der Erzeugung der geometrischen Gebilde, von der Differential- und Integralrechnung.

Selbst die alltäglichen Bewegungsvorgänge liegen im Bereiche der Mechanik und sind nicht anders als durch deren Gesetze zu erklären.

Unsere „elementare technische Mechanik“ sollte das für die Praxis Unentbehrliche in geeigneter Form enthalten, überall auf ihren Nutzen für andere Zweige hinweisen und die Gesetze, Regeln, Formeln so abgeleitet und zusammengestellt enthalten, dass dieselben unmittelbar für die Maschinenwissenschaften verwerthbar sind. Sie ist aufgefasst und behandelt als eine Wissenschaft, die in allen ihren Theilen auf Erfahrung, Beobachtung und Versuch sich stützt. Da es jedoch nicht üblich ist, die Mechanik etwa in der Weise, wie die Physik und Chemie durch das Experiment zu unterstützen, so hat Verfasser versucht, die Grundsätze und Lehren seiner Mechanik aus alltäglichen, bekanntesten Vorgängen herzuleiten, wo es anging, gezeigt, wie dieselben an dem eigenen Körper sich beobachten, gleichsam fühlen lassen, und sich deshalb nicht bedacht, die Bewegungsvorgänge im Eisenbahnwagen, beim Eislauf, beim Tanzen in den Bereich der Betrachtung zu ziehen. Fast möchte man versucht sein, zu behaupten, dass Jemand mit wahrster Ueberzeugung über ein Gesetz der Mechanik erst dann sprechen könne, wenn er es wiederholt, so zu sagen, unfehlbar an seinem eigenen Körper wahrgenommen hat. Dementsprechend sind auch die Zahlenbeispiele gewählt. Von den Bewegungen der Spitze eines Uhrzeigers wird hinübergeleitet zu den Bewegungen der Himmelskörper, der Räder; von der Bewegung der Flüssigkeit in einer rasch geschwenkten Tasse auf die Centrifugalpumpen, von den Kleidern der Balletänzerin auf die Watt'schen Schwungkugelregulatoren und was der gewählten Beispiele noch mehr sind.

Verfasser glaubte bei der Bearbeitung seines Lehrbuches der Mechanik von der Ansicht ausgehen zu müssen, dass ein für den Techniker bestimmtes Lehrbuch, welches sich mit den Elementen, d. i. mit der Grundlage der Wissenschaft, befassen will, wohl auf streng wissenschaftlicher Grundlage stehen müsse, aber kein gelehrtes Buch sein dürfe.

Er glaubte, wer lehrt, müsse auch hinabsteigen zu den Lernenden, müsse folgerichtig von Grund auf, Stock auf Stock, das Lehrgebäude aufbauen; ferner, dass ein Lehrbuch der Mechanik nicht einseitig und trocken sein dürfe, auch nicht etwa nur eine Vorrathskammer sein solle, in welcher der reiche Lehrstoff im Ueberfluss regellos aufgehäuft ist, sondern vor allen Dingen ein Bildungsmittel sei, um den gesunden Menschen-

verstand zu entwickeln. Um das letztere zu erreichen, sei kaum eine andere Wissenschaft für jede Alters- und Bildungsstufe so geeignet, als eine auf eigene Anschauung gegründete, auf allbekannten, womöglich alltäglichen Vorgängen aufgebaute, folgerichtig entwickelte Mechanik.

Ein Lehrbuch, dessen Stoff so recht eigentlich aus dem Schoosse der Mutter Natur gegraben wäre, müsse, wenn es mustergiltig ist, in dem Lernenden den Glauben erwecken, dass er eigenhändig die natürlichen, schlichten Steinchen gefunden, behauen und zu dem fertigen Gebäude zusammengefügt hätte. Denn nur so wird die Lust zum Nachdenken, das Vertrauen auf die eigene Kraft, selbst im weniger Begabten das Gefühl der Sicherheit und Selbständigkeit und vor Allem die Liebe zur Sache erweckt. Und das ist doch im Allgemeinen der Hauptzweck eines Lehrbuches.

Unser Lehrbuch soll dasjenige umfassen, was der Bergbau-, Hüttenwesen- und Maschinenbau-Beflissene mindestens wissen muss, und ein nicht unfähiger Berg- und Gewerbeschüler gut begreifen kann. Vorausgesetzt ist nur die Kenntniss der Rechenoperationen der sogen. „niederen Mathematik“ und ein gutes Anschauungs- und Denkvermögen. Dass mit diesen Mitteln dennoch schon recht viel erreicht werden kann, haben uns grosse Vorbilder wie Archimedes, Kepler, Huygens, Newton, Watt, Rob. Mayer u. a. bewiesen (Siehe auch § 135). Die höhere Mathematik ist hier vollständig ausgeschlossen und für die „höhere Mechanik“ aufgespart.

Auch soll das Lehrbuch das enthalten, was der Beamte, Fabrikant, überhaupt jeder Freund der Technik überblicken und gebrauchen kann.

Wer das Werk durchsieht, wird erkennen, dass in demselben danach gerungen ist, stets auf Grund der im gewöhnlichen Leben gemachten Beobachtungen und gesammelten Erfahrungen die für die technischen Wissenschaften nothwendigsten Gesetze logisch zu entwickeln, ferner hinzuweisen auf die den mannigfachsten Zwecken dienenden, technischen Vorrichtungen, in denen gleichsam die Gesetze verkörpert sind.

Beim Einrichten der Grundlage wurde daran gedacht, dieselbe breit und brauchbar für einen „höheren“ Aufbau anzulegen.

Verfasser hätte gewünscht, ein gemeinverständlich-wissenschaftliches Lehrbuch zu schaffen, welches die breiteste Grundlage für die mathematisch-technischen Wissenschaften bildet.

Dieser Wunsch findet seine Erklärung darin, dass Verfasser Jahrelang ausführender Techniker war, dabei die Gelegenheit hatte, die Ansprüche kennen zu lernen, welche die Technik an eine Mechanik als Wissenschaft zu stellen hat, dann mehr denn 20 Jahre an der Clausthaler Bergakademie (für höhere Beamte) dazu früher an der mit der Bergakademie verbundenen Bergschule (für Unterbeamte) über Physik, „niedere“ und „höhere“ Mechanik und die Maschinenwissenschaften zu lehren hatte und durch zahlreiche Belehrungsreisen mit und ohne Studirende unausgesetzt Fühlung zwischen Werkstatt und Hörsaal bis heute unterhielt.

Schon diese Verschiedenartigkeit und der Umfang der technisch-wissenschaftlichen Thätigkeit mussten den Verfasser hindrängen, in dem

ungemein umfangreichen Gebiete der Mechanik Auslese zu halten und den Stoff so zu verarbeiten, dass er sozusagen fasslich, mundgerecht und verdaulich sei.

Im Eingange eines jeden grösseren, wichtigeren Absatzes ist durch „einleitende Bemerkungen“ mit dem Bekanntesten, Fasslichsten begonnen, das mehr Vorkenntnisse Voraussetzende thunlichst nach hinten gedrängt, damit so gleich von vornherein einem Jeden die Möglichkeit geboten wird, wenigstens bis zu einer gewissen Tiefe in den Stoff leicht einzudringen. Durch kleinen Druck ist minder Wichtiges abgesondert.

Die Einleitung, in welcher kurz Zweck, Bedeutung und Eintheilung der Mechanik angegeben und die wichtigsten Naturgesetze zusammengedrängt wurden, könnte vom Anfänger zunächst übersprungen werden, bis er sich erst etwas mit dem Gange des Lehrbuches vertraut gemacht hat. Auch sind in der Einleitung (S. 7) einige Gründe angedeutet, welche gegen die Eintheilung der Mechanik in „Statik“ und „Dynamik“ sprechen.

Die Skizzen möchte Verfasser als einfache, schlichte Freihand-Skizzen angesehen wissen, die nur das Allernothwendigste enthalten, so dass jede sowohl von dem Dozenten an der Tafel, als auch von dem weniger geübten Studirenden im Collegienhefte ohne besondere Hülfsmittel in wenigen Sekunden regelrecht hingeworfen werden könne. Die **Freihand**-Skizze ist Schrift, Wort und Sprache des Technikers.

Die Mechanik ist so recht eigentlich auch zugleich eine Vorstufe und Grundlage der Maschinenwissenschaften und so zu sagen der Nährboden, in welchen diese ihre Wurzeln schlagen.

Durch sorgfältige Gliederung des Stoffes in Haupt- und Unter-Abtheilungen, durch numerirte Paragraphen, Gleichungen, Beispiele, sowie durch ausführliche Inhaltsverzeichnisse ist Uebersichtlichkeit angestrebt und der Hinweis auf das Einzelne erleichtert.

Der aufmerksame, sachkundige Leser möchte hier und da manches „Neue, Eigenartige“ finden. Es sei hier u. a. nur auf die „Stosserscheinungen bei der bergmännischen Bohrarbeit“ (S. 348), und auf die mehrfach angestellten „Vergleiche“ aufmerksam gemacht. Auch wird derselbe nicht als verfehlt ansehen, dass besonders wichtige Gegenstände und Absätze, z. B. das Kurbelgetriebe, der Satz von der Energie, S. 92 u. ff. bei der Behandlung etwas bevorzugt sind. Eine wesentliche Ergänzung würde der genannte Satz noch in der Mechanik der Flüssigkeiten erfahren.

Wie weit der Verfasser mit seinen Wünschen und Plänen an das vorgesteckte Ziel herangekommen ist, und welchen grossen Antheil auch die Verlagsbuchhandlung und die Druckerei an dem Gelingen des Werkes hat, wolle man milde und gerecht beurtheilen.

Glück auf!

Clausthal, März 1894.

Oscar Hoppe.

Inhalt.

Einleitung.

Seite

Allgemeine Grundbegriffe und Erfahrungsgesetze: Bedeutung und Zweck der Mechanik. Bewegung, Ruhe, Lage im Raume, Zeit sind relative Begriffe. — Stoff, Raum, Zeit. — Kraft, Masse, Beschleunigung. — Erfahrungssätze der Beschleunigung (Absolutes Masssystem), der Trägheit, der Unabhängigkeit, der Wechselwirkung. Gleichgewicht. Statik, Dynamik. Eintheilung der Mechanik . . . 1

Erster Haupttheil.

Mechanik des Punktes.

Erster Abschnitt.

Mechanik des geometrischen Punktes (Phoronomie).

I. Einfache Bewegung:
A. Gleichförmige Bewegung. Geschwindigkeit. Weg. Graphische Darstellung. Beispiele 13
B. Ungleichförmige Bewegung. Mittlere, wirkliche Geschwindigkeit. Beschleunigung. Zusammenstellung bemerkenswerther mittlerer bezw. vortheilhafter Geschwindigkeiten. Gleichförmig veränderte Bewegung (Freier Fall; Anfangs- und Endlauf der Maschinen). Mathematischer Ausdruck des Bewegungsgesetzes. Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen. Bildliche Darstellung der ungleichförmigen Bewegung. Schwingungsbewegungen der Dampfmaschinen- und Pumpen-Kolben. Aufgaben der ungleichförmigen Bewegung (Fördermaschine. Krupp'sche Kanonen. Tiefebestimmung eines Schachtes) 19
II. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegung. Parallelogramm- und Polygon-Gesetz 29
A. Die einzelnen Bewegungen erfolgen in ein und derselben Ebene. Zweck der Zusammensetzung. Laufkran. Projektion 30
B. Die Bewegungen im Raume 32
III. Anwendung des Parallelogramm- und Polygon-Gesetzes auf die verschiedenen Bewegungsarten. Wie und wo bewegt sich der Punkt? 35
Erster Fall. Seitenbewegungen gleichartig und zwar nur gleichförmig . . 36
A. Bewegungen in derselben Ebene 36
a. zwei Bewegungen 36
b. mehrere Bewegungen 37
B. Bewegungen im Raume. Laviren der Schiffe. Vortheilhafteste Eintrittsgeschwindigkeit des Wasserstrahles in das Wasserrad 38
Zweiter Fall. Seitenbewegungen gleichartig und zwar nur ungleichförmig.
Die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ hängt nicht von der Neigung der Bahn ab. Die Sehnen im Kreise und in der Kugel, welche von den

Seite

Endpunkten eines vertikalen Durchmessers ausgehen, werden in gleichen Zeiten durchfallen. Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten an den Endpunkten der Schubstange einer Dampfmaschine 41
Dritter Fall. Seitenbewegungen ungleichartig, theils gleichförmig; theils ungleichförmig 45
A. Bewegungen in derselben Ebene. Parabelbewegung eines schräg austretenden Wasserstrahles 45
B. Bewegungen im Raume 50
C. Besondere Fälle.
a. Wurfbewegung. Wurfhöhe h. Wurfweite l. Krupp'sche Riesenkanonen 51
b. Centralbewegung. Die Huygens'schen Gleichungen $v^2 = p \cdot r$; $t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{q}}$ als Grundgleichungen der krummlinigen (centrischen) Bewegungen. Beschleunigung des Dampfmaschinenkolbens in der Totlage. Trabanten der Erde (Beispiel 34). Mondbeschleunigung. Erdbeschleunigung 56
c. Krümmungshalbmesser. Parabel. Schraubenlinie 63
IV. Anwendung des Parallelogramm- und Polygon-Gesetzes zur Bestimmung der sogen. „scheinbaren" Bewegung. Zahnräder. Im Eisenbahnwagen. Im Wasserglase. Im Fahrstuhle. Im Luftschiffe 64

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes.

(Fortschreitende Bewegung der Körper.)

I. Einfache Beziehungen zwischen p, P, m 72
A. Sogen. Augenblicks- (Momentan-) Kräfte (Kräfte kleinster Wirkungsdauer) 74
B. Dauernde (kontinuirliche) Kräfte. Gewichtsbestimmung. Einheit der Kraft P und der Masse m. m als Verhältniss, oder als Masseneinheit des absoluten Masssystemes. Die **Krafteinheit** ist diejenige Kraft, welche der Masse Eins entweder die Beschleunigung Eins, oder die Geschwindigkeit Eins in der Zeit Eins ertheilt. Die **Gewichtseinheit** ist diejenige Kraft, mit der diese Masse von der Erde angezogen wird. Diese Kraft wird 1 kg genannt und ist gleich 9,81 absoluten kg-Krafteinheiten. Ein Körper enthält die **Massenheit**, der an einem Orte, an welchem die Schwerbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\text{met}}{\text{sec}^2}$ herrscht, 1 kg wiegt, d. h. mit 9,81 absoluten kg-Krafteinheiten von der Erde angezogen wird. — **Gesetzliche** und **internationale** Bestimmungen nach der Mass- und Gewichtsordnung vom 17. August 1868; 11. Juli 1884; 23. April 1893 74
II. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte 76
A. Kräfte in derselben Ebene 77
a. Zusammensetzung der Kräfte. — Satz von den zwei, **drei** Kräften . . 77
b. Zerlegung der Kräfte 79
c. Zusammensetzung und Zerlegung beliebig vieler Kräfte 79
B. Kräfte im Raume. — Satz von den vier Kräften. Kräfteparallelogramm. Kräftepolygon (Graphostatik). Tonnlägiger Schacht (Beispiel 47). Kräfte am Kurbelgetriebe (Beispiel 49) 83

Seite

III. Anwendung der bislang gewonnenen Gesetze und Regeln zum Messen der Kräfte. Einleitende Bemerkungen. Nicht nur die **beschleunigte,** sondern auch die **krummlinige** Bewegung ist der Massstab zum Messen einer Kraft. Kraftsinn. Redtenbacher's Anschauung. Erweiterung dieser Anschauung. **Ur-** und **Natur-Eigenschaft aller Naturkörper (Bewegungen zu verhüten, zu beschränken, zu erzeugen)** 86

A. Satz von der Beschleunigung. Vergleich zwischen den Bewegungsvorgängen einer Fördermaschine des Bergmannes und an der Atwood'schen Fallmaschine des Physikers 87

B. Satz von dem Antrieb und der Bewegungsgrösse. Krupp'sche Riesenkanonen. Maxim-Mitrailleuse. Amerikanische Pulverramme von Shaw 1870. Pulver-, Dampf-, Kunst-, Zug-Ramme. Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes 88

C. Satz von der Arbeit (potentielle E.) und der lebendigen Kraft (Kinet. E. vorh. thatkr. E.). Huygens (1629—1695), Leibnitz (1646—1716), Descartes (1596—1650), d'Alembert (1717—1793), Joh. Bernoulli (1667—1748), Rob. Meyer (1842), Helmholtz. Arbeitseinheiten bei den Maschinen. 1 Pferdekr.=75 mkg in 1 Sek. (Nicht passend gewählt nach dem Sprachgebrauch der Bewegungslehre). Zusammenstellung einiger zusammengehöriger Werthe (Deutsches Reich, Österreich, England, Russland, Schweden). Bedeutung der Gesetze: $P = \frac{75\,N}{v} = 71\,620\,\frac{1}{R}\cdot\frac{N}{n}$. Bedeutung des Energiesatzes für das alltägliche Leben, die Technik und die Wissenschaft. Giltigkeit desselben überall da, wo Bewegungsänderungen zu erzeugen und zu verwandeln, zu beschränken und zu regeln, zu verhüten und aufzufangen sind. Besondere Fälle: 1. Die Kraft fällt nicht mit der Bewegungsrichtung der Masse zusammen. Projektion der Kraft in der Bewegungsrichtung, oder des Weges in der Kraftrichtung. 2. Negative Arbeit. 2. Mechanische Arbeit der Schwerkraft. 4. Jede senkrecht zur Bahn gerichtete Kraft verrichtet keine mechanische Arbeit in der Richtung der Bewegung. 5. Die Kraft fällt stets in die Richtung der krummen Bahn. 6. Die Kraft ist stets sich selbst parallel und konstant. **Während eines Kreislaufes verrichten parallele unveränderliche Kräfte die mechanische Arbeit Null.** (Häuerleistung bei der bergmännischen Bohrarbeit.) Satz von den mechanischen Arbeiten beliebig vieler Kräfte. Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten. Gleichgewichtsbedingungen. Bildliche Darstellung der mechanischen Arbeiten: 1. Arbeit einer konstanten Kraft. 2. Arbeit einer gleichförmig veränderlichen Kraft. 3. Arbeit einer nach Grösse veränderlichen Kraft (Simpson's Regel). 4. Arbeit einer nach Grösse und Richtung veränderlichen Kraft. Ersatz für die Simpson'sche Regel. Kruppsche Riesenkanonen (Beispiel 50). Pulverramme (Beispiel 51). Zusammenstösse von Schnellzügen. Leistungsvermögen des Wassers im Hirschler Teich bei Clausthal bei einem plötzlichen Dammbruche. Leistung eines Arbeiters. Leistung einer Wasserkraft. Kraftverhältnisse auf der schiefen Ebene. Kraftverhältnisse am Keil 92

D. Satz von den statischen Momenten. Innige Verwandtschaft zwischen dem Satze von der mechanischen Arbeit mit dem von dem statischen Moment. Bergmännische Kurbelhaspel. **Jeder Kraftgewinn wird durch einen gleich grossen Weg- oder Geschwindigkeits-Verlust aufgewogen** (Unmöglichkeit des „Perpetuum mobile") 110

Seite

E. Satz von der Centralkraft. Einleitende Bemerkungen 113
a. Centripetal- und Centrifugal-Kraft (Kräfte bei kreisenden Bewegungen). **Krummlinige Bewegung erfordert Centripetalkraft und erzeugt Centrifugalkraft.** Bewegungsvorgänge bei der Flüssigkeit in einer rasch im Kreise herumgeschwenkten Kaffeetasse zur Erklärung der Wirkung der Centrifugalpumpen, Centrifugen. Oelschleudern. Carr's Desintegrator. Kämp und Nagel's Dismembrator. Lappenpolir-Scheiben. Tachometer (Albaret). Watt's Schwungkugel-Regulator verglichen mit den Kleidern einer Ballettänzerin. Gewichtsverminderung durch die Erddrehung. Centrifugaler Druck (Bodensatzbildung, Aufbereitung, Chemie). Centrifugaleisenbahn 113
1. Centrifugalpendel. Einleitende Bemerkungen. Die Vorgänge bei der Wurfbewegung, beim Centrifugalpendel, beim Schwingungspendel in ihren verwandtschaftlichen Beziehungen und als Bestätigung des Satzes: **In der Natur findet keine Vernichtung, sondern nur eine gleichwerthige Umwandlung statt** 118
2. Schwungkugel-Regulator 122
Statischer Regulator (Watt, Porter) 124
Astatischer Regulator (Frank) 124
Pseudoastatischer Regulator (Kley, Proell) 126
3. Ueberhöhung der äusseren Schiene einer Eisenbahnkurve . . . 127
b. Kräfte bei Schwingungsbewegungen 129
Schwingungspendel 131
IV. Kepler-Gesetze 134
V. Newton-Gravitationsgesetz, eine Folgerung aus den Kepler- und Huygens'schen Gesetzen. Specifisches Gewicht der Erde 136
VI. Aenderung der Erdbeschleunigung g und des Gewichtes G mit der geographischen Breite φ. Die von Bessel in Toisen angegebenen, von Prediger in Meter umgerechneten Werthe weichen von den Enke'schen ab 141

Zweiter Haupttheil.

Mechanik der Körper.

Erster Abschnitt.

Mechanik der geometrischen Körper (Phoronomie, Kinematik).

Einleitende Bemerkungen. Unterschied zwischen geometrischen und materiellen Körpern, zwischen Phoronomie und Kinematik 149
A. Bewegungen im Raume 149
Schiebung (Kolben im Cylinder) 149
Drehung (Zapfen im Lager) 149
Schraubung (Schraubenspindel in der Mutter) 150
B. Bewegungen in der Ebene 150
Augenblicklicher Drehpunkt (Pol) der Schubstange einer Dampfmaschine. Polbahn. Jede Bewegung einer ebenen Figur in einer Ebene lässt sich auf ein Rollen zurückführen. Verwandtschaftliche Beziehungen zwischen Ellipse, Kreis, Gerade und Hypocycloïde und

Seite

Geraden. Hypocycloïdische Geradführung oder Planetenführung. Vergleich zwischen dem Ovalwerke von Leonardo da Vinci und dem Evans'schen Gegenlenker bei den Indikatoren. Oscillirende Kurbelschleife und Cylinder. Geschwindigkeit an den beiden Enden der Schubstange 151

Zweiter Abschnitt.

Mechanik der materiellen Körper.

Mechanik der festen Körper (mit Rücksicht auf die Drehung).

Allgemeines. Erklärung eines festen Körpers. Unterschied zwischen der Mechanik der festen Körper und des materiellen Punktes 157
I. Verlegung des Angriffspunktes 157
A. Satz von den zwei Kräften. Innere Kräfte verändern nicht den Bewegungszustand des Schwerpunktes eines festen Körpers 157
B. Verallgemeinerung des Satzes von den drei Kräften 159
C. Verallgemeinerung des Satzes von den vier Kräften 159
II. Zusammensetzung von Kräften, welche an verschiedenen Punkten eines festen Körpers angreifen.
A. Die Kräfte wirken in derselben Ebene 160
a. Zusammensetzung nicht paralleler Kräfte 160
1. Zwei in derselben Ebene angreifende Kräfte (Beispiel 76) . . . 160
b. Zusammensetzung paralleler Kräfte 161
2. Zwei parallele Kräfte mit gleicher Richtung 161
3. Zwei parallele Kräfte mit entgegengesetzter Richtung 162
4. Zwei parallele Kräfte mit entgegengesetzter Richtung, aber von gleicher Grösse, bilden ein **Kräftepaar** 163
c. Die Kräftepaare oder die Drehkräfte. 164
Allgemeine Bemerkungen über Kräftepaare. Begriff. Bedeutung des Kräftepaares. Das Kräftepaar, wie es der Theoretiker auffasst und wie es in der Praxis auftritt 164
Bildliche Darstellung von Paaren 166
Zusammensetzung und Zerlegung von Paaren 167
α. Zusammensetzung von Paaren 167
β. Zerlegung eines Paares 171
γ. Zusammensetzung von Paaren, die in beliebig gerichteten Ebenen liegen 171
δ. Zusammensetzung und Zerlegung von Einzelkräften und Paaren mit besonderer Berücksichtigung praktischer Fälle (Stubenthür, Kran) 173
B. Allgemeinster Fall 175
Die 6 allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik oder Bewegungserscheinungen an einem Körper, auf welchen Kräfte in beliebigen Ebenen, Punkten und Richtungen einwirken. Allgemeine Betrachtungen. Die sechs möglichen Bewegungen, erörtert an einem unsorgfältig aufgebüchsten gewöhnlichen Wagenrade. **Das Streben des Menschen ist von jeher darauf gerichtet gewesen die mehr oder weniger freien Bewegungen in der Natur zu unfreien zu machen.** Hüttenkran 175

Seite

C. Besonderer Fall 182
Gleichlaufende (parallele) und gleichgerichtete Kräfte. Parallele, an bestimmten Punkten im Körper angreifende Kräfte haben einen Mittelpunkt 182

III. Anwendung der bislang gewonnenen Regeln 184

A. Bestimmung des Schwerpunktes 184

a. Schwerpunkt gleichartiger (homogener) Gebilde (Linien, Flächen, Körper) 186

1. Schwerpunkt von Linien (Stäben) 187

2. Schwerpunkt von Flächen 191

3. Schwerpunkt von Körpern 198

b. Schwerpunkt ungleichartiger Gebilde 201

B. Inhaltsbestimmung von Flächen und Körpern nach der Regel von Pappus und Guldin. Inhalt ist gleich dem Produkte aus der Erzeugenden und dem von dem Schwerpunkte der letzteren zurückgelegten Wege . . . 201

C. Bewegungserscheinungen an unterstützten Körpern (Wagen etc.) . . . 206

a. Unterstützung in einem Punkte oder einer Achse. Hinfälliges (labiles), beständiges (stabiles), gleichgiltiges (indifferentes) Gleichgewicht 206

α. Körper ruhen auf wagerechter Unterlage (Seilbahn, Zweirad) . . 208

β. Körper sind aufgehängt. Gewöhnliche zweiarmige Wage. Empfindlichkeit. Haupterfordernisse. Gewichtsbestimmung ist hier Winkelmessung. Mass der Empfindlichkeit. Schnellwage. Gewichtsbestimmung ist hier Längenmessung. Dänische Wage. Schnellwage mit verjüngtem Gewichte. Roberval-Wage 210

b. Unterstützung in zwei Punkten oder parallelen Achsen. Senkrecht zur Stützfläche gerichteter Gegendruck. Anwendung des Satzes von den drei Kräften. Krane. Dachkonstruktionen. Hängegradbogen. Zweiarmige Hebel. Rad an der Welle. Balancier. Kunstwinkel. Brückenwage. Hebel am Sicherheitsventile 215

c. Unterstützung in drei Punkten 225

d. Unterstützung in mehr als drei Punkten. Flächendruck (specifischer Druck). Stabilitätsmoment. Dynamische Stabilität. Strebepfeiler . . 227

e. Mehrere sich gegenseitig stützende Körper 230

Stangenverbindungen 230

α. Symmetrische Verbindung zweier Stangen (Kniehebelwerk, Dachstuhl) 230

β. Verbindung zweier beliebiger Stangen, von denen die eine unbelastet ist. Charnierbrücke. Kranvorrichtung 234

γ. Verbindung dreier beliebiger Stangen, von denen nur die mittlere belastet ist 236

δ. Verbindung dreier beliebiger Stangen, von denen die mittlere unbelastet ist 236

ε. Symmetrische Verbindung von vier Stangen. Der Horizontalschub hat an allen Stellen der Stangenverbindung dieselbe Grösse. Bildliche Darstellung (Seilpolygon, Graphostatik) 237

ζ. Verbindung von beliebig viel Stangen 239

η. Verbindung von unzählig viel Stangen. Ketten, Seile, Ketten- und Seilbrücken 241

ϑ. Einige wichtige Sätze aus der graphischen Statik (Graphostatik) 245

Seite

IV. Drehbewegungen der Körper mit Rücksicht auf die Vertheilung der m zur Drehachse. Gesammtwirkung bei der Drehbewegung sind zweifacher Art: Aeusserung einer Einzelkraft, die im Schwerpunkte angreift, und eines Kräftepaares. Freie Achsen 250

A. Satz von der Winkelbeschleunigung. — **Trägheitsmoment.** Allgemeine Sätze: Trägheitsarm. Reducirte Masse. Trägheitshalbmesser. Mittelpunkt der Trägheit. Vergleich zweier Massen. Trägheitsmoment J in Bezug auf eine Achse, welche parallel der Schwerpunktsachse ist. Polares Trägheitsmoment. Trägheitsmomente von Linien, Flächen, Körpern . . 255

B. Satz vom Antriebe und der Bewegungsgrösse sich drehender Körper . 269

C. Satz von der Arbeit (Energie) sich drehender Körper. Mechanische Arbeit ist gleich dem Trägheitsmoment multiplicirt mit der Zunahme an lebendiger Kraft. Schwungrad einer Dampfmaschine 270

D. Von der Arbeit (Energie) rollender Körper 271

E. Centrifugalspannung im Innern sich drehender Körper. Umfangsgeschwindigkeit in der Praxis meist kleiner als 30 bis 40 m. Dampfturbine von De Laval, Chicago—Stockholm. Mühlsteine 273

F. Anwendung der bislang gewonnenen Sätze und Regeln 275

a. Die Schwingungsdauer des physischen oder zusammengesetzten Pendels 275

b. Zweck und Berechnung der Schwungräder. Einleitende Bemerkungen. Schwungrad gross; nahe der Maschine, von welcher die Unregelmässigkeiten ausgehen. Gleichförmigkeitsgrad 277

c. Der Centrifugal- oder Schwungkugel-Regulator 284

V. Reibung und die durch dieselbe bewirkten Bewegungsänderungen der Körper 285

Einleitende Bemerkungen. Die Reibung ist Mittel: **hier Bewegung zu hindern, dort Bewegung zu übertragen.** Schmiermittel. Vergrösserung der Reibflächen, um das Warmlaufen zu verhüten 285

A. Gleitende Reibung mit Einschluss der Zapfenreibung 287

a. Der Reibungswiderstand $W = f \cdot Q$ liegt tangential zu den Reibflächen, ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, wächst mit dem Normaldrucke Q und mit dem Reibungskoëffizienten $f < 1$. Mechanische Arbeit der Reibung. Zusammenstellung einiger Grenzwerthe von f. Die trigonometrische Tangente des Reibungswinkels φ = Reibungskoëffizient f. Reibungskegel 287

b. Schiefe Ebene. Flachgängige Schraube. Scharfgängige Schraube. Schraube ohne Ende. Keil. Keilpresse. Schraubenkeilpresse. Allgemeine Theorie des Keiles. Keilnuthen 290

c. Seilreibung. Bandbremse. Riementrieb 305

d. Seilsteifigkeit, Zapfenreibungswiderstand, Kettenreibung, Widerstandskoëffizient k 312

e. Flaschenzüge. Gewöhnliche Flaschenzüge, Güteverhältniss. Tabelle. Potenzflaschenzüge. Weston's Differenzialflaschenzug. 1. Beziehung zwischen Kraft P und Last Q. Selbsthemmung. 2. Beziehung zwischen den Bewegungen der Kraft und Last. 3. Beziehungen zwischen den mechanischen Arbeiten der Kraft und Last. **Was an Kraft gewonnen, geht am Wege verloren** 317

f. Prony's Zaum 323

g. Theorie des Klemmens. Theorie des Pochstempels. Besondere Fälle 325

h. Zapfenreibung. Gewöhnlicher Zapfen. Ringförmiger Zapfen. Mechanische Arbeit der Zapfenreibung 328

Seite

B. Rollende Reibung. Koëffizienten. Werthe von k für Eisenbahnen und Strassen. (Hölzerne Schlittenkufen, Schneeschuhe.) Fuhrwerke auf geneigten Bahnen 330

VI. Der Stoss und die durch denselben bewirkten Bewegungsänderungen der Körper 334

Einleitende Bemerkungen 334

A. Der unelastische, gerade, centrale Stoss. Giffard-Injektor 337

B. Der elastische, gerade, centrale Stoss 339

C. Der unvollkommen elastische Stoss 342

D. Der schiefe Stoss 343

E. Der excentrische Stoss 343

F. Der Verlust $\mathfrak{V}$ an lebendiger Kraft beim Stoss. Rest $\mathfrak{R}$ an lebendiger Kraft nach dem Stoss. $\mathfrak{V}$ ist nützlich bei Formveränderungen (Schmieden). $\mathfrak{R}$ ist nützlich, wenn eine Bewegung des getroffenen Körpers gewünscht wird (Einrammen von Pfählen) 344

G. Beispiele 346

1. Stosserscheinungen beim Dampfhammer 346
2. Stosserscheinungen bei der Ramme 347
3. Bergmännische Bohrarbeit 348
4. Stirnhammer 349
5. Ballistisches Pendel 351

Einleitung.

Allgemeine Grundbegriffe und Erfahrungsgesetze.

§ 1.

Die Mechanik handelt von den Bewegungen und heisst deshalb auch Bewegungslehre.

(Da die Bewegungen und Bewegungsänderungen durch sogen. Kräfte bewirkt werden, hat man die Mechanik auch die Lehre von den Wirkungen der Kräfte genannt.)

Die Ergebnisse der umfassendsten Beobachtungen und Forschungen berechtigen zu der Annahme, dass kein Stofftheilchen im Weltall sich ruhig und wirkungslos verhält.

Jeder Vorgang in der Natur und Kunst, überhaupt jede Erscheinung, vielleicht jede Wahrnehmung derselben durch unsere Sinne, ist auf Bewegung, auf eine Molar-, Molekular-, Atombewegung zurückzuführen.

Eigenthümliche Bewegungsvorgänge, selbst wenn dieselben sich, unserer unvollkommenen Sinne und Werkzeuge wegen, der unmittelbaren Beobachtung entziehen, wohl sind es, welche die Verschiedenartigkeit vielleicht der Naturkörper überhaupt, oder doch wenigstens des

festen, flüssigen, gasförmigen

Zustandes derselben bedingen.

Bewegung nur kann es sein, was wir als

Schall, Licht, Wärme, Electricität und Magnetismus

wahrnehmen und bezeichnen.

Der Zukunft wird es vorbehalten sein, auch die allgemeine Anziehung (Gravitation), sowie die chemische Affinität auf Bewegung zurückzuführen.

Vielleicht ist nicht zu gewagt, nicht zu kurz die Behauptung:

Natur ist Bewegung,

denn nur Bewegtes ist wahrnehmbar.

Ist dem also, dann können auch die verschiedenartigsten natürlichen und künstlichen Vorkehrungen der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft stets in erster Linie nur bezwecken Bewegungen und Bewegungsänderungen:

1. zu verhüten,
2. zu beschränken und zu regeln,
3. zu erzeugen und umzuwandeln.

Dann aber ist das Studium der Bewegungslehre (Mechanik) einem Jeden, der auf den verschiedenen Gebieten der Natur, Kunst und Wissenschaft zu schaffen hat, durchaus unentbehrlich und selbst dem Laien nützlich. Denn die allgemeinen Principien der Mechanik bilden die einzig wahre und dauernde Grundlage nicht nur für die Technik, sondern auch für das ganze weite Gebiet der erklärenden Naturwissenschaften, und nur die Kenntniss der Bewegungslehre beschützt vor manchem Trugbilde, wie es dem Unwissenden in dem unsinnigen Undinge, genannt „Perpetuum mobile“, vorschwebt.

Die Bewegungslehre ist angewandte, lebendige Mathematik. Oder wie der berühmte Philosoph, Künstler und Ingenieur Leonardo da Vinci (1452—1519) sagt: „Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.“ Aus ihr leitete der grosse Newton die Grundsätze seiner Differential- und Integralrechnung (Fluxions-Theorie) her.

Sie ist die Sprache des Technikers und, logisch aufgebaut, geeignet, den Verstand zu verschärfen und zu stärken, wie kaum eine andere Wissenschaft, nicht ausgeschlossen die Sprachwissenschaften.

Die Bewegungslehre (Mechanik) sucht die Gesetze aller überhaupt möglichen und denkbaren Bewegungen, das sind Ortsveränderungen im Raume mit Berücksichtigung der Zeit:

1. in Worte zu fassen und auf Grund der Beobachtung, Erfahrung und des Versuches zu erklären,
2. in die einfachste mathematische Form (Gleichung) zu kleiden,
3. bildlich (graphisch) darzustellen, d. h. durch Linien zur Anschauung zu bringen,
4. durch zweckmässig gewählte Beispiele aus der Natur, Kunst (Technik) und Wissenschaft zu üben, zu verallgemeinern.

Auch mit Ruhezuständen hat die Bewegungslehre sich zu befassen, denn die Ruhe ist als Anfang oder als Ende, also nur als ein besonderer Zustand der Bewegung aufzufassen.

§ 2.

Die Bewegung, die Ruhe, die Lage im Raume, die Zeit sind bezügliche (relative) Begriffe.

Das Haus ist in Ruhe in Bezug auf die Erdoberfläche, auf der es steht, aber in Bewegung in Bezug auf die Erdachse, den Mond, die Sonne. So ist die Ruhe überall nur eine scheinbare und nirgends in der Natur thatsächlich vorhanden.

Dem im Eisenbahnwagen rasch Dahinfahrenden scheint es, wie wenn die ausserhalb des Wagens auf der Erdoberfläche ruhenden Gegenstände sich in entgegengesetzter Richtung bewegten, und zwar am raschesten die nächsten, am langsamsten die entferntesten. Umgekehrt würde ein in sehr grosser Entfernung von uns, selbst mit grosser Geschwindigkeit, dahineilender Eisenbahnzug uns als stehend erscheinen. In derselben Täuschung sind wir Erdenbewohner befangen in Bezug auf die in grosser Geschwindigkeit dahineilenden sogen. Fixsterne. Die Entfernung derselben von uns ist eine so grosse, dass die von denselben zurückgelegten ungemein langen Bahnstrecken uns doch nur als ein einziger Punkt erscheinen. Jeder beliebig gewählte Punkt ausserhalb unseres dahineilenden Eisenbahnwagens, den wir fest ansehen, erscheint uns als ein Ruhepunkt (Mittelpunkt), um den sich alle anderen benachbarten Punkte in kleineren oder grösseren Kreisen drehen. Um den Punkt fest anzusehen, müssen wir natürlich beständig die Augen wenden in einer Richtung, welche der Bewegungsrichtung unseres Wagens entgegengesetzt ist. Wollten wir also die unmittelbar neben dem dahinfahrenden Wagen befindlichen Telegraphenstangen fest ansehen, für uns gleichsam zur Ruhe bringen, so müssten wir die Augen ebenso rasch nach rückwärts wenden, wie der Zug nach vorwärts fährt. Führe ein zweiter mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung als der unserige neben diesem her, so würden wir ihn stillstehend wähnen, es würden die einzelnen Theile desselben ebenso deutlich von uns gesehen werden, als ob beide Züge, der unserige und der benachbarte, stille ständen. Die einzelnen Theile (Zähne, Arme) eines im Dunkeln rasch gedrehten Rades erscheinen uns jedesmal in Ruhe in dem Augenblicke, in welchem sie von einem elektrischen Funken beleuchtet werden. Bei beständiger Beleuchtung dagegen würde unser Auge die einzelnen Theile nicht unterscheiden. Nur wenn wir unsere Augen mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung bewegen, in welcher das Rad sich dreht, sehen wir deutlich die einzelnen Theile. Von diesem Verfahren macht der Techniker zuweilen Gebrauch, wenn er die Form der Zähne oder Arme eines rasch gedrehten Rades sehen will. Noch ein Beispiel aus dem alltäglichen Leben: Wenn wir in dem einen von zwei nebeneinanderstehenden Eisenbahnzügen sitzen, und nun der eine sich in Bewegung setzt, können wir meist erst dann mit Bestimmtheit angeben, welcher Zug ruht und welcher sich bewegt, wenn wir aus dem Fenster hinaus nach den Rädern sehen. Ebenso würde der blosse Augenschein zu der Annahme verleiten, dass die Sonne sich bewege und die Erde still stehe. Diese wenigen Beispiele aus dem

alltäglichen Leben mögen genügen, darzuthun, dass hier niemals von einer unbezüglichen (absoluten, wirklichen), sondern nur von einer bezüglichen (relativen, scheinbaren) Bewegung oder Ruhe die Rede sein darf (siehe auch §§ 59 u. ff.).

Die Lage eines Punktes im Raume (z. B. inmitten eines Zimmers) bestimmt man, indem man dieselbe in Bezug auf andere festgedachte Punkte, Linien oder Ebenen (z. B. in Bezug auf eine Zimmerecke, auf die Zimmerwände oder die drei in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten) angiebt (Koordinaten).

Die Zeit beziehen wir meist auf die Dauer einer Drehung der Erde um ihre Achse.

§ 3.

Das Bewegte ist der Stoff (die Materie).

Aus den im Voranstehenden erwähnten drei Grundbegriffen,

Stoff, Raum, Zeit,

lassen sich alle anderen Begriffe der Bewegungslehre, z. B. zunächst die der

Masse (m), Kraft (P), Beschleunigung (p),

entwickeln.

§ 4.

Das nähere Eingehen auf diese drei zuletzt genannten Begriffe führt uns folgerichtig auf den wichtigen, fast möchte man sagen, den wichtigsten Grundsatz der Bewegungslehre, der unentbehrlich ist in allen denjenigen Wissenschaften, in denen gewogen und gemessen wird; nämlich den

Erfahrungssatz der Beschleunigung

oder den Satz Newton's (1642—1726), der sich auf verschiedene Weise folgendermassen in Worte fassen lässt:

Die Masse (m) (auch Menge des Stoffes genannt) kann nur durch diejenige Beschleunigung (Bewegungsveränderung im Raume) p gemessen werden, die eine bestimmte Kraft P in einer bestimmten Zeit an ihr hervorbringt.

Oder

Die Kraft P ist die Ursache der Bewegungsänderung p, die wir an der Masse m beobachten, und nur nach diesen ihren Wirkungen vollständig (d. i. nach Angriffspunkt, Grösse, Richtung) zu bestimmmen.

Oder

Die Beschleunigung (p), die wir an einem Körper beobachten, ist um so grösser, je grösser die beschleunigende Kraft (P) und je kleiner die zu beschleunigende Masse (m) ist.

Auch drückt man den Satz wohl folgendermassen aus:

Zwei Körper, gleichgültig aus welchem Stoffe sie bestehen, vielleicht der eine aus Holz, der andere aus Gold, haben

genau gleiche Massen,
wenn gleiche Kräfte
in gleichen Zeiten
gleiche Beschleunigungen

an ihnen hervorrufen.

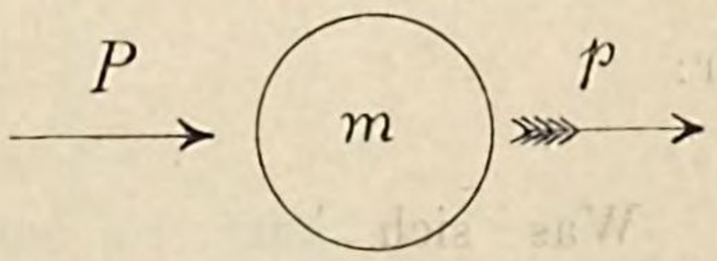


Fig. 1.

Der mathematische Ausdruck des Satzes ist

$$\boxed{m = \frac{P}{p} = \frac{G}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\

oder wörtlich:

$$Masse = \frac{Kraft}{Beschleunigung} = \frac{Gewicht}{Erdbeschleunigung}.$$

Vermittelst dieser Gleichung ist jederzeit die Masse m eines Körpers zu bestimmen.

Man lässt eine beliebige Kraft P auf den Körper, dessen Masse man bestimmen will, einwirken, beobachtet die in einer Sekunde hervorgebrachte Beschleunigung p, und bildet das Verhältniss $\frac{P}{p}$, so ist dieses die gesuchte Masse. Anstatt der beliebigen Kraft kann man auch das Gewicht G des Körpers wählen, dann ist die Beschleunigung auch ein bestimmter Werth, nämlich die Erdbeschleunigung g in 1 Sekunde. Im Mittel ist $g = 9{,}81$ Meter.

Stoff, Kraft, Bewegung, Zeit sind ausnahmslos aneinander gebunden.

Es giebt keinen Stoff ohne Kraft, keine Kraft ohne Stoff.

Keine Kraft wirkt zeitlos.

Die im Weltall vorhandene Menge an Stoff und Kraft ist für alle Zeiten konstant.

§ 5.

Den drei Grundbegriffen Stoff, Raum, Zeit entsprechend sind nur drei Masseinheiten erforderlich, um alle Grössen, mit denen der Techniker und der messende Theoretiker zu thun hat, auszudrücken:

1. um den Raum zu messen, die Längeneinheit 1 cm $= C$,
2. „ „ Stoff „ „ „ Masseneinheit 1 g $= G$,
3. „ die Zeit „ „ „ Zeiteinheit 1 Sek. $= S$.

Aus diesen Grundeinheiten des sogen. „absoluten“ oder Centimeter-Gramm-Sekunden- (abgekürzt C.-G.-S.-) Systems lassen sich alle anderen Einheiten der Bewegungslehre ableiten.

Z. B. ergiebt sich im absoluten Masssysteme als Einheit der Kraft oder als Dyn, diejenige Kraft, die der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung, d. h. dem Gramm die Beschleunigung 1 Centimeter in 1 Sekunde ertheilt.

§ 6.

Erfahrungssatz der Trägheit oder der Satz des Galilei (1564 bis 1642), weil er von diesem Forscher zuerst unzweifelhaft erkannt und in die Wissenschaft eingeführt wurde.

Derselbe kann auch als ein besonderer Fall des Beschleunigungssatzes

$$p = \frac{P}{m}$$

aufgefasst werden; denn nach diesem wird

$$p = 0$$

für:

$$P = 0.$$

Was sich kurz so ausdrücken lässt: Ohne Kraft keine Bewegungsveränderung.

Oder

Jeder Körper verharrt in dem vorhandenen Zustande, sei es der Ruhe, oder auch der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange bis von aussen her einwirkende Kräfte eine verhältnissmässige Veränderung veranlassen. Kein Körper kann

aus sich seinen Zustand ändern. Vielmehr widersteht der Stoff erfahrungsgemäss jeder Bewegungsveränderung, er äussert einen Beschleunigungswiderstand, ein Beharrungsvermögen, zeigt Trägheit.

Selbst nach der Einwirkung von Kräften besteht ein Verharren in der ursprünglichen Bewegung fort und es entspricht die Veränderung jedesmal nur der neuen Bewegungsursache oder dem hinzutretenden Bewegungshindernisse (z. B. der auftretenden Reibung). Wäre dem nicht so, nähme der von seinem Neste auffliegende Vogel nicht die Bewegung mit auf den Weg, welche er als Theil der Erde vor dem Auffliegen hatte, er würde bald weit hinter seinem Neste zurückbleiben, welches z. B. am Aequator gelegen, in jeder Sekunde einen Weg von 464 m um die Erdachse und dazu 4 Meilen mit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne zurücklegt (Beispiele 8 u. 9).

Man hat das Verbleiben des Vogels bei seinem Neste wohl durch ein Mitnehmen durch die den Erdball umgebende Atmosphäre erklären wollen. Doch diese Annahme sagt gar nichts. Die thatsächlich vorhandene Erscheinung würde im wesentlichen nicht geändert werden, wenn die Erde keine Atmosphäre hätte. Wer die soeben geschilderte Erscheinung durch eigene Wahrnehmung bestätigt wissen will, springe auf einem in rascher Drehung begriffenen Karroussel möglichst gerade und hoch in die Höhe und beobachte, ob das Karroussel in der Zeit, in welcher er in der Luft schwebte, unter ihm weg sich bewegte. Wie dem Vogel, so nützt auch der auf dem Rücken des rasch dahingaloppirenden Pferdes tanzenden Kunstreiterin die ihrem Körperstoffe innewohnende Trägheit.

Auch der Stoss, dieser wichtige, hier nützliche, dort schädliche Vorgang in der Natur und Kunst, ist eine Folge der Trägheit. Damit beim plötzlichen Aufsetzen des rasch abwärtsgehenden Fahrstuhles sich der Bergmann, dessen Körper in Folge der Trägheit die Bewegung fortzusetzen strebt, vor Rückgratsbrüchen schützen kann, sind an der Decke sog. „Anhänger“ (wie z. B. in den Pferdebahnwagen) angebracht. Auch durch Federn in dem Boden des Fahrstuhls sucht man die Gefahr abzuwenden. Jedes Polster, der Puffer der Eisenbahnwagen schützt uns gegen die Wirkungen des Stosses, bezw. des Trägheitsvermögens. Nutzen ziehen wir aus der Wirkung des Stosses, also des Trägheitsvermögens, beim Einschlagen von Nägeln, Einrammen von Pfählen, bei der bergmännischen Bohrarbeit, beim Pochen, Schmieden, Walken und in Tausend anderen Fällen.

Noch der berühmte Deskartes (Cartesius 1596—1650) hielt zur Unterhaltung einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung eine Kraft für erforderlich.

Erst Galilei legte 1638 durch Entdeckung des oben erklärten Trägheitsgesetzes die Grundlage zu der heutigen Bewegungslehre.

§ 7.

Erfahrungssatz der Unabhängigkeit der Wirkungen.

Dieser in bestimmter Form wohl zuerst von Newton ausgesprochene Satz kann ebenfalls als eine Folgerung des Satzes von den Beschleunigungen angesehen werden.

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ auf ein und denselben Körper, dessen Masse m sein mag, ein, so erzielt jede Kraft die ihr entsprechende Wirkung, durchaus unabhängig, sowohl von der Wirkung der anderen Kräfte als auch von dem bereits vorhandenen Bewegungszustande. Alle Wirkungen,

$$p_1 = \frac{P_1}{m}, \quad p_2 = \frac{P_2}{m}, \quad p_3 = \frac{P_3}{m} \ldots\ldots$$

setzen sich wie später (mit Hülfe des Polygon- oder Parallelogrammgesetzes § 77 u. 78) ausführlich gezeigt werden wird, zu einer einzigen resultirenden gleichwerthigen Wirkung zusammen.

Wird z. B. in einem Flusse ein Boot O durch die Strömung (Kraft des fliessenden Wassers) in 1 Minute 10 m stromabwärts getrieben und würde dasselbe gleich-

zeitig durch die Kraft der Ruderer 2 m senkrecht zur Stromrichtung fortbewegt, so würde jene Abwärtsbewegung doch erfolgen. Das Ergebniss beider unabhängig voneinander erfolgenden Wirkungen ist derart, dass das Boot am Ende dieser Minute sich in einem Punkte D befindet, welcher bezüglich der Anfangslage O 10 m stromabwärts und 2 m näher dem jenseitigen Ufer liegt. Der Beobachter am Ufer sieht die Bewegung OD.

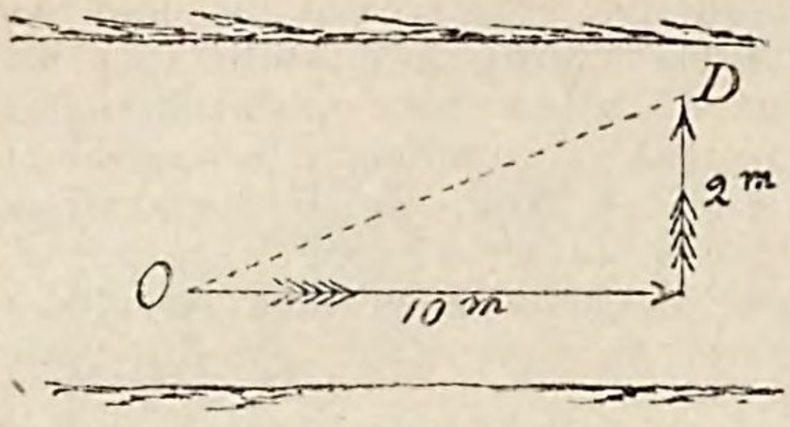


Fig. 2.

Als letzten der durch die Beobachtung ermittelten Hauptsätze führen wir an den:

§ 8.

Erfahrungssatz der Wechselwirkung.

Die Kräfte treten stets paarweise, nie vereinzelt, auf. Jeder Kraft entspricht eine genau gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft. So dem Drucke P_1 auf die Tischplatte ein gleicher Gegendruck P_1 seitens der Tischplatte. Dem Zuge P_2 an dem in der Zimmerdecke befestigten Haken, der gleich grosse Widerstand P_2 in der Decke. Dieselbe Kraft P_3, welche den fallenden Stein zum Mittelpunkt der Erde zieht, zieht die Erde zum Steine. Die Anziehungs- bezw. Abstossungskräfte NS an den Polen zweier einander genäherten Magnete sind einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Der Centripetalkraft P_e entspricht die gleichgrosse entgegengesetzt gerichtete Centrifugalkraft P_a.

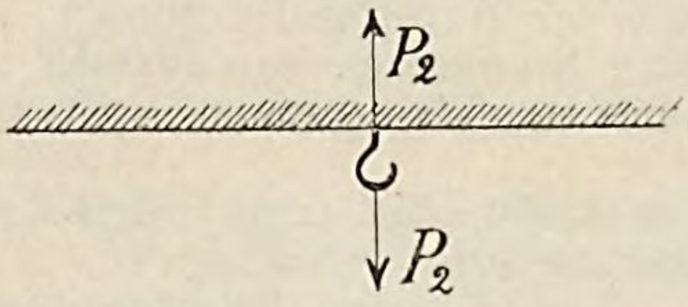


Fig. 3.

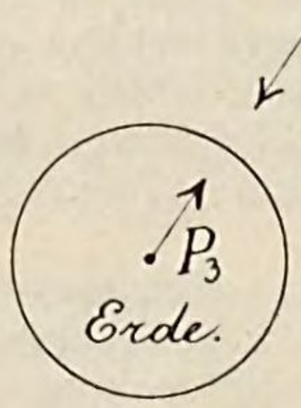


Fig. 4.

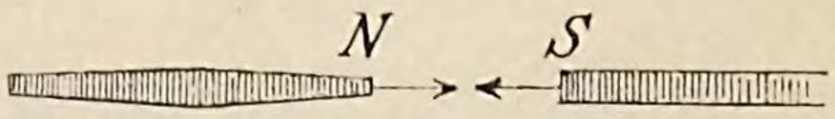


Fig. 5.

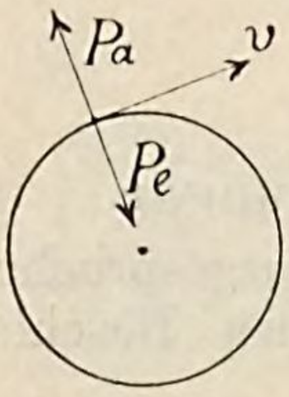


Fig. 6.

Dieser Wechselwirkung der Kräfte und Bewegungen entspricht bei allen natürlichen und künstlichen Vorrichtungen eine gewisse Zweiheit. Der Erfahrung würde deshalb viel besser der Satz entsprechen: Aller guten Dinge sind zwei, nicht drei. Wer 50 Kilogramm Gewicht mit der Hand hebt, fühlt im Arme den gleichen Gegenzug (Muskelspannung). Ebenso treten bei allen unseren Maschinen und Bauwerken äussere Belastung und innere Spannung in Wechselwirkung. Wer vorwärts will, muss rückwärts seine Füsse gegen den Boden stemmen. Bei jedem Flüssigkeitsstrome äussert sich eine gleichwerthige Rückwirkung (sogen. Reaktion), die z. B. bei den Turbinen Bewegung veranlasst. Dieselbe Kraft, welche das Geschoss im Geschützrohr vorwärts treibt, bewegt letzteres rückwärts. Das erdwärts wirkende Gewicht des Bauwerks, der Brücke, der Maschine, muss durch den aufwärts wirkenden Gegendruck des Grundbaues (Fundamentes) zur Ruhe gebracht werden.

So liessen sich noch unzählige Beispiele aus dem Kreise unserer Beobachtung für das Gesetz der Wechselwirkung aufzählen.

Nur noch eine dem Wechselwirkungsgesetze entstammende, in den letzten Jahren für die Technik fruchtbringende Erkenntniss sei hier kurz angedeutet.

Soll ein Körper in einer bestimmten Richtung bewegt werden, so muss ein anderer dem Zwecke entsprechend eingerichteter Körper ihn führen. Demgemäss ent-

spricht der Schraubenspindel die Schraubenmutter, dem Zapfen (der Welle oder Achse) das Zapfenlager, dem Kolben (der Dampfmaschine oder Pumpe) der Cylinder, den Rädern des Eisenbahnwagens das Schienengleis.

Diese ebenfalls dem Gesetze der Wechselwirkung entsprechende Folgerung diente Reuleaux als Grundlage seines geistvoll aufgeführten, insbesondere den Maschinenwissenschaften wichtigen Lehrgebäudes der Kinematik. (Siehe unten §§ 146 u. ff., sowie auch meine Maschinenwissenschaften.)

Von der Wechselwirkung der Kräfte (bezw. der Körper) handelt auch das so ungemein wichtige Newton'sche Gravitationsgesetz (§ 137).

§ 9.

Gleichgewicht. Wenn nun ein Körper unter der Einwirkung von Kräften seinen Zustand (der Bewegung oder der Ruhe) dennoch nicht verändert, so halten die Kräfte sich das Gleichgewicht. Das Streben zur Bewegungsänderung wird gegenseitig aufgehoben. Folglich ist das Ergebniss (Resultat, die Resultirende) der thatsächlich wirkenden Kräfte gleich Null.

Bei einem auf einer Grundfläche ruhenden oder an einem Faden hängenden Körper halten sich das abwärts wirkende Gewicht und die aufwärts wirkende Gegenkraft (Grundflächendruck, bezw. Fadenspannung) das Gleichgewicht. Sobald man jedoch die Grundfläche entfernt oder den Faden durchschneidet, ist das Gleichgewicht gestört, der Körper nimmt in der Richtung des Fallbestrebens eine beschleunigte Bewegung an, „er fällt".

Dieser Satz vom Gleichgewichte gilt auch für einen in Bewegung begriffenen Körper.

An einem Wagen, welcher in einem Eisenbahnzuge sich gleichförmig fortbewegt, müssen die äusseren auf ihn einwirkenden Kräfte sich im Gleichgewicht halten. Alle Kräfte, die Zugkraft P des vorangehenden Wagens, welche die Bewegung fördert, dann die Zugkraft des nachfolgenden Wagens, dazu der Reibungswiderstand W an den Schienen, der Luftwiderstand L, welche der Bewegung entgegenwirken; drittens das nach unten wirkende Gewicht G, dazu der nach oben wirkende Gegendruck D der Schienen, müssen einander aufheben. Ueberhaupt wird bei unseren technischen Einrichtungen (Maschinen u. s. w.) in den weitaus meisten Fällen auf solchen Gleichgewichtszustand (Beharrungszustand) hingezielt. So dass meistens nur bei dem An- bezw. Endlaufe der Maschinen die treibenden, bezw. widerstehenden Kräfte das Uebergewicht haben.

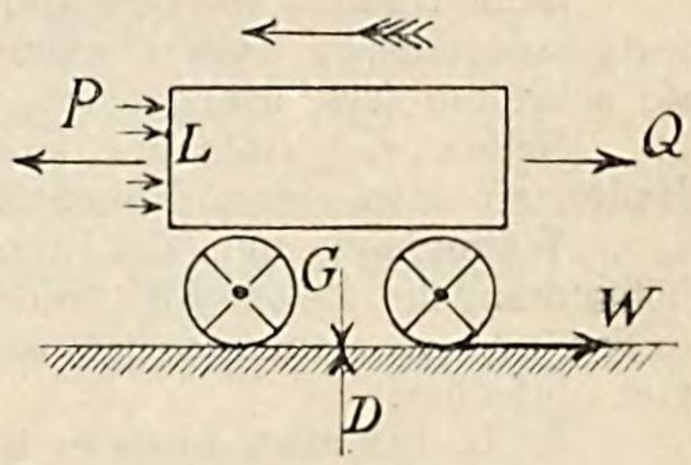


Fig. 7.

§ 10.

Eintheilung der Mechanik.

Dynamik. Statik. In Bezug auf den Gleichgewichtszustand pflegt man wohl die Mechanik in Dynamik und Statik einzutheilen. Man versteht dann unter

Dynamik die Lehre vom Uebergewicht der Kräfte und
Statik die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte.

Da unter dem Einflusse von Kräften, die sich im Gleichgewicht halten, gleichförmige Bewegung bezw. Ruhe, in jedem anderen Falle beschleunigte Bewegung eintritt, so könnte man noch zutreffender die Bewegungslehre eintheilen in

die Lehre von den gleichförmigen Bewegungen und von der Ruhe

und in

die Lehre von den ungleichförmigen Bewegungen.

Bei dieser Eintheilung würde man zum mindesten den Fremdwörtern aus dem Wege gehen, in deren Einandergegenüberstellung ohnehin eine gewisse Unklarheit

liegt, weil dieselben dem Zwecke, einen scharfen wissenschaftlichen Gegensatz auszudrücken, durchaus nicht entsprechen. Denn es bedeuten

Dynamik = Kraftlehre (Dynamis, die Kraft),
Statik = Gleichgewichtslehre (Statikos, zum Stillstehen bringend).

Als Begründer der Statik könnte schon Archimedes (287—212 vor Chr.), dagegen als Begründer der „neuen Wissenschaft", nämlich der Dynamik müsste wohl Galilei (1564—1642) angesehen werden.

Im Folgenden ist, aus den angeführten Gründen, auf eine Eintheilung der Mechanik in Dynamik und Statik kein Gewicht gelegt, vielmehr die Statik als ein besonderer Fall der Dynamik aufgefasst.

In der That lässt sich mit Hülfe des folgenden Satzes von d'Alembert (1717 bis 1783) auch umgekehrt jede Aufgabe der Dynamik in eine solche der Statik verwandeln,

Halten sich die auf die Masse m einwirkenden Kräfte nicht das Gleichgewicht: ist vielmehr nach einer bestimmten Richtung die Beschleunigung p vorhanden, so füge um das Gleichgewicht herzustellen, die dieser Beschleunigung entsprechende Kraft $P = mp$ in entgegengesetzter Richtung hinzu und behandele die Aufgabe ganz nach den Grundsätzen der Statik (Gleichgewichtslehre).

Mechanik der Körper.

Das Bewegungsgesetz eines Körpers ist genau genommen erst bekannt, wenn dasselbe für jeden einzelnen Punkt desselben ermittelt wurde, deshalb wesentlich bedingt durch die Aggregatform: den festen, tropfbarflüssigen und gasförmigen Zustand des Körpers.

Sehr verwickelte Bewegungsvorgänge zeigen z. B. die einzelnen Theilchen eines fortgeschleuderten Stabes, einer ausgegossenen Flüssigkeit, einer entfesselten Gasmasse: sie schreiten fort, drehen sich, verschieben sich gegeneinander.

Schon viel einfacher sind die Bewegungen der Theilchen eines fortrollenden Rades, eines in einem Rohre fortgeleiteten Flüssigkeitsstromes.

Wenngleich nun die Bewegungslehre die verwickeltesten Bewegungsvorgänge zu behandeln, die Bewegung eines jeden Punktes des sich bewegenden Körpers zu verfolgen und zu ermitteln hat, so gestaltet sich meistens im besonderen die Aufgabe sehr viel einfacher.

Z. B. bei allen unseren technischen Vorkehrungen, auf die wir ja insbesondere unsere Lehre anzuwenden haben, ist gerade das Streben darauf gerichtet, jede Willkür in der Bewegung auszuschliessen.

Es werden schon aus diesem Grunde die Bewegungserscheinungen an solchen technisch vorbereiteten, gleichsam eingezwängten Körpern wesentlich weniger verwickelt und es genügt in vielen Fällen nur die Bewegung eines Punktes oder einer beschränkten Anzahl von Punkten zu verfolgen.

Mechanik des materiellen Punktes.

In vielen Fällen, in denen es sich nur um eine fortschreitende Bewegung handelt (nicht um Drehbewegungen oder um Formveränderungen, also gegenseitige Verschiebungen der einzelnen Theilchen des Körpers, wie z. B. die sog. Festigkeitslehre berücksichtigt) genügt es, das Bewegungsgesetz eines einzigen Punktes im Körper (des Massenmittelpunktes, Schwerpunktes), der dann gleichsam als Inbegriff des ganzen Körpers anzusehen ist, anzugeben.

Mechanik des mathematischen Punktes und Körpers oder Phoronomie.

Noch einfacher gestaltet sich das Bewegungsgesetz, wenn selbst auf die Masse des Punktes keine Rücksicht zu nehmen ist.

So spricht man ja auch im gewöhnlichen Leben von der Bewegung eines Truppenkörpers, von der Flugbahn eines Geschosses, von den Bahnen der Himmelskörper, ohne an die hierbei bewegte Masse zu denken.

Die Kinematik kann als ein besonderer Zweig der Phoronomie angesehen werden.

In allen Fällen ist die Bahn eines Punktes entweder:

geradlinig oder krummlinig,

und die Bewegung entweder:

gleichförmig oder ungleichförmig.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, der Bewegung des Punktes, und gehen dann Stufe für Stufe zu den schwierigeren Aufgaben über.

Die Hauptabtheilungen, die demnach der Reihe nach zu behandeln wären, sind:

Erster Haupttheil: Mechanik des Punktes.

Erster Abschnitt: Mechanik des geometrischen Punktes (Phoronomie).
Zweiter Abschnitt: „ „ materiellen Punktes.

Zweiter Haupttheil: Mechanik der Körper.

Erster Abschnitt: Mechanik der geometrischen Körper (Phoronomie, Kinematik).
Zweiter Abschnitt: „ „ materiellen Körper.

Erste Abtheilung: Mechanik der festen Körper.
Zweite Abtheilung: „ „ flüssigen Körper.

Erstes Kapitel: „ „ tropfbarflüssigen Körper (Wasser).
Zweites Kapitel: „ „ ausdehnbar flüssigen Körper (Luft).

ERSTER HAUPTTHEIL.

MECHANIK DES PUNKTES.

Erster Abschnitt.

Mechanik des geometrischen Punktes (Phoronomie).

I.

Einfache Bewegung.

A.

Gleichförmige Bewegung.

§ 11.

Geschwindigkeit. Weg. Gleichförmig heisst die Bewegung, wenn stetig in zwei aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten gleiche Räume (Strecken) durchlaufen werden.

Die zurückgelegten Wegesstrecken stehen dann in demselben Verhältnisse, wie die darauf verwendeten Zeiten und sind geradlinig.

Alle krummlinigen Bewegungen, selbst die gleichförmige Kreisbewegung sind zusammengesetzt aus gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegungen (§ 43).

Beispiel 1: Wird bei gleichförmiger Bewegung 1 m Weg in 1 Sek. zurückgelegt, so beträgt der Weg 3600 m in 1 Stunde und 1 mm in 0,001 Sekunde.

Mathematischer Ausdruck für das Bewegungsgesetz:

Es sei

s der Weg, zurückgelegt in t Zeiteinheiten (Sekunden),

dann ist

$c = \frac{s}{t}$ „ „ „ „ 1 Zeiteinheit (Sekunde).

Dieser Weg c in der Zeiteinheit heisst die Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit ist das Mass der Bewegung und kann aufgefasst werden als Zuwachs oder Zunahme des Weges während der Zeiteinheit.

Die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit lässt sich durch die Länge und Lage einer geraden Linie, welche mit einer Pfeilspitze versehen ist, darstellen.

Die Gleichung

$$\boxed{c = \frac{s}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots\

drückt das Gesetz der gleichförmigen Bewegung vollständig und auf die einfachste Weise aus, und genügt zur Lösung aller Aufgaben, welche sich auf diese Bewegungsart beziehen.

Ebenso gilt:

$$t = \frac{s}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$s = c \,.\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

In der letzten Form lässt sich die Gleichung so ausdrücken: Die gleichförmig zurückgelegte Wegesstrecke ist gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit und der auf den Weg verwendeten Zeit.

Als Masseinheit der Zeit soll im Folgenden überall da, wo nicht andere Bestimmungen getroffen werden, die Sekunde (Sek.), als Masseinheit des Weges das Meter (m) gelten.

Die erste Gleichung lässt sich auch schreiben

$$c = st^{-1},$$

oder nach den Bezeichnungen des C.-G.-S.-Systemes (§ 5)

$$c = CS^{-1}.$$

1 Sekunde ist der 86400te Theil eines mittleren Sonnentages. Jeder Punkt der Erdoberfläche bewegt sich gleichförmig in einem Kreise um die Erdachse. Die Dauer eines vollen Umlaufes ist beständig dieselbe und heisst 1 Sternentag. Die Sonnentage sind im Laufe des Jahres veränderlich. Der mittlere Sonnentag = 86400 Sek. Die auf dieses berechnete Mass bezogene Zeit heisst die „Mittlere Zeit“. Der Sterntag ist nur = 86164,09 Sek. mittlerer Zeit. — 1 Sonnentag (mittlerer Tag) = 1,002738 Sterntag. Seit Hipparch (150 vor Christi Geb.) hat der Sterntag um $^1/_{80}$ Sek. zugenommen. 1 Sonnentag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten; 1 Minute = 60 Sekunden.

Da alle Bewegungen, mit denen der Techniker zu thun hat, ja überhaupt alle in der Natur beobachteten Bewegungen nicht gleichförmig sind und die immerhin noch am meisten auf Gleichförmigkeit Anspruch machenden Bewegungen der Himmelskörper als krummlinige Bewegungen gar nicht hierher zu rechnen sind, so würden obige Gleichungen nur theoretischen, nicht praktischen Werth haben, wenn man dieselben nicht auch auf die ungleichförmigen Bewegungen anwenden könnte. Nur ist dann unter Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit, deren Bedeutung im Folgenden (§ 15) klargelegt wird, zu verstehen. Wie man die Gleichung auch schon auf die später behandelte Drehbewegung anwenden kann, wird an einigen Beispielen (§ 14) gezeigt werden.

Das durch Wort und Gleichung klargelegte Gesetz der gleichförmigen Bewegung lässt sich auch bildlich (graphisch), also durch Linien darstellen.

§ 12.

Bildliche Darstellung der gleichförmigen Bewegung.

Das Gesetz der gleichförmigen Bewegung ist dargestellt durch die Bezeichnung

$$\frac{c}{1} = \frac{s}{t},$$

welche geometrisch gedeutet, bekanntlich die Proportionalität zwischen vier Linien ausdrückt, von denen jede sich konstruiren lässt, wenn die anderen gegeben sind.

Um z. B. c zu konstruiren, trage (wie Fig. 8 zeigt) ein beliebiges Mass, welches als Einheit gelten soll, t mal auf einer Wagerechten (sogen. Zeitlinie), und s mal auf der im t^{ten} Theilstriche errichteten Senkrechten ab, verbinde den Anfangspunkt O der Zeitliniemit dem Endpunkte N der Senkrechten, so schneidet diese Verbindende, die sogen. Wegeslinie, von der im Theilstriche 1 errichteten Senkrechten die gesuchte Geschwindigkeit c ab.

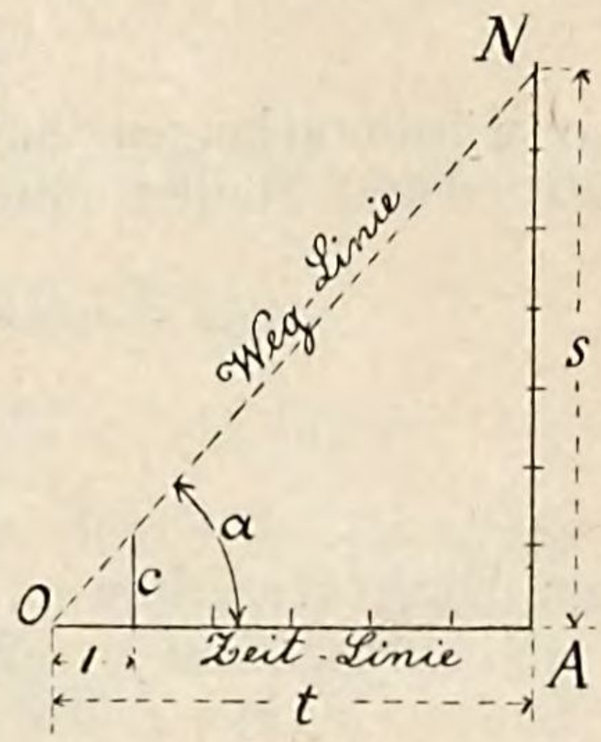


Fig. 8.

Trigonometrisch gedeutet ist:

$$c = \frac{s}{t} = \operatorname{tg} a,$$

d. h. die Geschwindigkeit ist gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Weglinie mit der Zeitlinie einschliesst.

Die Steilheit der Weglinie ist ein Merkmal für die Grösse der Geschwindigkeit

$$\text{für } a = 90 \quad \text{ist} \quad c = \operatorname{tg} 90 = \infty,$$
$$\text{„ } a = 0 \quad \text{„} \quad c = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Die Fig. 9 würde demnach folgenden Verlauf einer Bewegung darstellen:

Ein Punkt bewegt sich von der Station A bis B innerhalb t_1 Sekunden mit der Geschwindigkeit $c_1 = \operatorname{tg} a_1 = 0{,}58$ m. Auf der Station B bleibt er t_2 Sekunden lang liegen. Von B bis C gebraucht er t_3 Sekunden und hat eine gleichförmige Geschwindigkeit $c_3 = \operatorname{tg} a_3 = 1{,}73$ m. Von C ab nach D hin würde sogar die Geschwindigkeit $c_4 = \operatorname{tg} 90 = \infty$ sein, solche Bewegungsart als möglich vorausgesetzt.

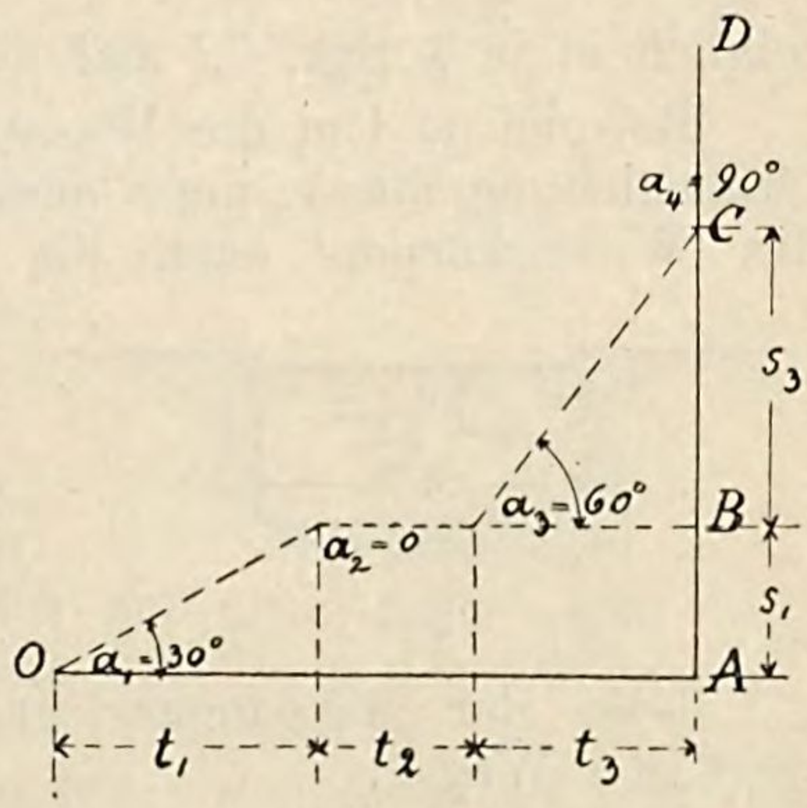


Fig. 9.

Nach der obigen Darstellungsweise hat man die Geschwindigkeit erst zu konstruiren oder zu berechnen.

Man kann die bildliche Darstellung aber auch so einrichten, dass man die Geschwindigkeit als unmittelbar gegebene Grösse in der Figur vor sich hat.

Das Gesetz der Bewegung war auch ausgedrückt durch die Gleichung

$$s = ct.$$

In dieser Form stellt s die Fläche eines Rechteckes dar, welches t zur Grundlinie und c zur Höhe hat.

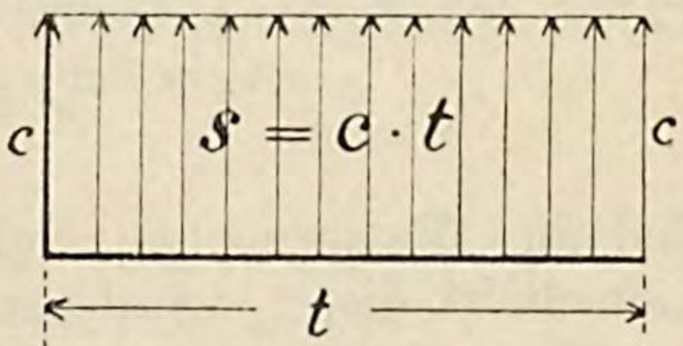


Fig. 10.

§ 13.

Beispiele für gleichförmige Bewegung.

Beispiel 2: Ein Personenzug hat eine Geschwindigkeit $c = 20$ m, sein Weg in 1 Stunde beträgt demnach

$$s = ct = 20 \,.\, 60 \,.\, 60 = 72000 \text{ m}$$
$$s = \frac{72000}{7500} = 9{,}6 \text{ Meilen.}$$

Beispiel 3: Wird angenommen als Geschwindigkeit des Schalls
$c = 333$ m,
des Lichtes rund $= 40\,000$ Meilen,
der Electricität auch $= 40\,000$ „
so würde gelangen eine Schallbewegung von der Sonne bis zu der 20 000 000 Meilen entfernten Erde in

$$t = \frac{s}{c} = \frac{20\,000\,000 \,.\, 7500}{333} = 450\,450\,000 \text{ Sek.}$$

$$= \frac{450\,450\,000}{60 \,.\, 60 \,.\, 24 \,.\, 365} = 14{,}284 \text{ Jahren,}$$

ein Lichtstrahl in

$$t = \frac{20\,000\,000}{40\,000} = 500 \text{ Sek.} = 8\,1/3 \text{ Min.}$$

Der elektrische Strom würde einen um den Erdäquator gelegten Kupferdraht,
wenn der Aequatorhalbmesser $r = 6\,377\,400$ m $= 850$ Meilen (§ 14),
also dessen Umfang . . . $2r\pi =$ . . . . 5338 „
gerechnet wird, in

$$t = \frac{s}{c} = \frac{5338}{40\,000} = \frac{1}{7{,}5} \text{ Sek.,}$$

folglich in je 1 Sek. 7,5 mal umkreisen.

Beispiel 4: Um die Wassermenge zu bestimmen, welche durch eine Grabenleitung fliesst, muss ausser dem Querschnitte $F = 2 \,.\, 1{,}5 = 3{,}0$ qm des Wasserkörpers auch die Geschwindigkeit c bekannt sein, mit welcher sich das Wasser im Mittel bewegt.

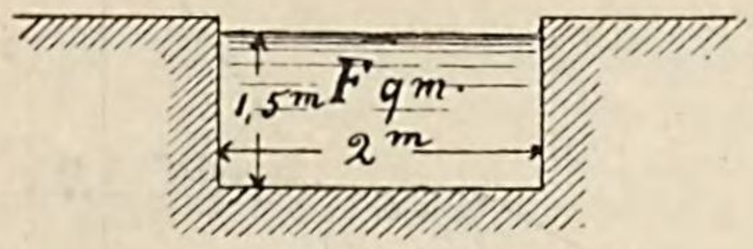


Fig. 11.

Man bestimmt c angenähert durch einen Schwimmer, vielleicht durch ein Stückchen Holz, welches durch einen eingeschlagenen Nagel so beschwert ist, dass es nur wenig aus dem Wasserspiegel hervortritt.

Legt der Schwimmer nach der Beobachtung einen genau abgemessenen Weg . . . . . $s = 30$ m
in . . . . . $t = 60$ Sek.,
zurück, so ist die gesuchte Geschwindigkeit

$$c = \frac{s}{t} = \frac{30}{60} = 0{,}5 \text{ m.}$$

Und die Wassermenge, welche in je einer Sekunde durch den Grabenquerschnitt fliesst, würde sein $Q = F \,.\, c = 3 \,.\, 0{,}5 = 1{,}5$ cbm.

Beispiel 5: Es soll ein Weg oder Stollen, oder Schacht AB von der Länge $s = 800$ m hergestellt werden. Die zugleich in A und B angestellten Arbeiter kommen

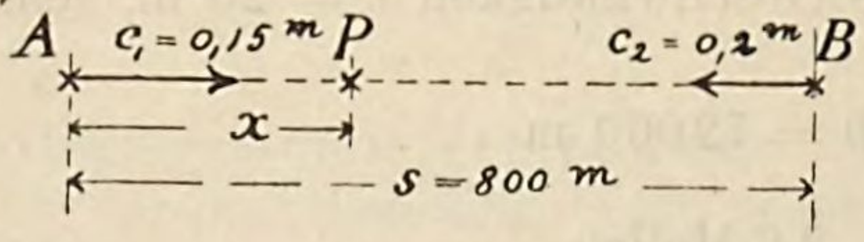


Fig. 12.

bezw. um $c_1 = 0{,}15$ m in 1 Tage,
und $c_2 = 0{,}2$ m „ 1 „
vorwärts (c_1 und c_2 beziehen sich also hier nicht auf 1 Sek., sondern auf 1 Tag).

a) Nach welcher Zeit t?
b) in welchem Abstande x von A treffen die Arbeiter aufeinander?
Es sei P der Punkt der Begegnung, dann ist:

$$x + (s - x) = s$$
$$c_1 t + c_2 t = s$$
$$t = \frac{s}{c_1 + c_2} = \frac{800}{0{,}35} = 2285{,}7 \text{ Tage.}$$
$$x = c_1 t = 0{,}15 \,.\, 2285{,}7 = 342{,}855 \text{ m.}$$

Beispiel 6: Ein Bote A (Fig. 13) legt in a Stunden b Meilen zurück; n Stunden nach seiner Abreise wird ihm B nach gesandt; B macht in e Stunden d Meilen; der Ausgangspunkt von B liegt q Meilen gegen den Ausgangsort von A zurück. Nach welcher Zeit t wird A von B erreicht? Der Zusammenstoss erfolge bei C, dann ist

$$s = \frac{b}{a} \cdot t$$
$$s + q = \frac{d}{e}(t - n) = \frac{d}{e} t - \frac{d}{e} n$$
$$\frac{b}{a} t = \frac{d}{e} t - \frac{d}{e} n - q$$
$$t \left(\frac{d}{e} - \frac{b}{a} \right) = \frac{d}{e} n + q$$
$$t \frac{ad - eb}{ae} = \frac{dn + eq}{e}$$
$$t = \frac{dn + eq}{ad - eb} a.$$

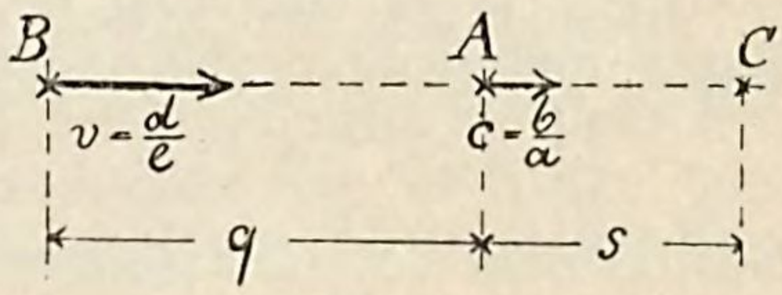


Fig. 13.

Die letzten beiden Aufgaben lassen sich auf noch andere ganz verschiedenartige Bewegungsvorgänge übertragen. Z. B. in der letzten Aufgabe sind A und B zwei Rotten Arbeiter, die einen Weg von B bis C herzustellen haben. A hat die gröbere, langsam voranschreitende, B die feinere, rascher fördernde Arbeit (Aufschütten von Steinschlag) auszurichten. Oder A und B haben eine rechteckförmige Bodenfläche urbar zu machen, A hat zu roden, B nur zu säubern und ebnen.

§ 14.

Beispiele für gleichförmige Drehbewegung.

Beispiel 7: Welche Geschwindigkeit c hat die gleichförmig sich fortbewegende Spitze eines Stundenzeigers, dessen Länge

$$r = 1 \text{ m}$$

beträgt?

Fig. 14.

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{12 \,.\, 60 \,.\, 60} = 0{,}0001454 \text{ m.}$$

Beispiel 8: Wäre die Zeigerlänge gleich dem Halbmesser des Erdäquators, also . . . . . $r = 6\,377\,400$ m,
und die Umlaufszeit . . . . . $= 24$ Stunden,
so würde die Spitze dieselbe Geschwindigkeit haben als ein Punkt des Erdäquators, nämlich:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2 \,.\, 6377400 \,.\, \pi}{24 \,.\, 60 \,.\, 60} = 463{,}8 \text{ m}.$$

Beispiel 9: Wäre die Zeigerlänge gleich der Entfernung der Erde von der Sonne, also . . . . . $r = 20\,000\,000$ Meilen,
und die Umlaufszeit . . . . . $= 365$ Tage,
so würde die Spitze dieselbe Geschwindigkeit haben, wie die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, nämlich:

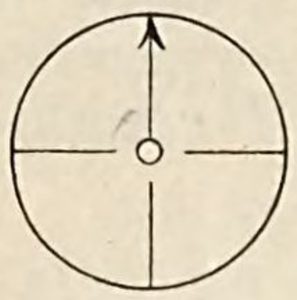


Fig. 15.

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2 \,.\, 20\,000\,000\,\pi}{365 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60} = 3{,}985 \text{ Meilen},$$

$$\sim 4 \text{ Meilen}.$$

Beispiel 10: Wäre die Zeigerlänge gleich dem Halbmesser eines Rades (Wasserrades, Zahnrades, Ankers einer Dynamomaschine), nämlich

$$r = 5 \text{ m}$$

und die Zahl der Umdrehungen des Rades

$$n = 3 \text{ in } 1 \text{ Minute},$$

so wäre die Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi n}{60} = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, \pi \,.\, 3}{60} = 1{,}57 \text{ m}.$$

Beispiel 11: Für $r = 1$ m und $n = 1$ in 1 Sek. wäre

$$c = 2 \,.\, 1 \,.\, \pi \,.\, 1 = 6{,}28 \text{ m}.$$

Beispiel 12: Ein $d = 2{,}0$ cm dickes, $L = 600$ m langes Förderseil soll auf eine cylindrische Seiltrommel, welche $D = 6$ m Durchmesser hat, aufgewickelt werden. Die Geschwindigkeit des sich aufwickelnden Seiles sei $c = 10$ m.

1. In welcher Zeit t wird das Seil aufgewickelt sein?
2. Wie viel Umdrehungen n hat die Trommel in 1 Minute zu machen?
3. Wie breit b muss die Trommel sein, wenn sie das ganze Seil aufnehmen soll und eine Seilwindung sich dicht an die andere legt?

Zu 1. $t = \frac{s}{c} = \frac{600}{10} = 60$ Sek. $= 1$ Minute.

Zu 2. $c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi n}{60} = \frac{2 \,.\, 3 \,.\, \pi \,.\, n}{60}$

$$n = \frac{60 \,.\, c}{2 \,.\, 3\pi} = \frac{60 \,.\, 10}{2 \,.\, 3\pi} = 31{,}8 \text{ in } 1 \text{ Minute}.$$

Zu 3. $D\pi \,.\, b = d^m \,.\, L$ (denn die Mantelfläche der Trommel muss gleich der Fläche sein, welche das lang hingestreckte Seil belegen würde).

$$6\pi b = 0{,}02 \,.\, 600$$

$$b = \frac{0{,}02 \,.\, 600}{18{,}85} = 0{,}6366\,\text{m} = 63{,}66\,\text{cm} = 636{,}6\,\text{mm}.$$

B.

Ungleichförmige Bewegung.

§ 15.

Mittlere und wirkliche Geschwindigkeit. Bei der ungleichförmigen Bewegung werden in je zwei aufeinander folgenden gleichen Zeittheilchen nicht gleiche Wege zurückgelegt, sondern es ändert sich die Geschwindigkeit unausgesetzt, sie nimmt bald zu, bald ab (kurz, sie ist in einem beständigen positiven und negativen Wachsen begriffen). Es kann deshalb bei ihr von einer Geschwindigkeit im allgemeinen nicht die Rede sein.

Vielmehr muss man hier streng unterscheiden eine mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit c_m während einer bestimmten Zeitdauer und

eine wirkliche oder wahre Geschwindigkeit v in einem bestimmten Zeitpunkte, oder während eines unendlich kleinen auf diesen Zeitpunkt folgenden Zeittheilchens.

Beide Arten von Geschwindigkeiten können wieder als Wegeslängen angesehen und mit Hülfe der obigen Gleichung der gleichförmigen Bewegung ausgedrückt werden.

Die mittlere Geschwindigkeit c_m der ungleichförmigen Bewegung ist diejenige unveränderte Geschwindigkeit, welche in derselben Zeit t den Weg s der ungleichförmigen Bewegung ergeben würde, demnach ausgedrückt durch die Gleichung der gleichförmigen Bewegung:

$$\boxed{c_m = \frac{s}{t}} \qquad \ldots\ldots\ldots\

derjenige Weg, welcher in der auf diesen Zeitpunkt folgenden Zeiteinheit zurückgelegt werden würde, wenn von diesem Zeitpunkte an die Bewegung eine gleichförmige wäre.

Die wirkliche Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte würde sich auch auffassen lassen als die mittlere Geschwindigkeit während des auf diesen Zeitpunkt folgenden sehr kleinen Zeittheilchens.

§ 16.

Beschleunigung. Das Bewegungsgesetz der gleichförmigen Bewegung war schon allein durch die sich beständig gleichbleibende Geschwindigkeit $\left(c = \frac{s}{t}\right)$ vollständig gegeben. Jedoch zur genauen Darstellung der ungleichförmigen Bewegung ist noch die sogen. Beschleunigung anzugeben.

Die Beschleunigung ist ganz allgemein diejenige veränderliche Grösse, welche ausdrückt, wie die Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte sich ändert. Sie giebt die Zunahme, den Zuwachs (+ oder —) der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke, z. B. am Ende der Zeit t, an.

Zwischen den Begriffen: Geschwindigkeit und Beschleunigung der ungleichförmigen Bewegung besteht folgender unverkennbarer Zusammenhang:

Die Geschwindigkeit v am Ende der Zeit t ist die Zunahme des Weges s in dem darauf folgenden Zeittheilchen.

Die Beschleunigung p am Ende der Zeit t ist die Zunahme der Geschwindigkeit v in dem darauf folgenden Zeittheilchen.

Eine Abnahme kann als eine negative Zunahme angesehen werden.

Näheres über die ungleichförmige Bewegung wird in der höheren Mechanik gelehrt.

§ 17.

Zusammenstellung

einiger bemerkenswerther mittlerer bezw. vortheilhafter Geschwindigkeiten.

Es sei hier bemerkt, dass die Kenntniss bewährter mittlerer Geschwindigkeiten in der Technik sehr wichtig, ja unentbehrlich ist.

0,1 m	Schlitten der Metallhobelmaschinen.
0,2 m	Starker Eisendraht beim Ziehen.
0,24 m	Baggerkette der Flussbagger.
0,25 m	Kolben der Wassersäulenmaschinen.
0,3 m	Kolben der Wasserpumpen.
0,6 m	Mensch am Göpel.
0,6 m	Ochse am Göpel.
0,8 m	Kurbelgriff beim Menschenhaspel.
1,0 m	Gestänge der Fahrkünste.
1,0 m	Fördertonne ohne Schachtleitung.
1,0 m	Kolben der Cylindergebläse.
1,0 m	Pferd im Schritt.
1,0 m	Wasser im Saugrohr der Pumpen.
1,2 m	Wasser im Steig- und Druckrohr der Pumpen.
1,3 m	Kolben der Dampfmaschine.

1,3	m	Feiner Eisendraht beim Ziehen.
1,4	m	Soldat auf dem Marsche bei 0,8 m Schrittgrösse.
1,5	m	Umfang eines grösseren oberschlächtigen Wasserrades.
1,5	m	Fussgänger, unbelastet, auf wagerechtem Wege.
1,5	m	Grobeisenwalzen-Umfang.
1,5	m	Schienenwalzen-Umfang.
1,7	m	Eisenblechwalzen-Umfang.
1,8	m	Kettendampfer im toten Wasser.
2,0	m	Wasserrad-Umfang für Förderung (Kehrrad).
2,0	m	Pferd im Trabe.
2,5	m	Sägeblatt einer Gattersäge.
3,0	m	Fördertonne (mit Schachtleitung).
3,0	m	gewöhnlicher Wind.
3,5	m	Leuchtgas in den Röhren.
4,0	m	Flussdampfer im toten Wasser.
4,5	m	Pferd im Galopp.
5,0	m	Seedampfer.
5,0	m	Fahrgestelle (Menschenförderung) mit Schachtleitung.
6,0	m	Fördergestell mit Schachtleitung.
6,5	m	Wind, günstig für Windmüller.
8,0	m	Mühlstein-Umfang.
9,81	m	Freier Fall am Ende der ersten Sekunde.
10,0	m	Wind in den Leitungsröhren der Gebläse.
10,0	m	Fördergestell mit Leitung (höchstens).
12,0	m	Güterzug der Eisenbahn.
12,0	m	Englisches Rennpferd.
15,0	m	Personenzug.
17,0	m	Büchsen der Rohrpost in Berlin.
18,0	m	Brieftaube im Fluge.
20,0	m	Wasserdampf in den Leitungsröhren der Dampfmaschinen.
20,0	m	Seil der Drahtseiltransmission.
20,0	m	Schnellzug.
25,0	m	Schnellzug (höchstens), Blitzzug.
25,0	m	Lederriemen der Riementransmissionen (30 m höchstens).
40,0	m	Kreissäge für Holz und heisses Eisen im Umfange.
60,0	m	Stäbe der Carr'schen Schleudermühle.
333,0	m	Schall in der Luft.
464,0	m	Erdäquator-Umfangsgeschwindigkeit.
$3 . 10^4$	m	Erde auf ihrer Bahn um die Sonne.
$3 . 10^8$	m	Licht und Electricität.

§ 18.

Gleichförmig veränderte Bewegung.

Eine besondere Art der ungleichförmigen Bewegung ist die gleichförmig veränderte.

Da letztere bei zahlreichen natürlichen und künstlichen Vorgängen, z. B. bei freifallenden Körpern, beim An- und Endlaufe unserer Maschinen auftritt, so soll sie im Folgenden besonders behandelt werden.

Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Beschleunigung p eine konstante Grösse und kann kurzweg bezeichnet werden als die Geschwindigkeitszunahme in einer Sekunde.

Bei der verzögerten Bewegung ist die Beschleunigung p als negative Grösse einzuführen.

§ 19.

Mathematischer Ausdruck für das Bewegungsgesetz.

Ist $p \,.\, 1$ die Geschwindigkeitszunahme in 1 Sekunde,
also $p \,.\, t$ „ „ „ t Sekunden,
und c „ Anfangsgeschwindigkeit, d. i. die bei Beginn der Zeit t bereits vorhandene, gleichsam mitgebrachte Geschwindigkeit, so ist die

Endg. nach t *Sek.* = *Anfangsg.* + *Geschwindigkeitsz. in* t *Sek.*

oder: $v = c + p \,.\, t.$

Setzt man beiläufig gesagt in dieser Gleichung

Kapital anstatt Geschwindigkeit,
Jahre „ Sekunden,

so stellt die Gleichung

Endkapital = *Anfangskapital* + *Kapitalzunahme in* t *Jahren*

die Grundgleichung der Zinsrechnung dar, wenn unter Kapitalzunahme die einfachen Zinsen in 1 Jahre verstanden werden.

Mit Hülfe obiger Gleichung lässt sich bestimmen, wie der Punkt sich am Ende der Zeit t bewegt.

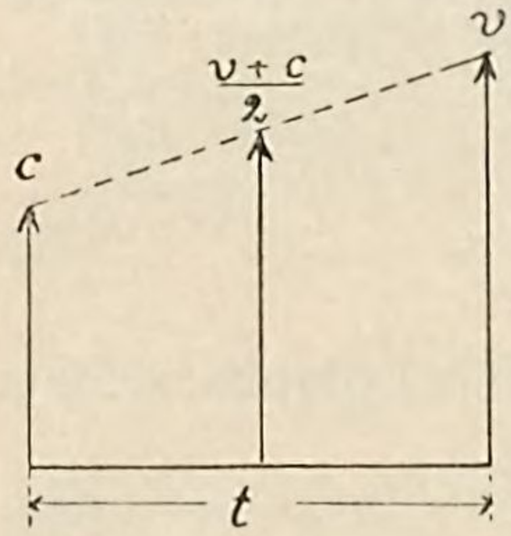


Fig. 16.

Um nun auch festzustellen, wo der Punkt sich bewegt, ist es erforderlich, auch die Gleichung für den während der Zeit t zurückgelegten Weg (s) zu ermitteln.

Allgemein war:

Weg = *Mittlere Geschwindigkeit* × *Zeit.*

Folglich ist:

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot t,$$

da der Mittelwerth von v und c offenbar das arithmetische Mittel sein muss, was auch ein Blick auf obenstehende Figur zeigt.

Die beiden letzten Gleichungen

$$v = c \pm pt \qquad \ldots\ldots\ldots 6$$

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t \qquad \ldots\ldots\ldots 7$$

drücken das Gesetz der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegung vollständig und auf die einfachste Weise aus.

§ 20.

Zusammenstellung von Gleichungen,

welche sich aus diesen beiden Gleichungen entwickeln lassen, und welche die Auflösungen bestimmter Aufgaben erleichtern.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

$$v = c + pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$p = \frac{v - c}{t} \quad \ldots \text{ nach Gleichung } 6$$

$$t = \frac{v - c}{p} \quad \ldots \text{ „ } \quad \text{ „ } \quad 6$$

$$s = \frac{v + c}{2} t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} \quad \text{nach Gleichung } 6 \text{ u. } 7 \quad \ldots \quad 8$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2ps} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

Die Gleichung 11 zählt zu den wichtigsten Gleichungen der Mechanik.

Gleichförmig verzögerte Bewegung.

Es ist in obige Gleichungen $-p$ anstatt $+p$ einzusetzen.

$$v = c - pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12$$

$$-p = \frac{v - c}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13$$

$$t = \frac{v - c}{-p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14$$

$$s = \frac{v + c}{2} t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

$$s = ct - \frac{pt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16$$

$$s = \frac{v + c}{2} \cdot \frac{v - c}{-p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17$$

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18$$

$$v = \sqrt{c^2 - 2ps} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19$$

Bewegung „frei fallender“ Körper.

Es ist in den Gleichungen 6 bis 11 zu setzen: $g = 9{,}81$ m anstatt p.
Wird ausserdem noch $c = 0$ angenommen, so ist

$$v = gt \quad \ldots \text{ nach Gleichung } 6 \quad \ldots\ldots \quad 20$$

$s = \frac{v}{2} t$ . . nach Gleichung 7 21

$s = g \frac{t^2}{2}$ . . „ „ 8 22

$s = \frac{v^2}{2g}$ . . „ „ 10 23

$v = \sqrt{2gs}$. „ „ 11 24

Man nennt $s = \frac{v^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe.

Bewegung aufwärts geworfener Körper.

Es ist in den Gleichungen 6 bis 11 $-g$ anstatt p zu setzen:

$v = c - gt$. nach Gleichung 6 25

$s = ct - g \frac{t^2}{2}$ „ „ 8 26

$s = \frac{c^2 - v^2}{2g}$ „ „ 10 27

$v = \sqrt{c^2 - 2gs}$ „ „ 11 28

Die Steigzeit t und die Steighöhe h aufwärts geworfener Körper ergiebt sich für

$v = 0$:

$t = \frac{c}{g}$ . . nach Gleichung 25 29

dann folgt:

$T = 2t = \frac{2c}{g}$ 30

als Dauer für die Auf- und Abwärtsbewegung zusammengenommen.

$h = \frac{c}{2} t$ . . . nach Gleichung 7 31

$h = \frac{c^2}{2g}$ . . . „ „ 10 32

Setzt man in den obigen Gleichungen

$p = 0$,

so folgt die Gleichung der gleichförmigen Bewegung

$s = ct$ . . . nach Gleichung 8.

Letztere ist demnach anzusehen als ein besonderer Fall der ungleichförmigen Bewegung.

§ 21.

Bildliche Darstellung der ungleichförmigen Bewegung.

Die Linie $ABCDEFG$ stellt eine ungleichförmige Bewegung dar. Die Geschwindigkeiten nach Ablauf der Zeiten $t_1\, t_2\, t_3$ . . . werden ausgedrückt durch die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Linie an diesen Stellen gegen die Zeitlinie (siehe oben Seite 15).

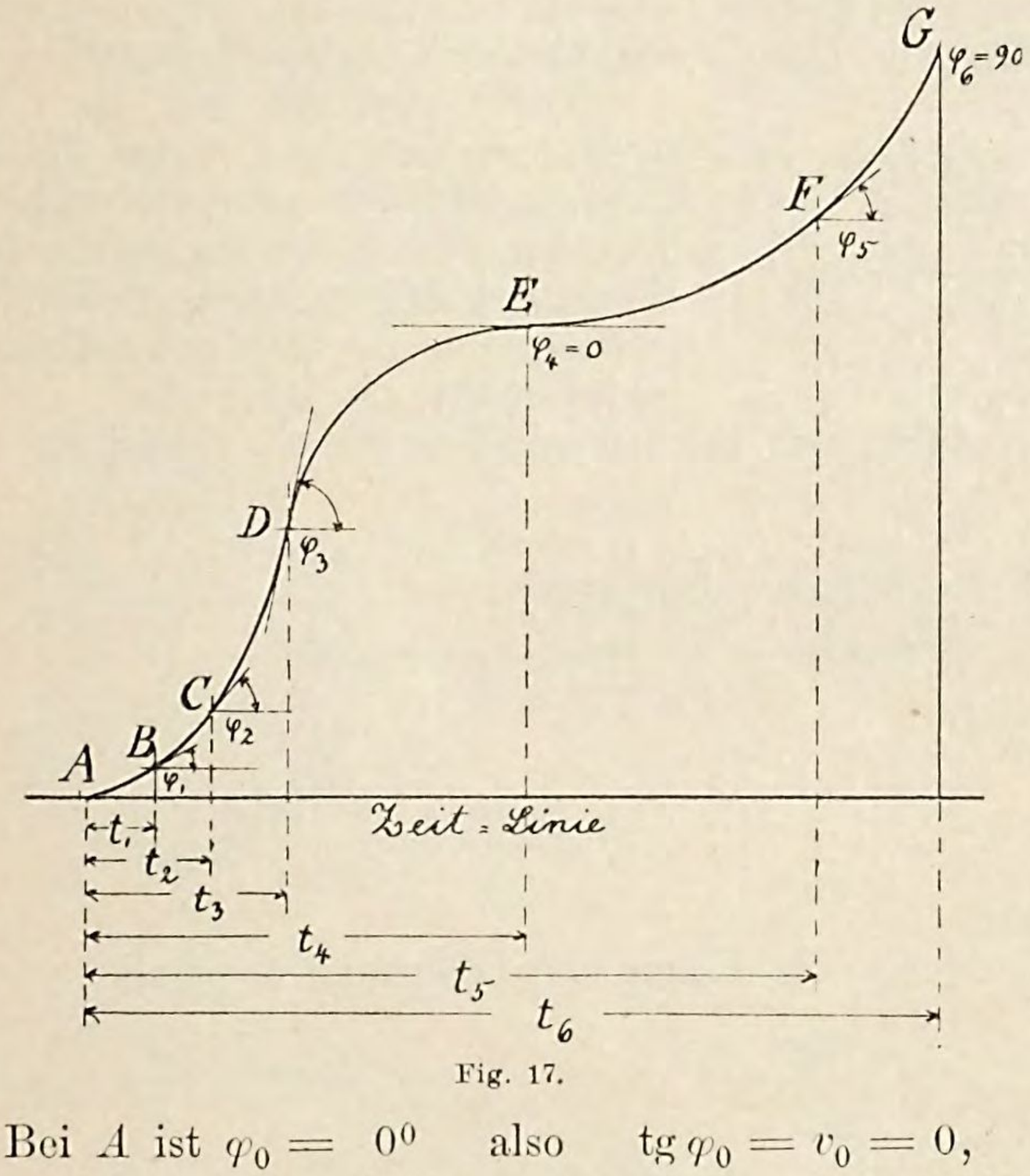


Fig. 17.

Bei	A	ist	$\varphi_0 = 0^0$	also	$\operatorname{tg}\varphi_0 = v_0 = 0$,
„	B	„	$\varphi_1 = 30^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_1 = v_1 = 0{,}5774$,
„	C	„	$\varphi_2 = 45^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_2 = v_2 = 1{,}000$,
„	D	„	$\varphi_3 = 80^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_3 = v_3 = 5{,}671$,
„	E	„	$\varphi_4 = 0^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_4 = v_4 = 0$,
„	F	„	$\varphi_5 = 45^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_5 = v_5 = 1{,}0$,
„	G	„	$\varphi_6 = 90^0$	„	$\operatorname{tg}\varphi_6 = v_6 = \infty$.

Während der Zeit t_3 ist die Bewegung beschleunigt.
„ „ „ von t_3 bis t_4 ist die Bewegung verzögert.

Am Ende der Zeit t_4 ist die Geschwindigkeit Null; dann tritt wieder Beschleunigung ein und am Ende der Zeit t_6 ist die Geschwindigkeit sogar unendlich gross.

Mit Hülfe dieser bildlichen Darstellung lässt sich die Geschwindigkeit in den einzelnen Zeitabschnitten (als trigonometrische Funktion) berechnen.

Es lässt sich jedoch auch ein Bild entwerfen, in dem ohne Weiteres die Geschwindigkeiten in den einzelnen Zeitpunkten als Linien dargestellt sind.

Solch ein Bild soll für die gleichförmig veränderte Bewegung entworfen werden.

§ 22.

Der Flächeninhalt des Trapezes (Fig. 18) ist $\left(\frac{c+v}{2}\right)t$, stellt demnach bildlich den Weg dar, welcher durch die Formel 4

$$s = \frac{v+c}{2}t$$

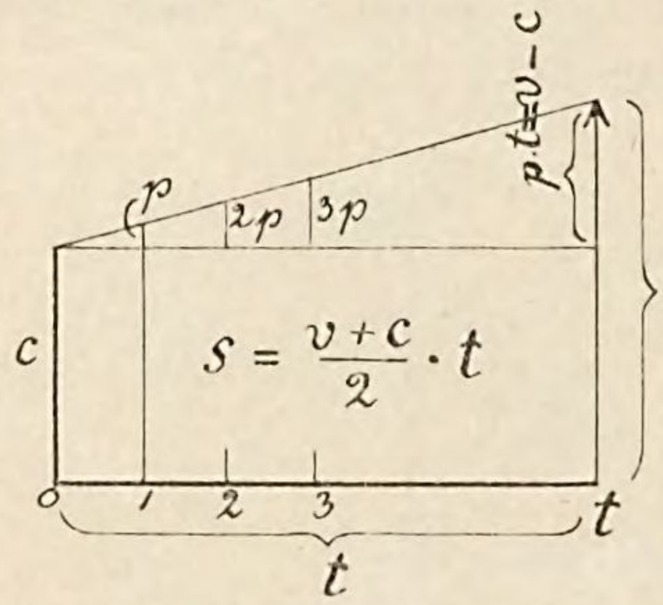


Fig. 18.

mathematisch ausgedrückt ist.

Theilt man die Zeitlinie t in t gleiche Theile, errichtet im ersten Theilstriche das Loth, zieht durch den Endpunkt von c eine Parallele zur Zeitlinie, so stellt sich, wie aus der Figur ersichtlich, auch p, die Geschwindigkeitszunahme in einer Sekunde, oder die Beschleunigung, als Linie dar.

Ebenso ergiebt sich aus unserm Trapeze die Beziehung

$$p \,.\, t = v - c,$$

woraus auch die obigen Gleichungen:

$$p = \frac{v-c}{t},$$

und:

$$t = \frac{v-c}{p},$$

sofort erfolgen.

Auch ist durch das Trapez die Gleichung 8, nämlich

$$s = ct + \frac{pt^2}{2}$$

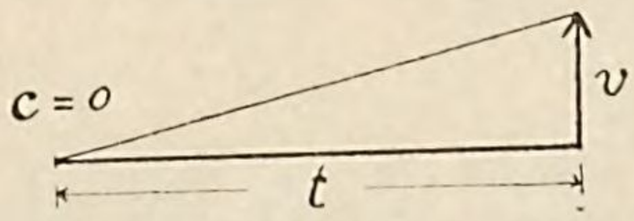


Fig. 19.

dargestellt, wenn man dasselbe in das Rechteck ct und in das rechtwinkelige Dreieck $\frac{pt}{2} \cdot t$ zerlegt denkt.

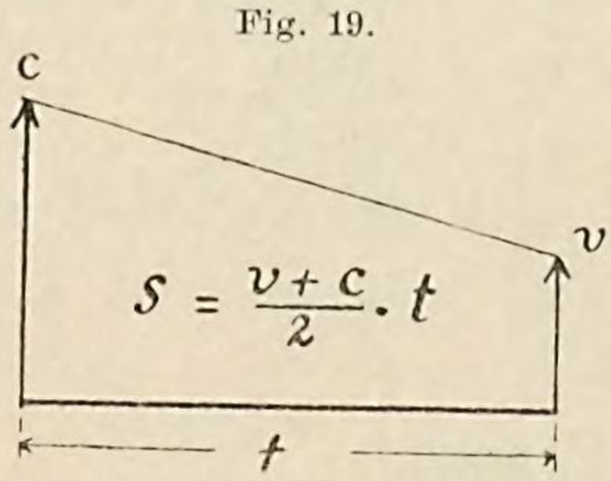


Fig 20.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ ist durch das Dreieck (Fig. 19), die gleichförmig verzögerte Bewegung durch das Trapez (Fig. 20) mit der nach dem Ende der Zeitlinie hin abfallenden Linie dargestellt.

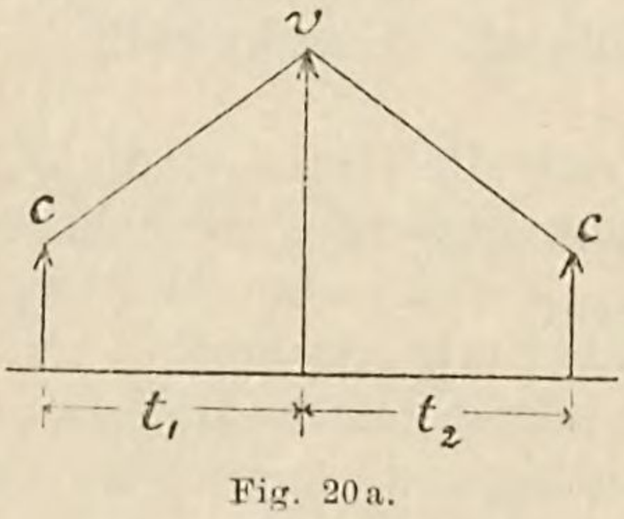


Fig. 20a.

Die nebenstehende Figur würde einen Bewegungsvorgang darstellen, bei welchem eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (während des Zeitabschnittes t_1) mit einer gleichförmig verzögerten (während des Zeitabschnittes t_2) abwechselt.

Schwingungen. Anstatt, wie bislang geschah, die Geschwindigkeiten in den verschie-

denen Zeitpunkten anzugeben, könnte man sie auch in den verschiedenen Punkten des zurückgelegten Weges aufzeichnen.

So wird z. B. die mit veränderlicher Geschwindigkeit (mit Beschleunigung und Verzögerung) ausgeführte wiederkehrende Bewegung des Kolbens einer Pumpe, einer Dampfmaschine, überhaupt eines hin- und herschwingenden Punktes durch die Wellenlinie $ABCDE$ der Fig. 21 dargestellt.

Die Bewegung ist beschleunigt während des Weges AB, verzögert während des Weges BC, dann tritt Rückkehr, also entgegengesetzte Bewegung ein.

In den Punkten A und C ist die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich = Null, aber die Geschwindigkeitszunahme (Beschleunigung $\pm$) am grössten. Dagegen in der Mitte des Weges, in den Punkten B und D ist die Geschwindigkeit am grössten, aber die Beschleunigung am kleinsten, nämlich = Null.

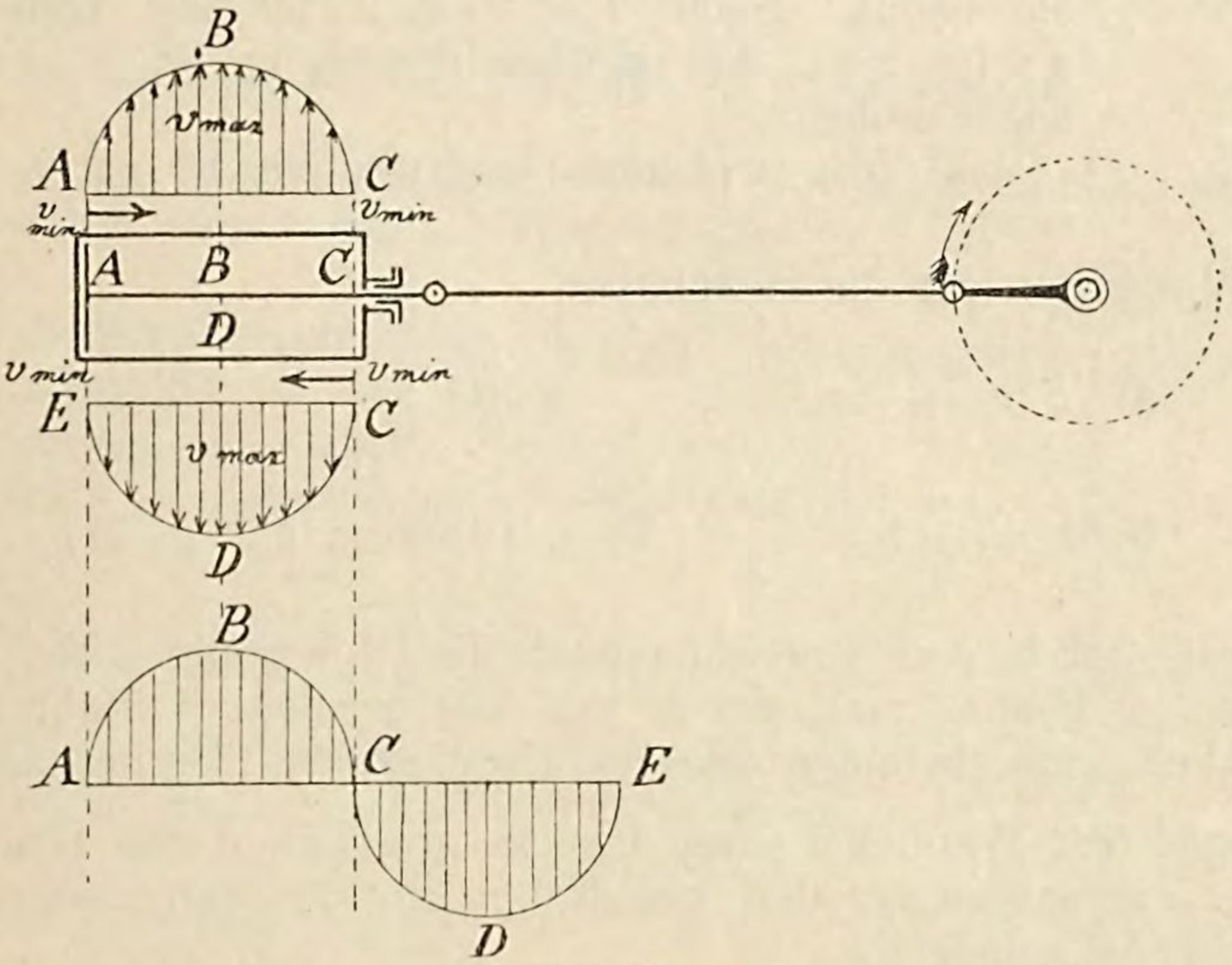


Fig. 21.

§ 23.

Aufgaben der ungleichförmigen Bewegung.

Beispiel 13: Ein Eisenbahnzug (ein Förderkorb, ein Punkt am Umfange eines Schwungrades) hat eine Anfangsgeschwindigkeit . . $c = 0$,
eine konstante Beschleunigung $p = 0{,}5$ m,
und bewegt sich . . . . $t = 24$ Sek.
fort; wie gross ist:

a) seine Endgeschwindigkeit v?
b) der durchlaufene Weg s?

a) $v = c + pt = 0 + 0{,}5 \,.\, 24 = 12$ m

b) $s = ct + \frac{pt^2}{2} = 0 + 0{,}5 \frac{24^2}{2} = 144$ m.

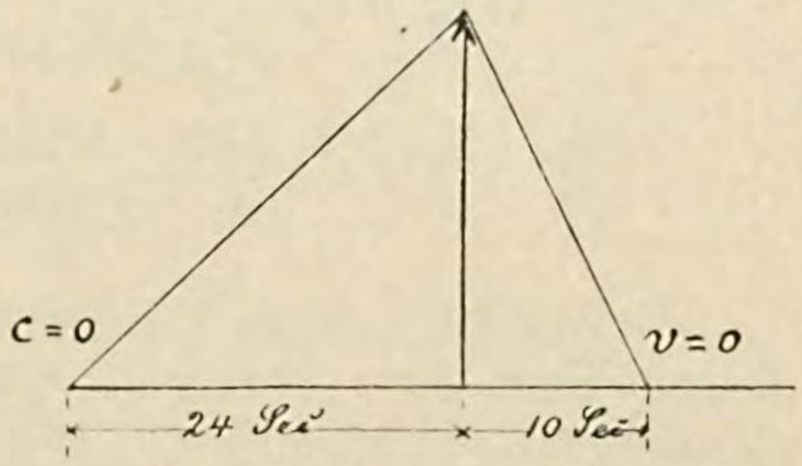


Fig. 22.

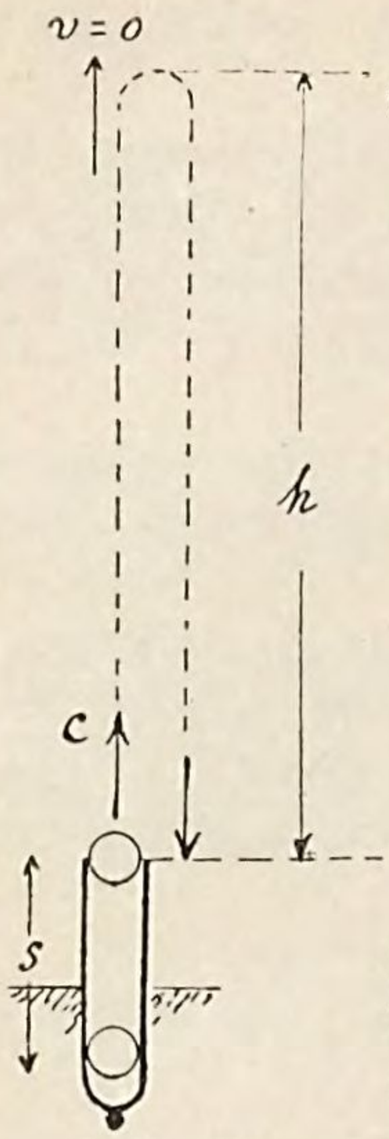


Fig. 23.

Beispiel 14: Derselbe Zug soll durch Bremsen in 10 Sek. zum Stillstand gebracht werden,

a) wie gross muss die Verzögerung (negative Beschleunigung) sein?

b) welchen Weg legt er während dieser Verzögerungsperiode zurück?

a) $v = c - p \,.\, t$

$0 = 12 - p \,.\, 10$

$p = 1{,}2$ m.

b) $s = \frac{v + c}{2} t = \frac{0 + 12}{2} \cdot 10 = 60$ m.

Beispiel 15: Eine Kanonenkugel wird senkrecht aufwärts abgefeuert. Nach $T = 2t = 2 \,.\, 50$ Sek. trifft sie unten wieder ein. Als Erdbeschleunigung sei $g =$ rund 10 m angenommen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit wurde sie abgesandt?

b) Wie gross war die Steighöhe?

a) $c = \frac{g\,T}{2} = \frac{10 \,.\, 100}{2} = 500$ m (n. Gl. 30).

b) $h = \frac{c}{2} t = \frac{500}{2} \cdot 50 = 12\,500$ m („ „ 31).

Würde durch den Luftwiderstand die Bewegung nicht wesentlich verzögert, so könnte man durch das angewendete Verfahren die Geschwindigkeit ermitteln, mit welcher ein Geschoss das Geschützrohr verlässt.

Beispiel 16: Wenn bei jener Kanone die Länge des Laufes beträgt $s = 14$ m, wie nahezu bei den von Krupp für die italienische Regierung im Jahre 1856 gelieferten,

a) welche Beschleunigung p erfuhr sie?

b) wie viele Sekunden t verweilte sie im Rohre?

a) $v = \sqrt{c^2 + 2ps}$ (also für $c = 0$)

$p = \frac{v^2}{2 \,.\, s} = \frac{500^2}{2 \,.\, 14} =$ etwa 9000 m.

b) $s = \frac{c + v}{2} t$

$t = \frac{2\,s}{v} = \frac{2 \,.\, 14}{500} = 0{,}056$ Sek.

Beispiel 17: Eine Fördertonne wird an einem Seile in einem Schachte, dessen Tiefe ist . . . . . $s = 300$ m gleichförmig mit einer Geschwindigkeit . . . . . $c = 2$ m aufgezogen.

a) In welcher Zeit t legt sie den Weg von dem Gesenk (Schachttiefsten) bis zur Hängebank (Schachtmündung) zurück?
b) Nach welcher Zeit t_1 würde sie wieder unten ankommen, wenn sie nach dem Zerreissen des Seiles von der Hängebank hinunterfiele?
c) Mit welcher Geschwindigkeit schlüge sie unten auf?

Es soll in allen Fällen vorausgesetzt werden, dass nirgends ein Anstoss erfolgt, dass kein Luftwiderstand vorhanden ist und die Fallbeschleunigung g rund 10 m beträgt.

$$\text{a)}\quad t = \frac{s}{c} = \frac{300}{2} = 150 \text{ Sek.}$$

$$\text{b)}\quad s = \frac{g t_1^{\,2}}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 300}{10}} = 7{,}746 \text{ Sek.}$$

$$\text{c)}\quad v = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \,.\, 10 \,.\, 300} = 77{,}46 \text{ Sek. } m.$$

Beispiel 18: Welche Tiefe x hat ein Schacht, wenn das Aufschlagen eines lothrecht in denselben hinabfallenden Steines nach . . . . . $t = 20$ Sek. gehört, und die Schallgeschwindigkeit $c = 333$ m angenommen wird?

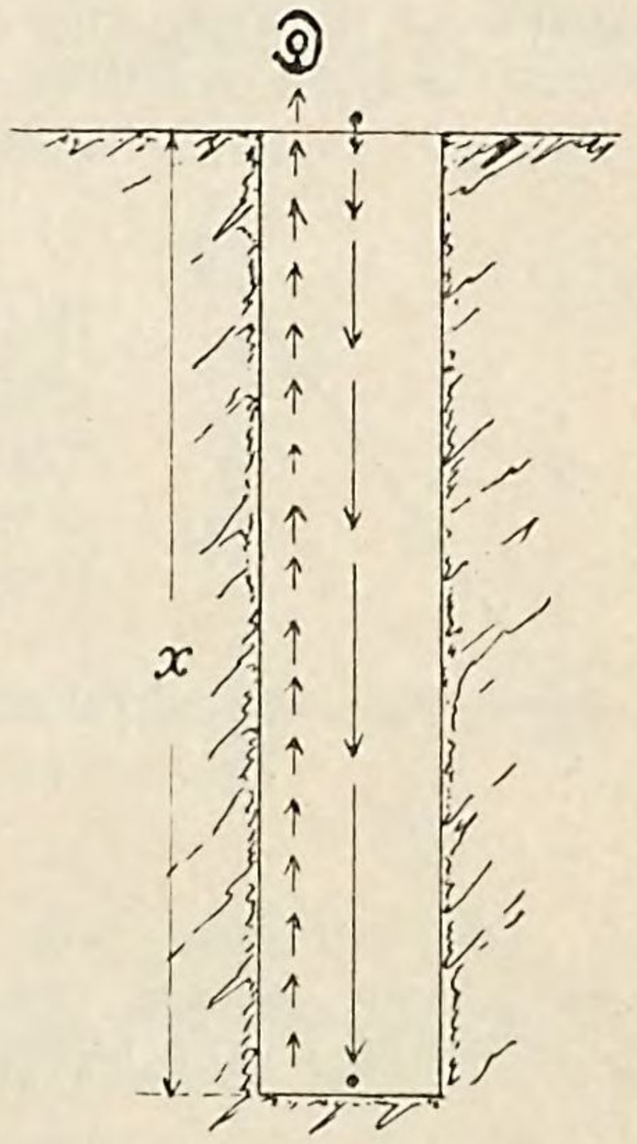


Fig. 24.

Man zerlege die ganze Fallzeit in zwei Perioden, dann ist die auf das Hinabfallen verwendete Zeit:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, x}{10}},$$

die Zeit, welche die Schallwelle gebraucht, um von dem Gesenk bis zur Schachtmündung zu gelangen:

$$t_2 = \frac{x}{c} = \frac{x}{333},$$

dann ist:

$$t_1 + t_2 = t$$

$$\sqrt{\frac{2x}{10}} + \frac{x}{333} = 20,$$

also die Unbekannte x bestimmbar.

II.

Zusammengesetzte Bewegungen.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen des geometrischen Punktes.

§ 24.

Im Voranstehenden wurden die Gesetze nur der einfachen Bewegungen möglichst übersichtlich und so vollständig, wie zweckmässig erschien, abgeleitet.

Nun giebt es aber in der Natur und Kunst unzählig viele Vorgänge, bei denen die beobachtete Bewegung entweder als eine aus einzelnen (einfachen) Bewegungen zusammengesetzte (Fig. 2), oder als nur ein Theil einer ursprünglich gegebenen Bewegung sich erweist.

Solche zusammengesetzten, gleichsam zu einer einzigen zusammengeflossenen Bewegungen sollen im Folgenden betrachtet werden.

Es sei hier erinnert an die Wurfbewegung, an die für die Wellenlehre so wichtigen Interferenzerscheinungen, die nur durch Zusammensetzung von Bewegungen zu Stande kommen, und an die Bewegung auf der schiefen Ebene, die hingegen als Theil eines Ganzen aufzufassen ist.

A.

Die Einzelbewegungen erfolgen in ein und derselben Ebene.

§ 25.

Die Zusammensetzung der Bewegungen hat den Zweck, anstatt mehrerer gleichzeitiger Bewegungen eine einzige gleichwerthige zu finden.

Ein Punkt O (oder um einen bekannten Bewegungsvorgang vor Augen zu führen, eine an der Kette eines Laufkranes hängende Last) werde in einer gewissen Zeit t gleichzeitig:

in der Richtung OX um den Weg x fortgeschoben und
" " " OZ " " " z emporgehoben.

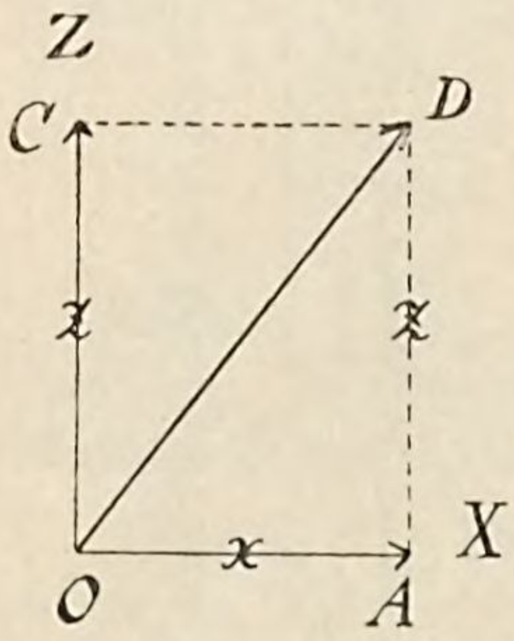


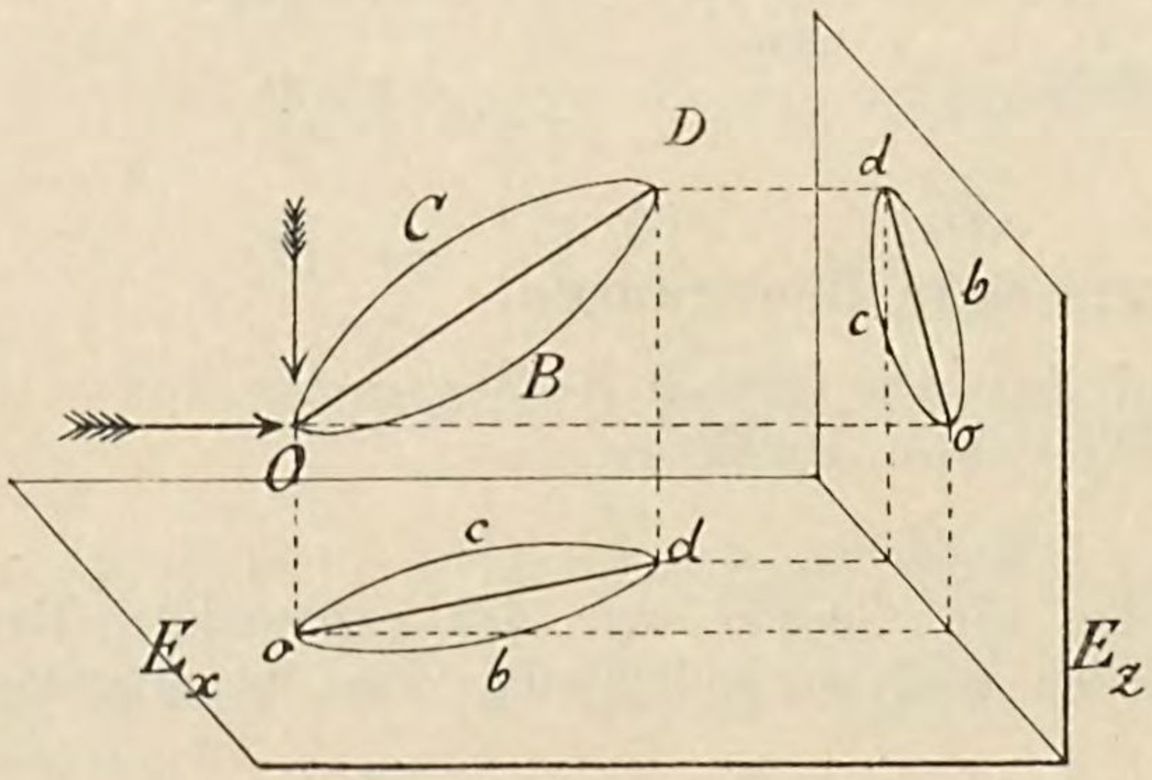
Fig. 25.

Sodann erscheint es einem entfernt stehenden Beobachter, der auf die einzelnen Bewegungen nicht achtet, als ob O doch nur eine einzige, aus den Seitenbewegungen (Komponenten) zusammengesetzte, sogen. Mittelbewegung (Resultante) von O nach D in der Ebene OX und OZ ausführte.

D (Fig. 25) ist der nach der Zeit t erreichte Punkt des Mittelweges, wenn derselbe so gewählt ist, dass

$$OA = x$$
$$AD = \text{ und parallel } z \text{ ist.}$$

Die Mittelbewegung, in der OD für sich, und andererseits die Seitenbewegungen in der OA und der $AD = OC$ zusammengenommen, sind einander gleichwerthig (äquivalent), so dass sich letztere anstatt der ersteren und umgekehrt setzen lassen.



Der Laufkrahn ist eine Windevorrichtung, welche in den meisten Maschinenfabriken und Giessereien in passender Höhe über dem Boden angebracht ist und vermittelst Rädern derart auf Schienen hin- und hergefahren werden kann, dass man die an der Windekette hängende Last nicht nur emporheben, sondern auch sowohl in der Länge, als auch in der Quere des Raumes fortbewegen kann.

Die Längen x und z heissen auch Projektionen der Linie OD auf die Richtungen OX und OZ.

Man könnte (nach vorstehender Figur) das, was man unter „Projektion“ eines Gebildes (einer Linie OD oder einer Fläche $OBDC$) auf eine Ebene E_x bezw. E_z begreift, sich als denjenigen Schatten od bezw. $obdc$ vorstellen, den das Gebilde auf die Ebene E_x bezw. E_z (Projektionsebene) werfen würde, wenn es von parallelen Lichtstrahlen getroffen würde, die in der Richtung Oo einfallen.

§ 26.

D erscheint (in Fig. 25) als Endpunkt eines Dreiecks OAD, sobald man durch die Verbindende OD, die durch die Seitenwege $OA = x$ und $AD = z$ bedingte Figur sshliesst.

Hieraus ergiebt sich ein Gesetz, nach welchem man aus den Seitenwegen den Mittelweg findet.

Polygongesetz. Man füge die Seitenwege (hier x und z) nach Grösse und Richtung aneinander und verbinde den Anfangspunkt des ersten Weges mit dem Endpunkte des zuletzt gewählten, alsdann ist diese Verbindende der gesuchte Mittelweg. Die Reihenfolge, in welcher man die Seitenwege aufzeichnet, hat keinen Einfluss auf das Endergebniss, wie die beiden Figuren 26 zeigen.

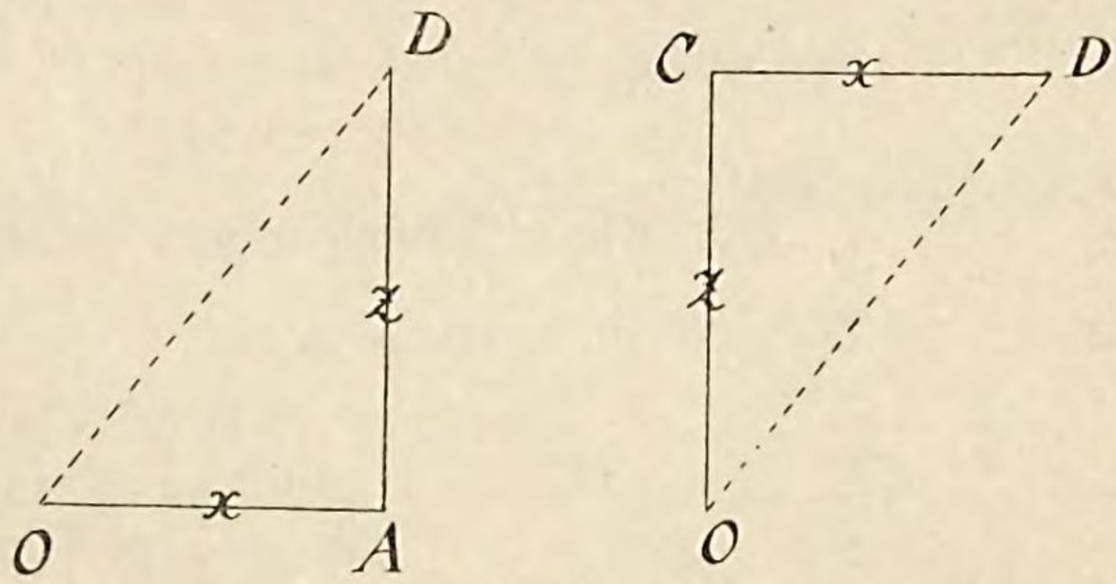


Fig. 26.

In beiden Fällen ergiebt sich für die Schlusslinie OD dieselbe Grösse und Richtung.

Dieses Gesetz, nach welchem man durch Aneinanderreihen der Seitenwege den Mittelweg bestimmt, heisst das Polygongesetz.

§ 27.

D ist auch anzusehen als der dem Anfangspunkte O gegenüberliegende Eckpunkt eines über den Seitenwegen $OA = x$ und $OC = AD = z$ als Seiten verzeichneten Parallelogrammes, in welchem OD die Diagonale (Uebereckslinie) ist und als solche sich leicht verzeichnen lässt.

Parallelogrammgesetz. Man findet durch Konstruktion den Mittelweg der Grösse und Richtung nach auch als Diagonale eines Parallelogrammes, welches über den gegebenen Seitenwegen als Seiten konstruirt ist.

§ 28.

Auch durch Rechnung findet man den Mittelweg OD der Grösse und Richtung nach.

Es sei a der Winkel zwischen den Seitenwegen x und z, und zunächst beliebig, also verschieden von 90^0 angenommen, d der Winkel

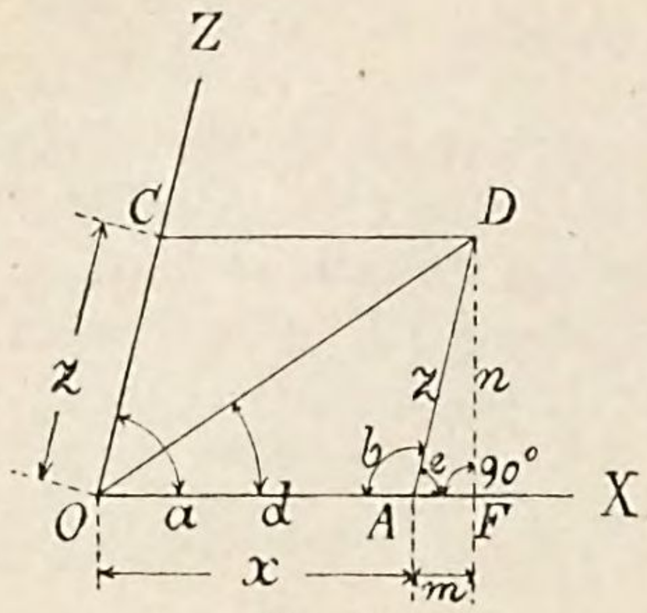


Fig. 27.

zwischen dem gesuchten Mittelwege OD und der bekannten Richtung OX, dann ist OD bestimmt durch die Gleichungen:

$OD = \sqrt{x^2 + z^2 + 2xz\cos a^*)}$ nach Grösse . 33

$\sin d = \sin a \dfrac{z}{OD}$ **) . . nach Richtung . 34

Stehen die Seitenwege x und z senkrecht aufeinander, so ist

$a = 90^0, \quad \sin a = 1, \quad \cos a = 0,$

und obige Gleichungen gehen über in:

$$OD = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x^2 + z^2}{OD^2} = 1$$

$$\sin d = \frac{z}{OD} \qquad \text{und} \qquad \cos d = \frac{x}{OD}$$

woraus ebenfalls folgt:

$$\sin^2 d + \cos^2 d = \frac{x^2 + z^2}{OD^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35$$

B.

Die Einzelbewegungen erfolgen im Raume.

§ 29.

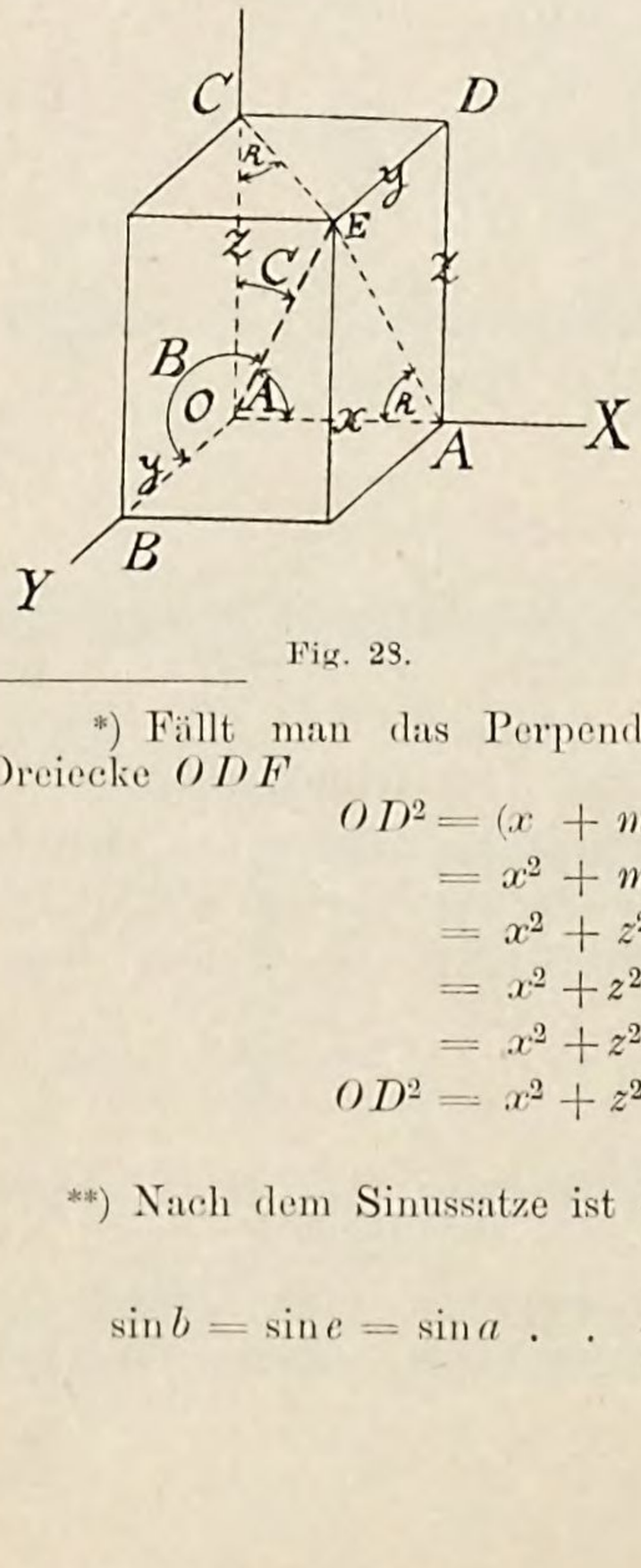


Fig. 28.

Wird die oben erwähnte Last O noch gleichzeitig in der Richtung OY um den Weg y gleichförmig fortbewegt, so scheint auch jetzt noch O nur eine einzige Bewegung auszuführen.

E ist ein Punkt des Mittelweges, wenn derselbe so gewählt ist, dass

$OA = x$

$AD =$ und parallel z

$DE =$ „ „ y

ist.

---

*) Fällt man das Perpendikel DF auf OX, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke ODF

$$\begin{aligned} OD^2 &= (x + m)^2 + n^2 \\ &= x^2 + m^2 + 2mx + n^2 \\ &= x^2 + z^2\cos^2 e + 2z\cos e x + z^2\sin^2 e \\ &= x^2 + z^2(\cos^2 e + \sin^2 e) + 2zx\cos e \\ &= x^2 + z^2 + 2zx\cos e, \quad \text{oder da } e = a, \\ OD^2 &= x^2 + z^2 + 2xz\cos a \text{ (wie oben).} \end{aligned}$$

**) Nach dem Sinussatze ist $\dfrac{\sin d}{\sin b} = \dfrac{z}{OD}$, oder da

$\sin b = \sin e = \sin a$ . . $\dfrac{\sin d}{\sin a} = \dfrac{z}{OD}$ (wie oben).

§ 30.

E erscheint als Eckpunkt eines räumlichen Vielecks (Polygons), sobald man durch OE die Figur schliesst.

Das oben ausgesprochene Polygongesetz gilt wörtlich auch hier.

E ist aber auch anzusehen als der dem Anfangspunkte O gegenüberliegende Endpunkt eines über den Seitenwegen

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z$$

als Seiten verzeichneten Parallelopipedons, in welchem OE die Diagonale ist und als solche sich leicht verzeichnen lässt.

Man findet demnach (in ähnlicher Weise wie oben gesagt) durch Zeichnung den Mittelweg der Grösse und Richtung nach als Diagonale eines über den Seitenwegen als Seiten errichteten Parallelopipedons.

§ 31.

Auch durch Rechnung findet man den Mittelweg nach Grösse und Richtung.

Nehmen wir der Einfachheit wegen ein rechtwinkeliges Parallelopipedon an und bezeichnen die Winkel zwischen dem Mittelwege OE und den drei Seitenwegen: x, y, z der Reihe nach mit A, B, C, so ist der Mittelweg bestimmt durch die Gleichungen:

$$OE = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ^*) \quad \text{der Grösse nach} \quad . \ . \ . \ . \quad 36$$

und durch:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{x}{OE} \\ \cos B &= \frac{y}{OE} \\ \cos C &= \frac{z}{OE} \end{aligned}\right\}\ ^{**}) \quad \text{der Richtung nach} \quad . \ . \ . \ . \quad 37$$

Hieraus folgt ähnlich wie oben die Bedingungsgleichung:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{OE^2} = 1 \quad . \ . \ . \ . \quad 38$$

---

*) In dem rechtwinkeligen Dreiecke OEC mit dem rechten Winkel bei C ist:

$$OE^2 = z^2 + CE^2,$$

ferner, in dem rechtwinkeligen Dreiecke CED mit dem rechten Winkel bei D ist:

$$CE^2 = ED^2 + CD^2,$$

da nun $ED = y$, $CD = x$ *ist*, so folgt:

$$OE^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{wie oben.}$$

**) Da das Dreieck OAE bei A rechtwinkelig,

OCE „ C „

OBE „ B „ ist.

d. h. die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Winkel A, B, C, muss stets gleich eins sein. Es ist also durch zwei Winkel der dritte bestimmt.

§ 32.

Ergebniss. Nach dem Voranstehenden ergiebt sich allgemein Folgendes:

Ist das Bewegungsgesetz jeder Seitenbewegung bekannt, somit der in einer gewissen Zeit t zurückgelegte Weg nach dem ersten Kapitel zu ermitteln, so lässt sich

1. durch Zeichnung eines Polygons, Parallelogramms oder eines Parallelopipedons,
2. durch Rechnung

jederzeit der Ort bestimmen, an welchem sich der in Bewegung begriffene Punkt befindet.

Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens kann jede gewünschte Anzahl von Punkten

$$D\,D_1\,D_2\,D_3\,\ldots.;\quad E\,E_1\,E_2\,E_3\,\ldots.$$

des Mittelweges, folglich dieser selbst festgelegt, kurz der Mittelweg nach Grösse und Richtung bestimmt werden.

Dieses Verfahren, aus den gegebenen Seitenbewegungen die Mittelbewegung zu finden, heisst „Zusammensetzung der Bewegungen“.

Umgekehrt lässt sich eine gegebene Bewegung nach vorher bestimmten Richtungen in die gleichwerthigen Seitenbewegungen, deren Zahl mindestens zwei sein muss, „zerlegen“.

§ 33.

Zerlegung. Wäre (nach Fig. 27) der Weg OD gegeben, so würden sich durch Parallelogramm- oder Polygon- (Dreieck-) Verzeichnung

$$OA = x \quad \text{und} \quad OC = z$$

als Seitenwege in den vorgeschriebenen Richtungen OX und OZ ergeben.

Stehen OX und OZ senkrecht zu einander, so ist

$$x = OD\,.\,\cos d,$$
$$z = OD\,.\,\sin d;$$

anderen Falls sind x und y nach dem Sinussatz zu bestimmen.

Wollte man (nach Fig. 28) OE nach den drei nicht in derselben Ebene liegenden, rechtwinkelig zu einander stehenden Richtungen OX, OZ, OY zerlegen, so würden sich als Seitenwege ergeben, beziehungsweise

$$ED = \text{und parallel } OB = y = OE\,.\,\cos B,$$
$$DA = \text{„ „ } OC = z = OE\,.\,\cos C,$$
$$OA = x = OE\,.\,\cos A.$$

Schlusssatz:

Das im Voranstehenden angegebene Verfahren, Bewegungen zusammenzusetzen und zu zerlegen, oder das Polygon- bezw.

Parallelogramm-Gesetz, gilt sowohl für alle Bewegungsarten (gleichförmig und ungleichförmig), als auch, wie weiter unten gelehrt wird, für die Bewegungsursachen, d. i. für die Kräfte und bildet somit einen der wichtigsten Grundpfeiler der Mechanik.

III.

Anwendung des Polygon- bezw. Parallelogramm-Gesetzes auf die verschiedenen Bewegungsarten.

§ 34.

Wir unterscheiden drei im Folgenden näher besprochene Fälle:

Erster Fall.

Die Seitenbewegungen sind gleichartig und zwar nur gleichförmig.

Die Mittelbewegung ist sodann auch gleichförmig und geradlinig.

Zweiter Fall.

Die Seitenbewegungen sind auch gleichartig und zwar nur gleichförmig beschleunigt.

Die Mittelbewegung ist sodann ebenfalls gleichförmig beschleunigt und geradlinig.

Dritter Fall.

Die Seitenbewegungen sind ungleichartig, nämlich theils gleichförmig, theils gleichförmig beschleunigt.

Die Mittelbewegung ist dann stets krummlinig, aber nicht immer ungleichförmig.

Es wird aus dem Folgenden hervorgehen, dass jede krummlinige Bewegung auf geradlinige Seitenbewegungen zurückzuführen ist; oder mit anderen Worten, dass sie eine aus geradlinigen Bewegungen zusammengesetzte Mittelbewegung ist (Wurfbewegung — Kreisende Bewegung).

§ 35.

Bei Betrachtung aller dieser Fälle, wie überhaupt bei jedem Bewegungsvorgange, wird es sich um die Beantwortung zweier Fragen handeln, nämlich:

1. wie bewegt sich der Punkt, also welche Geschwindigkeit oder Beschleunigung und welche Richtung hat er am Ende eines bestimmten Zeitabschnittes,
2. wo bewegt er sich, d. h. welche Wegeslänge hat er während des Verlaufes eines bestimmten Zeitabschnittes zurückgelegt?

Erster Fall.

Die Seitenbewegungen sind nur gleichförmig.

A.

Bewegungen in derselben Ebene.

a.

Zusammensetzung zweier Bewegungen.

§ 36.

Fasst man in der Figur (27) die Wegeslängen x, z und OD als Wege in 1 Sekunde, also als Geschwindigkeiten auf und setzt nach nebenstehender Figur (29a)

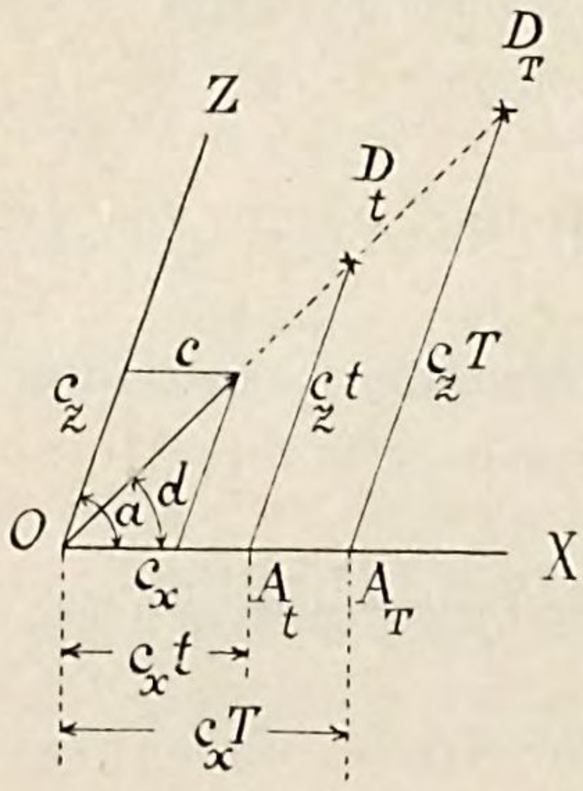


Fig. 29a.

$$x = c_x,$$
$$z = c_z,$$
$$OD = c,$$

so ist die Geschwindigkeit des Mittelweges, also die wirkliche Geschwindigkeit des Punktes durch die Gleichungen:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2 + 2c_x . c_z . \cos a} \text{ . nach Grösse ... } 39$$

$$\sin d = \sin a \frac{c_z}{c} \text{ . . . nach Richtung ... } 40$$

gegeben.

Die Punkte D_t und D_T sind Punkte des Mittelweges, welche nach t bezw. T Sekunden erreicht werden, wenn dieselben so gewählt sind, dass:

$$\frac{OA_t}{A_t D_t} = \frac{OA_T}{OD_T},$$

oder

$$\frac{c_x . t}{c_z . t} = \frac{c_x T}{c_z T} = \frac{c_x}{c_z} \quad . . . . . 41$$

d. h. die Punkte $OD_t D_T$ liegen auf einer Geraden. Die Bewegung ist demnach eine geradlinige.

Dann verhalten sich auch:

$$\frac{OD_t}{OD_T} = \frac{OA_t}{OA_T} = \frac{c_x t}{c_x T} = \frac{t}{T} \quad . . . . . 42$$

d. h. die Wege wie die darauf verwendeten Zeiten. Die Bewegung ist demnach gleichförmig.

Das Gesetz der Bewegung ist ausgedrückt durch die Gleichung:

$$s = ct = \sqrt{(c_x t)^2 + (c_z t)^2 + 2c_x t . c_z t . \cos a.}$$

Aus der Gleichung 39 folgt:

Für $a = 0$; also $\sin o = 0$, $\cos o = 1$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2 + 2c_x c_z} = c_x + c_z \quad . . . . . 43$$

d. h. die Mittelgeschwindigkeit gleich gerichteter Seitengeschwindigkeiten ist gleich deren Summe.

$c_x + c_z$ ist der grösste Werth für c.

Für $a = 180^0$, also $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$ ist:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2 - 2c_x \cdot c_z} = c_x - c_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44$$

d. h. die Mittelgeschwindigkeit entgegengesetzter Geschwindigkeiten ist gleich deren Unterschiede.

Für $c_x = c_z$ würde $c = 0$; für $c_x = 0$ sogar $c = -c_z$ sein.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit alle Werthe von $c_x + c_z$ bis 0, sogar bis $-c_z$ annehmen.

Für $a = 90^0$, also $\sin 90 = 1$, $\cos 90 = 0$ ist:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45$$

$$\left.\begin{aligned} \sin d &= \frac{c_z}{c} \\ \cos d &= \frac{c_x}{c} \\ \operatorname{tg} d &= \frac{c_z}{c_x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46$$

Zugleich drücken die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} c_z &= c \cdot \sin d \\ c_x &= c \cdot \cos d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 47$$

die Seitengeschwindigkeiten aus, welche man erhält, wenn man die durch den Winkel d der Richtung nach gegebene Mittelgeschwindigkeit c nach den beiden senkrecht zu einander stehenden Richtwegen OX und OZ zerlegt.

Es heissen c_x und c_z auch die Projektionen von c auf OX und OZ.

Eine derartige Zerlegung ist wiederholt vorzunehmen, wenn es sich handelt um:

b.

Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Geschwindigkeiten in derselben Ebene zu einer Mittelgeschwindigkeit.

§ 37.

Es seien gegeben die Geschwindigkeiten: $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$, welche bezw. die Winkel: $d_1\ d_2\ d_3 \ldots$ mit der X-Achse des rechtwinkeligen Achsenkreuzes OX und OZ einschliessen.

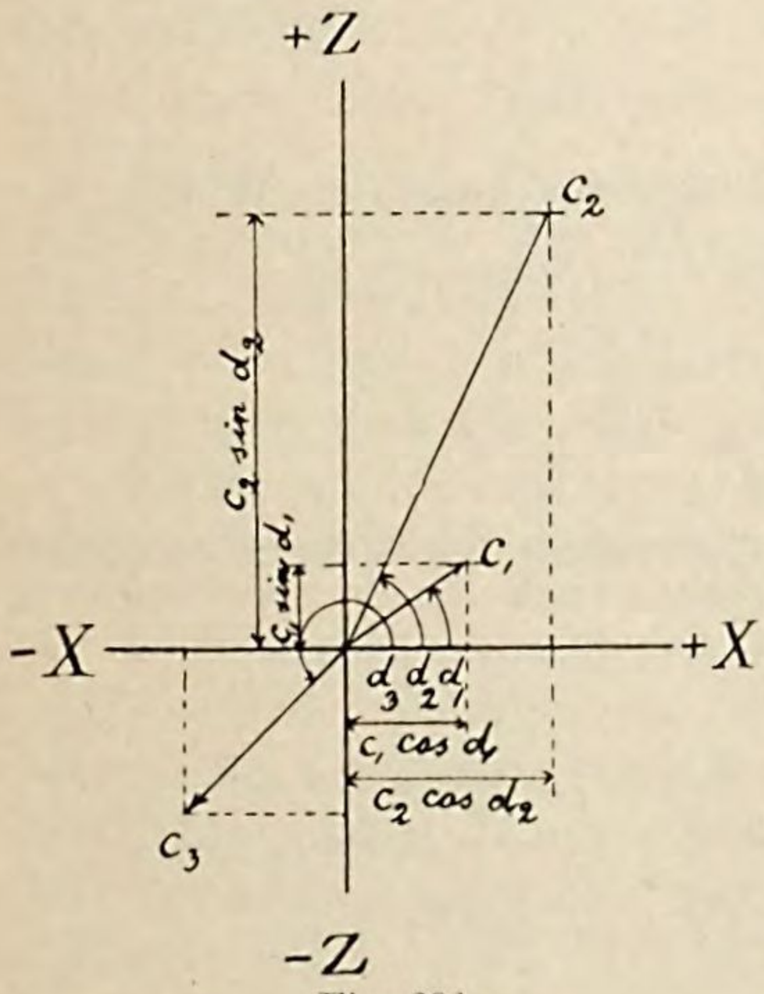


Fig. 29 b.

Es soll gefunden werden die Mittelgeschwindigkeit c und der Winkel d zwischen c und der X-Achse.

Zunächst findet man durch Zerlegung der einzelnen gegebenen Geschwindigkeiten nach den beiden Achsenrichtungen die Seitengeschwindigkeiten, welche in die

OX-Achse	OZ-Achse fallen:
$c_1 \,.\, \cos d_1$	$c_1 \,.\, \sin d_1$
$c_2 \,.\, \cos d_2$	$c_2 \,.\, \sin d_2$
$c_3 \,.\, \cos d_3$	$c_3 \,.\, \sin d_3$
.	.
.	.
.	.
$c_x = c_1 \,.\, \cos d_1 + c_2 \,.\, \cos d_2 \pm \ldots;$	$c_z = c_1 \,.\, \sin d_1 + c_2 \,.\, \sin d_2 \pm \ldots$

als Summen der gleichgerichteten Seitengeschwindigkeiten, und zuletzt durch Zusammensetzung dieser Summen die gesuchte Mittelgeschwindigkeit durch die Gleichungen:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2} \qquad \text{der Grösse nach} \quad \ldots \quad 48$$

und:

$$\sin d = \frac{c_z}{c} \text{ oder } \operatorname{tg} d = \frac{c_z}{c_x} \qquad \text{der Richtung nach.} \ldots 49$$

Es darf hierbei nicht übersehen werden, dass die

Sinus von Winkeln $\begin{matrix} > 180^0 \\ < 360^0 \end{matrix}$ negativ sind,

Cosinus „ „ $\begin{matrix} > 90^0 \\ < 270^0 \end{matrix}$ „ „

worauf durch das $\pm$ Zeichen in den obigen Gleichungen hingedeutet ist.

B.

Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Geschwindigkeiten im Raume zu einer Mittelgeschwindigkeit.

§ 38.

Es seien gegeben die Geschwindigkeiten:

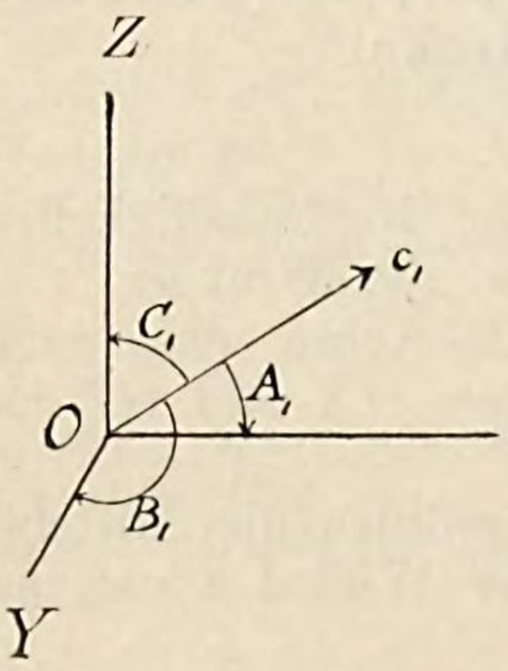


Fig. 29 c.

$c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ welche beziehungsweise die Winkel:
$A_1 A_2 A_3 \ldots$ mit der OX-Achse,
$B_1 B_2 B_3 \ldots$ „ „ OY- „
$C_1 C_2 C_3 \ldots$ „ „ OZ- „
einschliessen.

Zunächst erhält man durch Zerlegung sämmtlicher gegebener Geschwindigkeiten nach den drei rechtwinkelig zu einander gedachten Achsenrichtungen, die drei Geschwindigkeitssummen

$$c_x = c_1 \,.\, \cos A_1 + c_2 \,.\, \cos A_2 \pm \ldots,$$
$$c_y = c_1 \,.\, \cos B_1 + c_2 \,.\, \cos B_2 \pm \ldots,$$
$$c_z = c_1 \,.\, \cos C_1 + c_2 \,.\, \cos C_2 \pm \ldots,$$

dann aus diesen die Mittelgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \qquad \text{der Grösse nach} \quad \ldots \quad 50$$

und durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{c_x}{c} \\ \cos B &= \frac{c_y}{c} \\ \cos C &= \frac{c_z}{c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ der Richtung nach.} \quad \ldots \quad 51$$

Es darf auch hier nicht vergessen werden, dass nach Gleichung 38 jedesmal die zusammengehörigen Winkel: A, B, C; $A_1, B_1, C_1 \ldots$ der Bedingungsgleichung genügen müssen:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

§ 39.

Auch durch bildliche Darstellung findet man die Mittelgeschwindigkeit.

1. Polygongesetz. Man reihet die geraden Linien, welche die Geschwindigkeiten $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ darstellen, nach Grösse und Richtung, in beliebiger Reihenfolge aneinander. Dann verbindet man den Anfangspunkt der zuerst angetragenen Linie mit dem Endpunkt der letzten. Diese Schlusslinie ist der Grösse und Richtung nach die gesuchte Mittelgeschwindigkeit c.

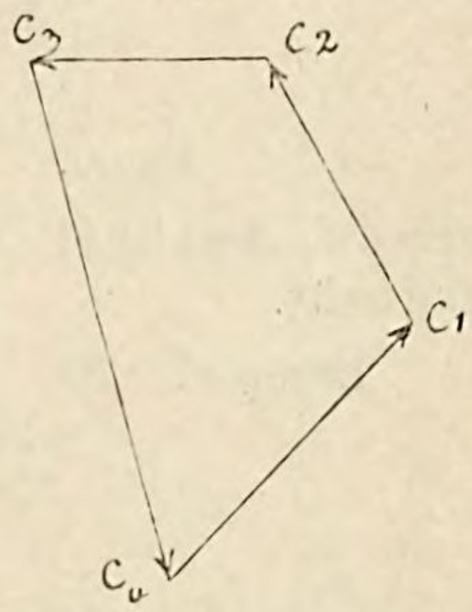


Fig. 30.

Sollte zufällig schon aus den gegebenen Seitengeschwindigkeiten sich ein geschlossenes Polygon ergeben, so würde daraus zu schliessen sein, dass ihre Mittelgeschwindigkeit Null ist, somit der Punkt O in Ruhe bleibt; d. h.: die Geschwindigkeiten sich aufheben.

Dieser Satz lässt sich auch so ausdrücken:

Fasst man in einem geschlossenen (ebenen oder körperlichen) Polygon die übrigens ganz beliebig gerichteten Seiten als Geschwindigkeiten auf, so werden diese, gleichzeitig einem Punkte mitgetheilt, sich gegenseitig aufheben, also auf die Bewegung des Punktes gar keinen Einfluss ausüben.

Einen gleichwerthigen Satz werden wir auch bei der Zusammensetzung der Kräfte kennen lernen (Seilpolygon).

2. Parallelogrammgesetz. Man verzeichnet erst über zwei beliebigen Geschwindigkeiten, vielleicht c_1 und c_2, das Parallelogramm, in diesem die Diagonale, beschreibt dann über letzterer und c_3 abermals ein Parallelogramm. Dann ist die zuletzt gefundene Diagonale der Grösse und Richtung nach die gesuchte Mittelgeschwindigkeit c. Für das Endergebniss ist es auch hier gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Geschwindigkeiten $c_1\, c_2\, c_3$ zusammensetzt. Das Verfahren gilt auch für nicht in derselben Ebene liegende Geschwindigkeiten.

Bei sorgfältigem Zeichnen der Figuren wird man sich leicht überzeugen, sowohl, dass die unter 1 und 2 angegebenen Verfahren auf dieselbe Mittelgeschwindigkeit führen, als auch, dass die Reihenfolge, in welcher man die einzelnen gegebenen Geschwindigkeiten zusammensetzt, auf das Endergebniss ganz ohne Einfluss ist.

§ 40.

Beispiele.

Beispiel 19: Das Laviren der Schiffe bei widrigem Winde (Fig. 31).

Es ist am vortheilhaftesten, das Segel SS so zu stellen, dass es den Winkel zwischen der Richtung der Schiffsachse AA und des Windes W halbirt. Es sei das Segel als ebene Fläche ohne Reibung gedacht. Dann gilt Folgendes:

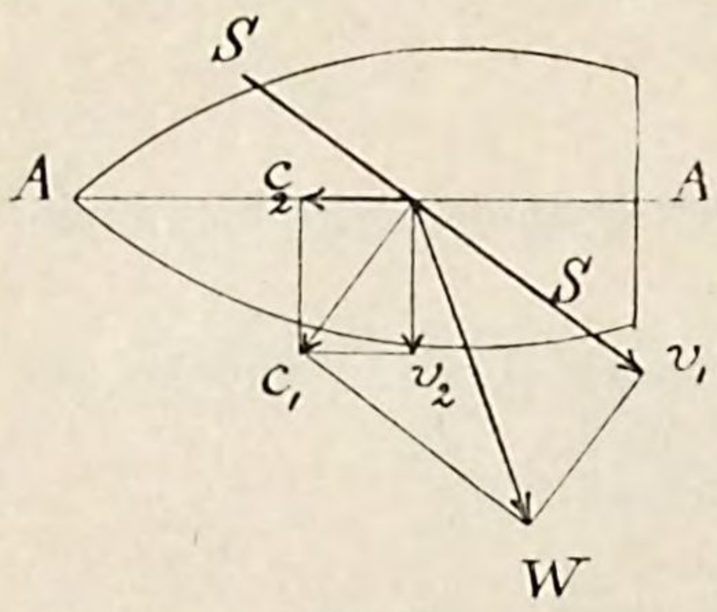


Fig. 31.

Zerlegt man die Windgeschwindigkeit W in v_1 längs des Segels und c_1 senkrecht zu demselben, so ist v_1 derjenige Antheil, welcher für die Bewegung des Schiffes verloren geht.

Zerlegt man ferner c_1 in v_2 senkrecht zur Schiffsachse AA und c_2 längs der AA, so wird v_2 von dem gegen die Seite des Schiffes wirkenden Wasser aufgehoben, und c_2 ist derjenige überhaupt übrig bleibende Antheil, der für die Fortbewegung des Schiffes sich ergiebt.

Beispiel 20: Die vortheilhafteste Richtung des Wasserstrahles W beim Eintritt in das Wasserrad im Punkte m des Radumfanges ist zu bestimmen.

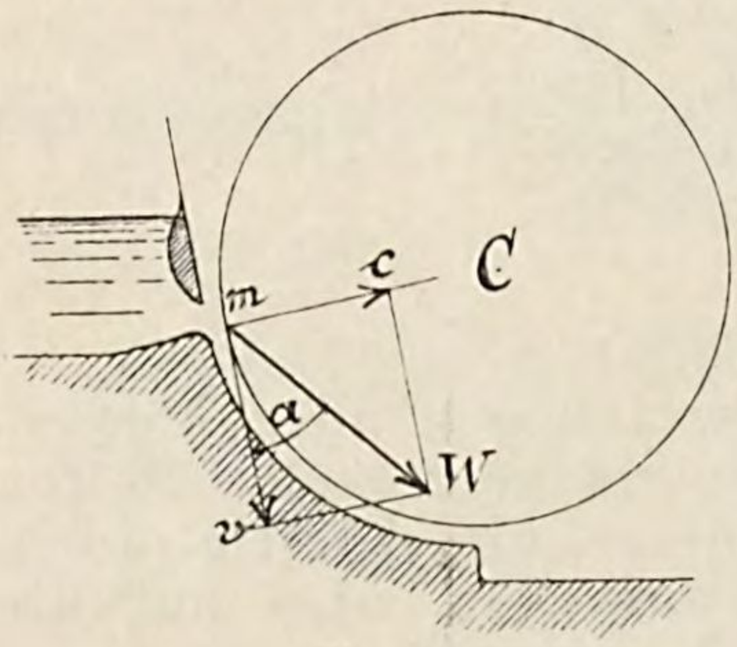


Fig. 32.

Man zerlege W in eine tangentiale und eine radiale Geschwindigkeit, so geht letztere (c) verloren für die Bewegung, hindert sogar die Drehung, weil sie Reibung in den Zapfen C der Wasserradachse erzeugt. Dagegen v ist derjenige Antheil, der zur Drehung verwendet wird. Dieser wird um so grösser (und entsprechend c um so kleiner), je kleiner der Winkel a ist. Daraus ergiebt sich die Regel: W soll sich möglichst der Tangente v nähern.

Beispiel 21: Es sei in derselben Ebene:

$$c_1 = 3\text{ m}, \quad c_2 = 5\text{ m}, \quad c_3 = 4\text{ m},$$
$$d_1 = 20^0, \quad d_2 = 60^0, \quad d_3 = 210^0;$$

dann ist zunächst:

$$c_x = 3 \,.\, \cos 20^0 + 5 \,.\, \cos 60^0 + 4 \,.\, \cos 210^0,$$
$$c_z = 3 \,.\, \sin 20^0 + 5 \,.\, \sin 60^0 + 4 \,.\, \sin 210^0;$$

oder:

$$c_x = 3 \,.\, 0{,}94 \quad + 5 \,.\, 0{,}5 \quad - 4 \,.\, 0{,}866 = 1{,}855 \text{ m}$$

$$c_z = 3 \,.\, 0{,}342 \quad + 5 \,.\, 0{,}866 \quad - 4 \,.\, 0{,}5 \quad = 3{,}356 \text{ m}$$

also:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_z^2} = \sqrt{1{,}855^2 + 3{,}356^2} \qquad = 3{,}8346 \text{ m}$$

und

$$\operatorname{tg} d = \frac{c_z}{c_x} = \frac{3{,}356}{1{,}855} = 1{,}809,$$

$$d = 61^0\, 4'\, 4''.$$

Beispiel 22: Die Länge, Breite, Höhe desjenigen Raumes, in welchem durch einen Laufkran die Last längs der Diagonale OE mit der Geschwindigkeit $c = 0{,}5$ m bewegt werden soll, sind beziehungsweise:

$$OA = 15 \text{ m}; \quad OB = 10 \text{ m}; \quad OC = 6 \text{ m}$$ (siehe Fig. 28).

Welche Geschwindigkeiten c_x, c_y, c_z sind erforderlich?

$$\cos A = \frac{c_x}{c} = \frac{15}{OE} = \frac{15}{19}, \quad \text{da } OE = \sqrt{15^2 + 10^2 + 6^2} = 19 \text{ ist};$$

$$\cos B = \frac{c_y}{c} = \frac{10}{OE} = \frac{10}{19};$$

$$\cos C = \frac{c_z}{c} = \frac{6}{OE} = \frac{6}{19}.$$

$$c_x = 0{,}5 \,.\, \frac{15}{19} = \frac{15}{38} \text{ m}$$

$$c_y = 0{,}5 \,.\, \frac{10}{19} = \frac{10}{38} \text{ m}$$

$$c_z = 0{,}5 \,.\, \frac{6}{19} = \frac{6}{38} \text{ m}$$

Probe: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \left(\frac{15}{19}\right)^2 + \left(\frac{10}{19}\right)^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2 = \frac{361}{361} = 1.$

Zweiter Fall.

Die Seitenbewegungen sind sämmtlich ungleichförmig, nämlich gleichförmig verändert (beschleunigt oder verzögert).

§ 41.

Es gelten auch hier dieselben Regeln und Formeln wie bei der Zusammensetzung und Zerlegung der gleichförmigen Bewegungen, nur mit dem Unterschiede, dass hier Beschleunigung zu setzen ist, wo dort Geschwindigkeit steht.

Auch ist bei Bestimmung der Endgeschwindigkeit und des Weges nicht zu vergessen, dass der allgemeine Ausdruck für die Endgeschwindigkeit:

$$v = pt,$$

für den Weg:

$$s = \frac{pt^2}{2},$$

wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ gesetzt wird.

D_t und D_T sind Punkte des Mittelwegs, wenn dieselben so gewählt sind, dass:

$$\frac{OA_t}{A_tD_t} = \frac{OA_T}{A_TD_T} = \frac{2}{\frac{p_z T^2}{2}} = \frac{p_x}{p_z} \quad . \quad 52$$

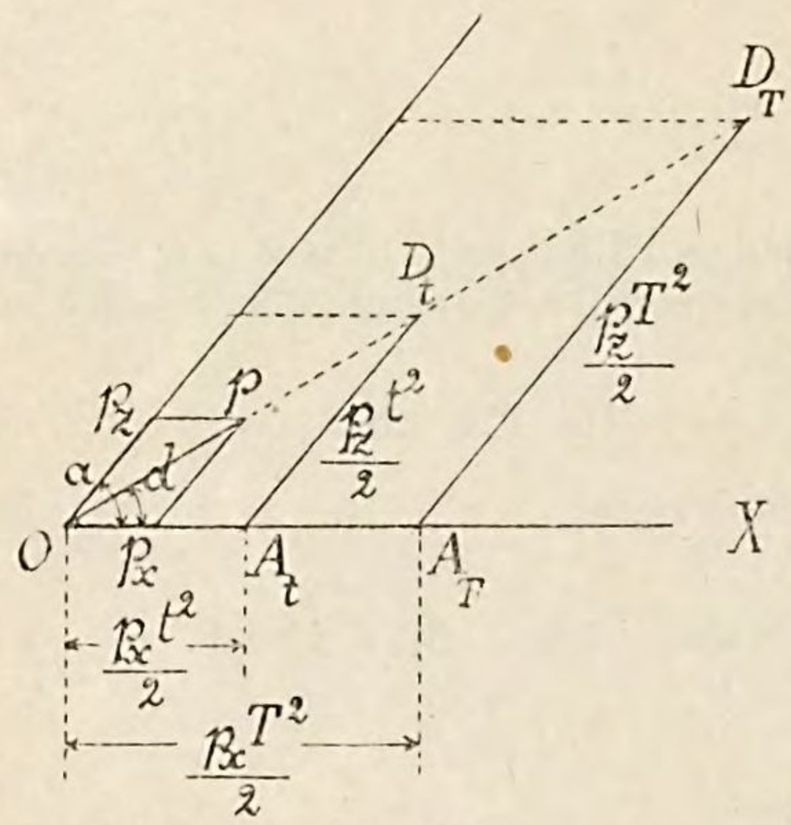


Fig. 33.

d. h. $O\,D_tD_T$ ist eine Gerade, also die Bewegung geradlinig.

Dann verhalten sich aber auch:

$$\frac{OD_t}{OD_T} = \frac{OA_t}{OA_T} = \frac{\frac{p_x \,.\, t^2}{2}}{\frac{p_x \,.\, T^2}{2}} = \frac{t^2}{T^2} \quad . \quad . \quad 53$$

d. h. die Mittelwege wie die Quadrate der darauf verwendeten Zeiten.

Also die Bewegung ist eine beschleunigte.

Schliessen die Beschleunigungsrichtungen den Winkel a ein, so ist die Beschleunigung der Mittelbewegung:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_z^2 + 2 \,.\, p_x \,.\, p_z \,.\, \cos a} \text{ der Grösse nach} \quad . \quad 54$$

$$\sin d = \sin a \, \frac{p_z}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{der Richtung nach} \quad . \quad 55$$

dagegen nach t Sekunden die Endgeschwindigkeit:

$$v = pt = \sqrt{(p_x t)^2 + (p_z t)^2 + 2\,(p_x \,.\, t) \,.\, (p_z \,.\, t) \,.\, \cos a} \quad . \quad . \quad 56$$

ferner der Weg:

$$s = \frac{pt^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{p_x \,.\, t^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_z \,.\, t^2}{2}\right)^2 + 2 \,.\, \frac{p_x \,.\, t^2}{2} \,.\, \frac{p_z \,.\, t^2}{2} \cos a} \quad . \quad . \quad 57$$

Für die Zusammensetzung mehrerer Beschleunigungen in der Ebene und im Raume gelten dieselben Regeln, die wir bei dem ersten Falle kennen lernten.

Auch gelten die Sätze allgemein für ganz ungleichförmige Bewegungen, wenn unter den gegebenen Beschleunigungen die in einem bestimmten Zeitpunkte vorhandenen verstanden werden.

§ 42.

Beispiele.

Zunächst ein Beispiel, das zugleich auf die Nothwendigkeit der Zerlegung einer gegebenen Beschleunigung hinweist.

Beispiel 23: Der Punkt O habe in lothrechter Richtung die Beschleunigung g, wird aber durch die schiefe Ebene ON von der Länge s, welche den Winkel a mit der Wagerechten einschliesst, seitwärts abgelenkt (Fig. 34).

1. Mit welcher Endgeschwindigkeit v kommt er unten bei N an, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war?
2. Welche Zeit gebraucht er zum Zurücklegen des Weges s?

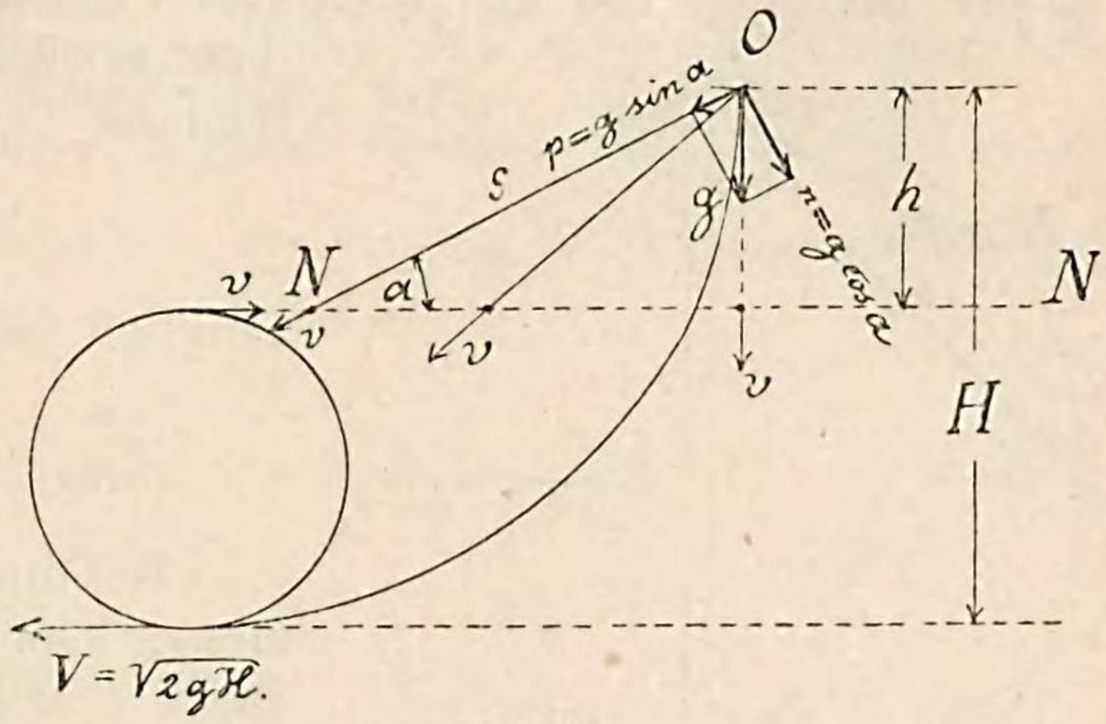


Fig. 34.

Durch Zerlegung der vorhandenen Beschleunigung (Mittelbeschleunigung) g längs der schiefen Ebene und senkrecht dazu ergiebt sich in der Richtung des Weges s die Seitenbeschleunigung:

$$p = g \,.\, \sin a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58$$

Der senkrechte Antheil:

$$n = g \,.\, \cos a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59$$

geht für die Bewegung längs s verloren. Folglich ist (nach Gleichung 11):

$$v = \sqrt{2 \,.\, p \,.\, s} = \sqrt{2 \,.\, g \,.\, \sin a \,.\, s} = \sqrt{2 g \,.\, h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60$$

da $s \,.\, \sin a = h$ ist.

Die Endgeschwindigkeit hängt somit nur von dem „Gefälle“ h ab, dagegen durchaus nicht von dem Neigungswinkel a der Bahn. Sie ist demnach in demselben „Niveau“ NN dieselbe, wie auch die Neigung der Bahn beschaffen sein sollte. Sie ist sogar dieselbe, wenn die Bahn stetig ihre Neigung änderte, also eine beliebig gekrümmte ist.

Kurz, wie auch die Bahnneigung beschaffen sein sollte, der fallende Körper kommt in demselben Niveau mit derselben Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ an, die er erlangt haben würde, wenn er die Höhe h der Bahn frei durchfallen hätte.

Ebenso kommt das in O freigegebene Pendel in dem tiefsten Punkte S mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ an, wenn h die Höhe des durchfallenen Bogens ist (Fig. 35).

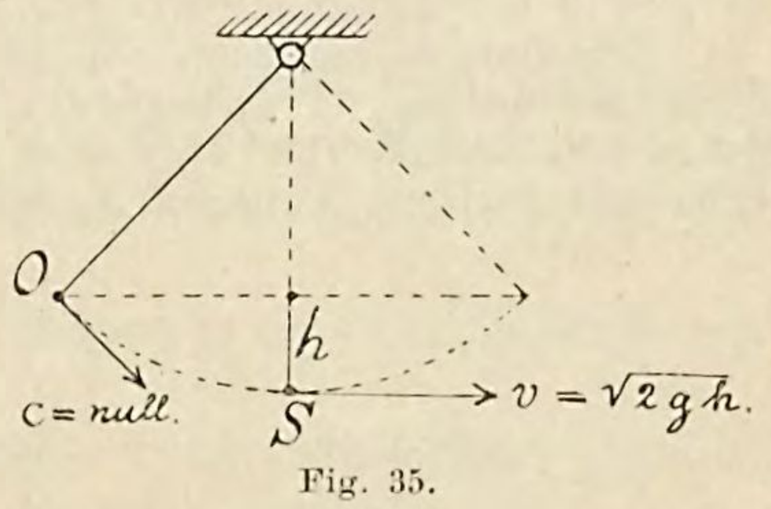


Fig. 35.

Beispiel 24: Die gesuchte Falldauer t ergiebt sich aus der Gleichung 8:

$$s = \frac{p t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \,.\, s}{p}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{s}{\sin a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62$$

$\frac{s}{\sin a}$ ist leicht zu construiren: Ziehe $NS \perp$ zu s, OS lothrecht (d. i. in der Richtung von g), so ist ONS ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei N und der Hypothenuse

$$OS = D = \frac{s}{\sin a}.$$

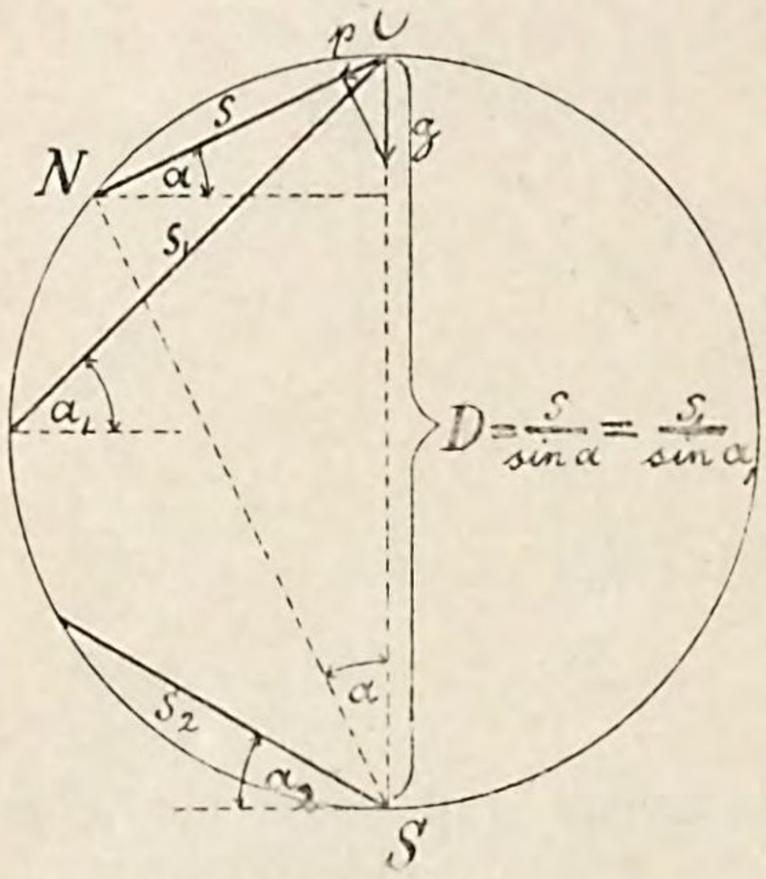


Fig. 36.

Folglich ist auch:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot D} \quad . \quad . \quad . \quad 63$$

Beschreibt man nun über OS als Durchmesser einen Kreis, so folgt, dass die Falldauer t nicht mehr abhängig ist von den zufälligen Werthen der Sehne s und dem Neigungswinkel a, sondern allein von dem Durchmesser des Kreises. D. h. alle Sehnen in demselben Kreise, welche von den Endpunkten des lothrechten Durchmessers ausgehen, werden in derselben Zeit durchfallen, wie dieser Durchmesser selbst; da für alle Sehnen

$$D = \frac{s}{\sin a} = \frac{s_1}{\sin a_1} = \frac{s_2}{\sin a_2} \text{ ist.}$$

Dreht man den Kreis um OS, so beschreibt er die Oberfläche einer Kugel, für deren von O und S ausgehende Sehnen dasselbe gilt. —

Unser Satz heisst jetzt verallgemeinert: Alle von O und S ausgehenden Sehnen der Kugel werden in derselben Zeit durchfallen.

Beispiel 25: In dem folgenden für den Maschinentechniker wichtigen Beispiele (Fig. 37), das sich auf die gegenseitige Bewegung zweier Punkte bezieht, die durch eine starre Linie mit einander fest verbunden sind, tritt noch besonders deutlich die Nothwendigkeit der Zerlegung vorhandener Bewegungen hervor, weil diese hier nur in bestimmten vorgeschriebenen Seitenrichtungen übertragen werden können. (Genau genommen gehört das Beispiel erst einem späteren Kapitel an, ist aber aus dem angegebenen Grunde hier schon besprochen):

Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten u, v an den beiden Enden C und D der Schubstange (Pleuelstange) einer Dampfmaschine. Wenn Kolbenstange B, Schubstange CD und Kurbel DM eine gerade Linie bilden, befindet sich der Kolben in einer seiner sogen. Totlagen A_1 oder A_2.

$$v = \frac{u}{\cos b} \cdot \sin(a + b).$$

Fig. 37.

Bei der verzeichneten Stellung des Kolbens A, beziehungsweise der dazu gehörigen Kurbelstellung MD sei:

u die augenblickliche Grösse der veränderlichen Geschwindigkeit des Punktes (Kreuzkopfes) C in der Richtung der Kolbenstange B,

a der Winkel zwischen der Richtung der Kurbel MD und der Kolbenstange BM,

b der Winkel zwischen den Richtungen der Kolben- und Schubstange.

Es soll die thatsächlich ausgeführte (mögliche) Geschwindigkeit im Punkt D gefunden werden.

Der Geschwindigkeitsantheil, welcher in die Richtung der Schubstange fällt und so auf D übertragen wird, ist

$$\frac{u}{\cos b}.$$

Der senkrecht zu u gerichtete Antheil

$$u \,.\, \operatorname{tg} b$$

geht für die Bewegung so zu sagen verloren.

Durch abermalige Zerlegung ergiebt sich:

$$v = \frac{u}{\cos b} \cdot \sin (a + b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 64$$

als diejenige gesuchte Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt D in der ihm möglichen Bewegungsrichtung, d. i. tangential zu dem durch Punkte angedeuteten Kurbelwarzenkreise sich fortbewegt.

Die radial gerichtete Geschwindigkeit

$$\frac{u}{\cos b} \cdot \cos (a + b)$$

geht für die Bewegung wieder verloren. Genaueres hierüber folgt später (§ 147).

Dritter Fall.

Die Seitenbewegungen sind ungleichartig, nämlich theils gleichförmig, theils ungleichförmig.

A.

Die Bewegungen erfolgen in ein und derselben Ebene.

§ 43.

Wir wählen wieder einen bekannten Vorgang aus dem gewöhnlichen Leben, um unsere Bewegungserscheinung daran zu erläutern.

Aus dem Fenster eines (vorläufig*) in Ruhe befindlichen) Eisenbahnwagens wird ein Körper O (Fig. 38) mit der Geschwindigkeit c in der Richtung ON entsandt, gleichzeitig werde derselbe in der Richtung OX mit der Beschleunigung p fortgetrieben.

Es soll der Weg gefunden werden, welchen O in Wirklichkeit einschlägt.

Die beiden Richtungen, welche übrigens ganz willkürlich gewählt werden können, mögen den Winkel a mit einander einschliessen.

Wenn wir p erdwärts (lothrecht) gerichtet einführen, so wird damit zugleich (wie oben schon angedeutet), ein natürlicher Bewegungsvorgang, der unter dem Namen Wurfbewegung bekannt ist (und § 47 ausführlicher behandelt wird), zur Darstellung gebracht.

---

*) Später wird dieser Fall dadurch erweitert, dass wir den Körper O aus dem in Bewegung begriffenen Wagen absenden.

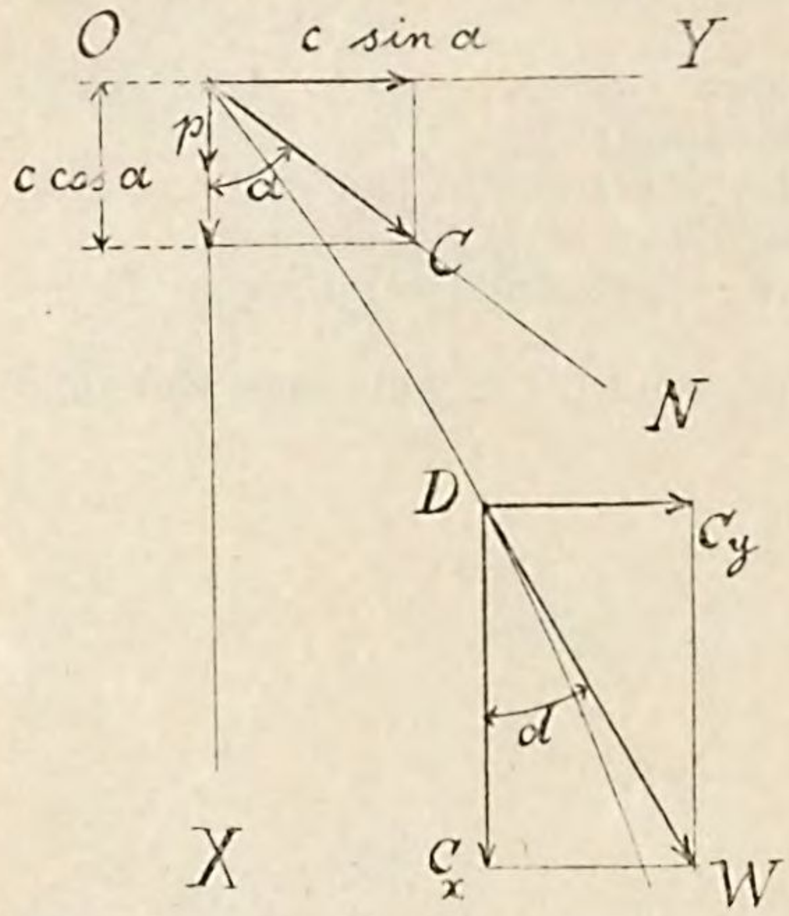


Fig. 38.

Wir zerlegen zunächst die Geschwindigkeit c nach den beiden senkrecht zu einander stehenden Achsenrichtungen OX OY, von denen die OX mit der Richtung der Beschleunigung p zusammenfallen mag.

Auch vergessen wir nicht, dass die Seitengeschwindigkeiten

$$c \,.\, \sin a \quad \text{und} \quad c \,.\, \cos a,$$

welche wir nun anstatt der ursprünglich gegebenen Geschwindigkeit c einführen, auch nur gleichförmig sein können.

Wir haben demnach aufzufassen die Bewegung in der OY als eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit

$$c \,.\, \sin a,$$

in der OX als eine gleichförmig beschleunigte mit der Beschleunigung p und der Anfangsgeschwindigkeit

$$c \,.\, \cos a.$$

Demnach ist nach Verlauf von t Sekunden die Geschwindigkeit:

$$c_x = c \,.\, \cos a + p \,.\, t \quad \text{in der } X\text{-Richtung} \quad . \;.\;.\;.\;. \quad 65$$

$$c_y = c \,.\, \sin a \quad \text{„ „ } Y\text{- „} \quad . \;.\;.\;.\;. \quad 66$$

und hieraus:

$$w = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad \text{„ „ Bahnlinie} \quad . \;.\;.\;.\;. \quad 67$$

der Grösse nach und durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} d = \frac{c_y}{c_x} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 68$$

der Richtung nach vollständig bestimmt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir jederzeit die Frage:

Wie und in welcher Richtung bewegt sich der Punkt?

beantworten.

Es wäre nun noch zur völligen Klarlegung der Bewegung die Frage zu beantworten:

Wo bewegt sich der Punkt am Ende der Zeit t,

d. h. wie weit hat er sich vom Ausgangspunkte bezw. von den beiden Achsen OX und OY entfernt?

Während der t Sekunden ist zurückgelegt der Weg:

$$x = c \,.\, \cos a \,.\, t + \frac{p t^2}{2} \quad \text{in der } X\text{-Richtung} \quad . \;.\;. \quad 69$$

$$y = c \,.\, \sin a \,.\, t \quad \text{„ „ } Y\text{- „} \quad . \;.\;. \quad 70$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lässt sich für jede Zeitdauer t der Ort D bestimmen, an welchem der Punkt sich befindet, also jede gewünschte Zahl von Punkten der wirklich eingeschlagenen Bahnlinie, diese demnach selbst auffinden.

§ 44.

Um diejenige mathematische Formel, welche das Bewegungsgesetz ausdrückt, zu erhalten, setzt man aus der Gleichung

$y = c \,.\, \sin a \,.\, t$ den Werth $t = \dfrac{y}{c \,.\, \sin a}$

in die Gleichung für x ein. Dann folgt:

$$x = \frac{c \,.\, \cos a}{c \,.\, \sin a}\, y + \frac{p}{2}\, \frac{1}{(c \,.\, \sin a)^2} \cdot y^2 \quad . \; . \; 71$$

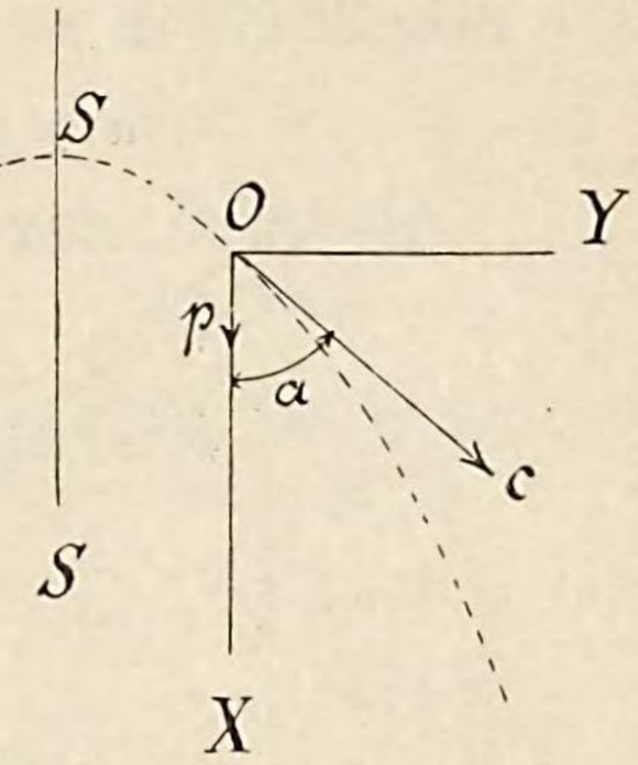


Fig. 39.

Diese Gleichung ist die einer Parabel, deren Scheitelpunkt S nicht mit dem Anfangspunkte O des Achsenkreuzes zusammenfällt, aber deren Hauptachse SS gleichlaufend der OX-Achse bezw. der Beschleunigungsrichtung p ist (Fig. 39).

Somit ist erwiesen, dass durch Zusammensetzung ungleichartiger einfacher (also geradliniger) Bewegungen krummlinige Bewegungen entstehen.

Für $a = 90^0$ ist

$\sin 90^0 = 1$

$\cos 90^0 = 0$

und O zugleich der Scheitelpunkt S der Parabel (Fig. 40);

für $a > 90^0$ ist

$\sin a$ positiv,

$\cos a$ negativ (Fig. 41),

was bei Anwendung der obigen Hauptgleichungen auf diese besonderen Fälle berücksichtigt werden muss.

Ist demnach $a > 90^0$, so wird der Scheitel S erst im weiteren Verlaufe der Bewegung erstiegen.

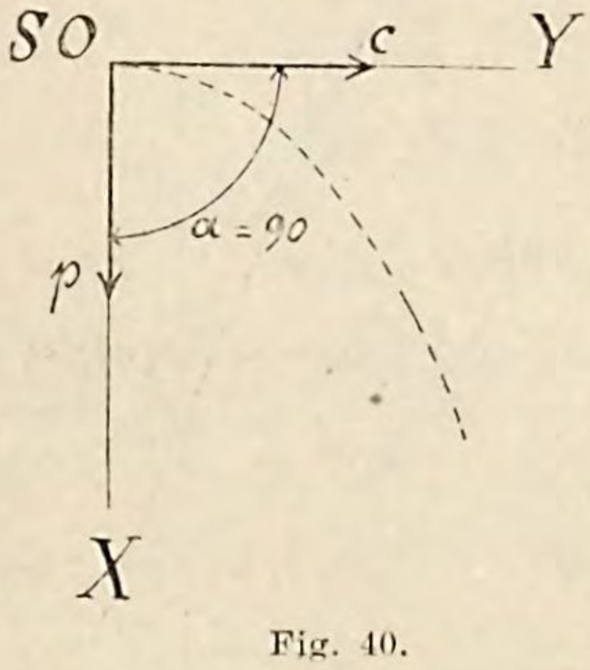


Fig. 40.

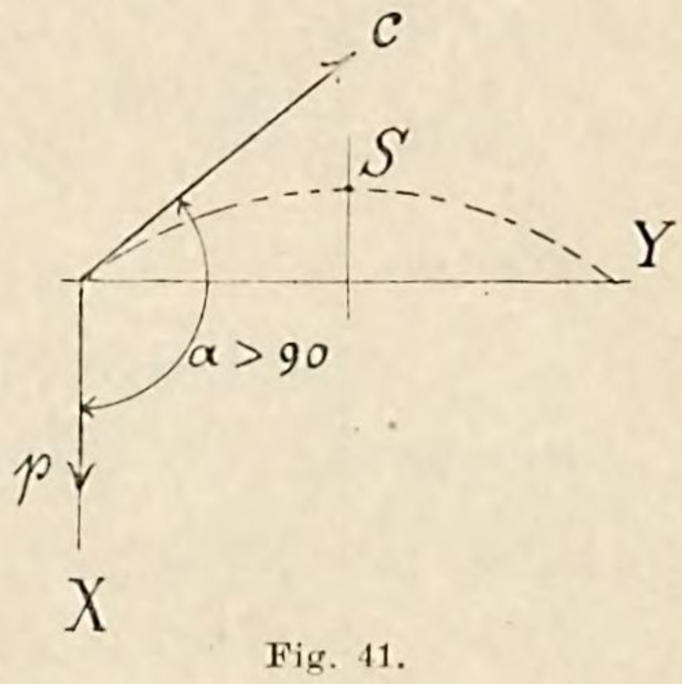


Fig. 41.

Der letzte Bewegungsvorgang ist später (§ 47) unter Wurfbewegung ausführlich behandelt.

§ 45.

Aufgaben.

Beispiel 26: Es soll die krumme Linie verzeichnet werden, welche der mittlere Wasserfaden eines Wasserstrahles nach seinem Austritt aus dem sogen. Gerinne bildet (Fig. 42).

Ist c, ebenso der Winkel a, welchen c mit der Lothrechten einschliesst, sowie p die Beschleunigung in der Richtung dieser Lothrechten bekannt, so ist, wie oben gefunden wurde, die Gleichung der gesuchten Parabel-Linie, nach welcher der Wasserstrahl ausfliesst:

$$x = \cot a \cdot y + \frac{p}{2}\, \frac{1}{c^2 \sin^2 a} \cdot y^2,$$

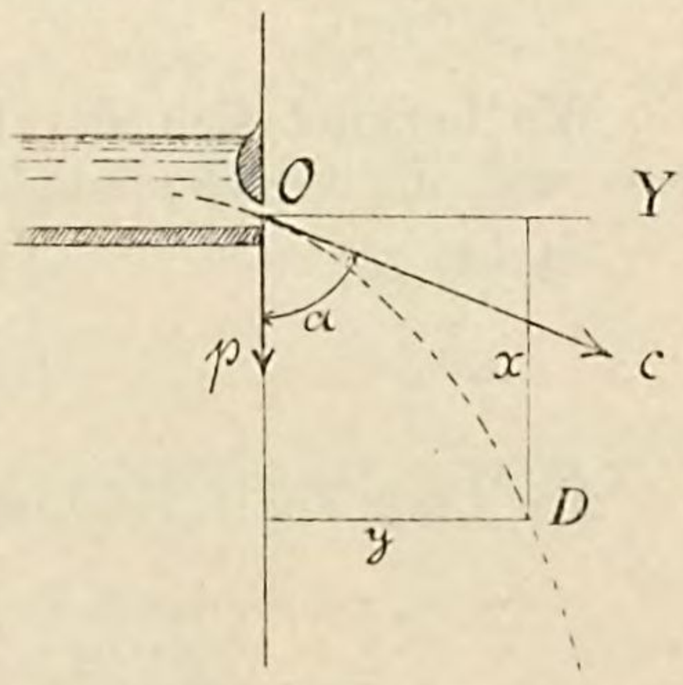


Fig. 42.

wonach sich für jedes angenommene y das dazu gehörige x, oder mit anderen Worten jede beliebige Anzahl von Punkten D der Parabel-Linie finden lässt.

Zahlenbeispiele:

Beispiel 27: Es sei (nach Fig. 43):

$$a = 60^0, \quad c = 20 \text{ m}, \quad p = 10 \text{ m}.$$

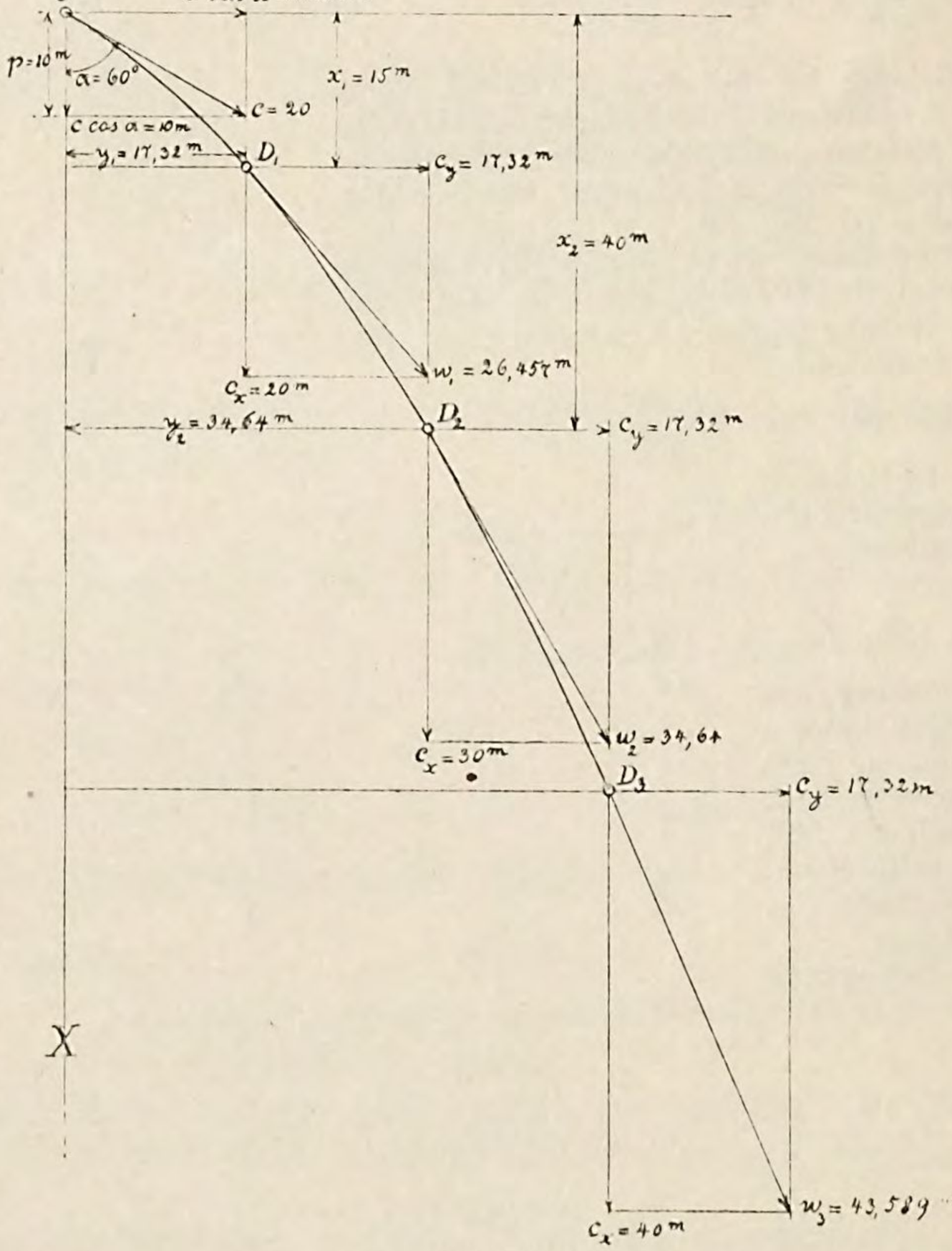


Fig. 43.

Wo befindet sich der Punkt O am Ende der 1., 2., 3. Sek. und wie gross sind die Geschwindigkeiten in diesen Punkten?

Es ist

$$\cos a = 0{,}5,$$
$$\sin a = 0{,}866.$$

Am Ende der 1. Sek. ist O nach D_1 gelangt, und es ist für diese Lage:

$$c_x = c \,.\, \cos a + p \,.\, 1 = 20 \,.\, 0{,}5 + 10 \quad = 20 \text{ m}$$
$$c_y = c \,.\, \sin a \qquad = 20 \,.\, 0{,}866 \qquad = 17{,}32 \text{ m}$$
$$w_1 = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \qquad = \sqrt{20^2 + 17{,}32^2} = 26{,}457 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} d_1 = \frac{c_y}{c_x} = \frac{17{,}32}{20} = 0{,}866$$

$$d_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 41^0$$

$$x_1 = c \cdot \cos a \cdot 1 + \frac{p\,1^2}{2} = 20 \cdot 0{,}5 + \frac{10}{2} = 15 \text{ m}$$

$$y_1 = c \cdot \sin a \cdot 1 = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32 \text{ m}.$$

Die Entfernung (Sehne) OD_1 ergiebt sich aus der Gleichung:

$$OD_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{15^2 + 17{,}32^2} = 22{,}9 \text{ m}.$$

Am Ende der 2. Sek. befindet sich O im Punkte D_2 und es ist:

$$c_x = c \cos a + p \cdot 2 = 20 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 2 = 30 \text{ m},$$

$$c_y = c \sin a = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32 \text{ m},$$

$$w_2 = \sqrt{{c_x}^2 + {c_y}^2} = \sqrt{30^2 + 17^2} = 34{,}64 \text{ m},$$

$$\operatorname{tg} d_2 = \frac{c_y}{c_x} = \frac{17{,}32}{30} = 0{,}577 \text{ m},$$

$$d_2 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 30^0$$

$$x_2 = c \cdot \cos a \cdot 2 + \frac{p \cdot 2^2}{2} = 20 \cdot 0{,}5 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 40 \text{ m},$$

$$y_2 = c \cdot \sin a \cdot 2 = 20 \cdot 0{,}866 \cdot 2 = 34{,}64 \text{ m}.$$

Die Entfernung (Sehne) OD_2 folgt nach der Gleichung:

$$OD_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \sqrt{40^2 + 34{,}64^2} = 52{,}91 \text{ m}.$$

Am Ende der 3. Sek. befindet sich O im Punkte D_3 und es ist für diese Lage:

$$c_x = c \cdot \cos a + p \cdot 3 = 20 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 3 = 40 \text{ m},$$

$$c_y = c \cdot \sin a = 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32 \text{ m},$$

$$w_3 = \sqrt{{c_x}^2 + {c_y}^2} = \sqrt{40^2 + 17{,}32^2} = 43{,}589 \text{ m},$$

$$\operatorname{tg} d_3 = \frac{c_y}{c_x} = \frac{17{,}32}{40} = 0{,}433 \text{ m},$$

$$d_3 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 23^0\,30'$$

$$x_3 = c \cdot \cos a \cdot 3 + \frac{p \cdot 3^2}{2} = 20 \cdot 0{,}5 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 75{,}0 \text{ m},$$

$$y_3 = c \cdot \sin a \cdot 3 = 20 \cdot 0{,}866 \cdot 3 = 51{,}96 \text{ m},$$

$$OD_3 = \sqrt{{x_3}^2 + {y_3}^2} = \sqrt{75^2 + 51{,}96^2} = 91{,}0 \text{ m}.$$

In umstehender Figur 43 sind die Rechnungsergebnisse eingetragen.

Beispiel 28: Es sei für:

$$a = 90^0, \quad c = 20 \text{ m}, \quad p = 10 \text{ m},$$

die Bahnlinie zu berechnen.

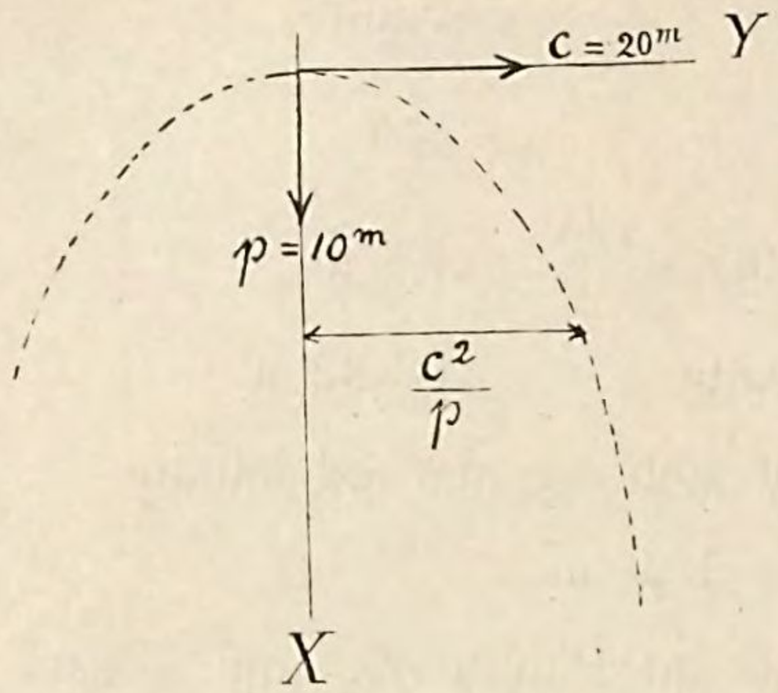


Fig. 44.

Da

$$\cos 90^0 = 0, \quad \sin 90^0 = 1,$$

so ist:

$$c_x = pt, \qquad c_y = c,$$

$$x = \frac{pt^2}{2}, \qquad y = ct,$$

$$x = \frac{p}{2}\,\frac{1}{c^2}y^2, \qquad y = \sqrt{2 \cdot \frac{c^2}{p} \cdot x}.$$

Letztere Gleichung drückt das Krümmungsgesetz einer Parabel aus, deren Scheitelpunkt S mit dem Anfangspunkte des Achsenkreuzes zusammenfällt und deren Parameter (doppelte Ordinate im Brennpunkte) $2\frac{c^2}{p}$ ist.

Für	$t = 1$	Sek. ist	$x_1 =$	5 m;	$y_1 =$	20 m
	$t = 2$	„ „	$x_2 =$	20 m;	$y_2 =$	40 m
	$t = 3$	„ „	$x_3 =$	45 m;	$y_3 =$	60 m
	$t = 4$	„ „	$x_4 =$	80 m;	$y_4 =$	80 m
	$t = 5$	„ „	$x_5 =$	125 m;	$y_5 =$	100 m.

Die Parabel lässt sich verzeichnen.

Deutlich ausgeprägte Parabellinien der zuletzt genannten Art kommen auf dem im Aufbereitungswesen angewendeten sogen. Rittinger Stossherde, ebenfalls durch Zusammensetzung von gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegungen zu stande.

B.

Die Bewegungen erfolgen im Raume.

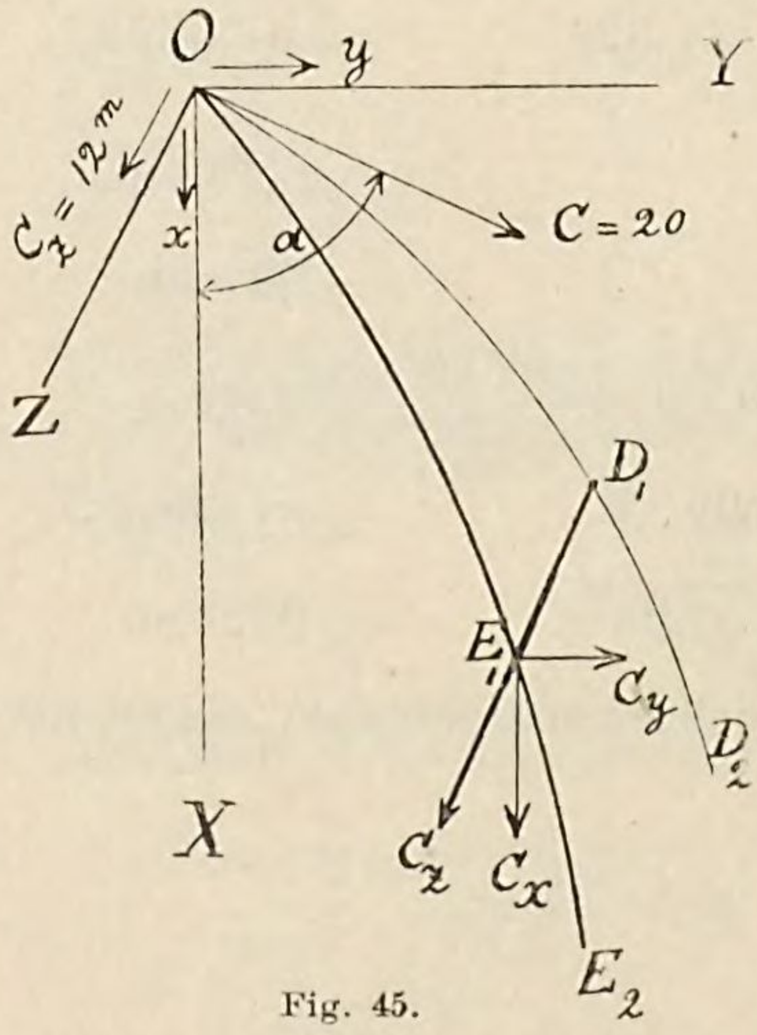


Fig. 45.

§ 46.

Bewegt sich der oben genannte Eisenbahnwagen (§ 43) mit der gleichförmigen Geschwindigkeit 12 m in der Richtung OZ in dem Augenblicke, in welchem der Körper aus dem Fenster geworfen wird, so nimmt O auch diese Geschwindigkeit mit auf den Weg und schreitet sonach gleichzeitig in der Richtung OZ in je einer Sek. um die Wegeslänge $c_z = 12$ m fort.

Die Bahnlinie, wie sie sich jetzt dem an der Eisenbahn stehenden Beobachter zeigt, ist OE_1E_2. Sie liegt auf einem parabolischen Cylinder, welcher entsteht, wenn die oben gefundene Parabel OD_1D_2 in der Richtung OZ fortschreitet.

E_1 ist ein Punkt der wirklichen Bahnlinie, welcher am Ende der 1. Sek. erreicht wird, wenn

$D_1E_1 =$ und parallel $z_1 = 12$ m

gemacht wird.

Entsprechend sind die am Ende der 2., 3. Sek. erreichten Punkte
$E_2 E_3$ . . . zu finden.
$D_2 E_2 = 24$ m und parallel OZ,
$D_3 E_3 = 36$ m „ „ OZ.
Auch durch Rechnung lässt sich nach dem früher gezeigten Verfahren der Weg bestimmen.

C.

Als besondere Fälle der Zusammensetzung einer gleichförmigen und einer ungleichförmigen Bewegung können
a) die Wurfbewegung
und
b) die kreisende oder Central-Bewegung
angesehen werden, welche nun im Folgenden etwas näher betrachtet werden sollen.

a.

Die Wurfbewegung.

§ 47.

Das hier eingeschlagene Verfahren ist ganz dem auf den Seiten 45 u. ff. entsprechend.

Beispiel 29: Der Punkt O (Kanonenkugel ohne Rücksicht auf Masse) werde mit der Geschwindigkeit $c = 200$ m, unter dem sog. Elevationswinkel $e = 60^0$ schräg aufwärts geworfen.

Die erdwärts gerichtete Beschleunigung sei . . . . . $g = 10$ m.

Es soll die zusammengesetzte wirkliche Bewegung gefunden werden.

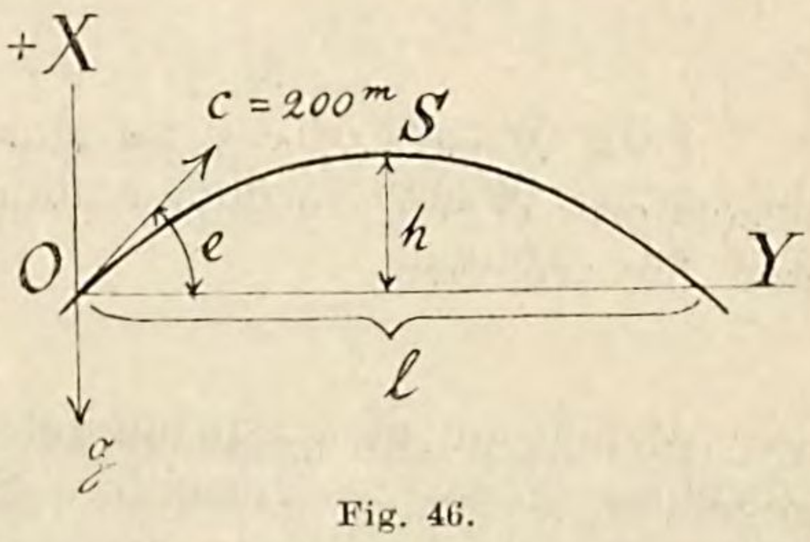


Fig. 46.

Wir legen wieder durch O ein rechtwinkeliges Achsenkreuz, bezeichnen aber (da es sich hauptsächlich um die oberhalb der OY liegenden Bahnlinie handelt) die nach aufwärts gerichtete Achse OX als positiv. Die nach abwärts gerichtete Beschleunigung g ist sodann als negativ einzuführen.

Nach Verlauf von $t = 1$ Sekunde ist:

$$c_x = c \cdot \sin e - g \cdot t = 200 \cdot 0{,}866 - 10 \cdot 1 = 163{,}2 \text{ m},$$
$$c_y = c \cdot \cos e = 200 \cdot 0{,}5 = 100{,}0 \text{ m},$$
$$w_1 = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{163{,}2^2 + 100^2} = 191{,}5 \text{ m},$$
$$\operatorname{tg} d_1 = \frac{c_x}{c_y} = \frac{163{,}2}{100} = 1{,}632 \text{ m},$$
$$d_1 = \ldots = 58^0\,30'$$
$$x_1 = c \cdot \sin e \cdot t - \frac{g t^2}{2} = 200 \cdot 0{,}866 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 168{,}2 \text{ m},$$
$$y_1 = c \cdot \cos e \cdot t = 200 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 100{,}0 \text{ m},$$
$$OD_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{168{,}2^2 + 100{,}0^2} = 195{,}7 \text{ m}.$$

Aus der vorletzten Gleichung folgt noch ohne Weiteres allgemein: $t = \frac{y}{c \cdot \cos e}$ als diejenige Zeit, welche erforderlich ist, um in wagerechter Richtung eine Strecke y zurückzulegen.

Nach Verlauf von $t = 2$ Sekunden ist:

$$c_x = 200 \cdot 0{,}866 - 10 \cdot 2 \qquad = 150{,}2 \text{ m},$$
$$c_y = 200 \cdot 0{,}5 \qquad = 100{,}0 \text{ m},$$
$$w_2 = \sqrt{150{,}2^2 + 100^2} \qquad = 180{,}3 \text{ m},$$
$$\operatorname{tg} d_2 = \frac{150{,}2}{100} \qquad = 1{,}502 \text{ m},$$
$$d_2 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 56^0\,20',$$
$$x_2 = 200 \cdot 0{,}866 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 326{,}4 \text{ m},$$
$$y_2 = 200 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \qquad = 200{,}0 \text{ m},$$
$$OD_2 = \sqrt{326{,}4^2 + 200^2} \qquad = 383{,}0 \text{ m},$$

Es sind die Werthe für $t = 3$ und 4 Sek. zu berechnen.

§ 48.

Die Wurfhöhe h ist der grösseste Werth von x, nämlich derjenige besondere Werth, welcher dem Scheitelpunkte der Wurflinie entspricht, und für welchen

$$c_x = 0,$$

also gleichsam die ursprünglich dem geworfenen Körper mit auf die Reise gegebene aufwärts gerichtete Seitengeschwindigkeit $c \cdot \sin e$ durch die abwärts gerichtete Beschleunigung g aufgezehrt ist.

Sonach ergiebt sich die gesuchte Wurfhöhe aus:

$$h = x = c \cdot \sin e \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$

und der Bedingungsgleichung:

$$c_x = c \cdot \sin e - g \cdot t = 0.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung folgt zunächst diejenige Zeit:

$$t = \frac{c \cdot \sin e}{g} = \frac{200 \cdot 0{,}866}{10} = 17{,}32 \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72$$

welche der geworfene Körper gebraucht, um von O bis zum Scheitel S zu gelangen.

Setzen wir diesen bestimmten Werth von t in die allgemeine Gleichung für x ein, so ergiebt sich der gesuchte Sonderwerth, nämlich die Wurfhöhe:

$$h = x = c \cdot \sin e \frac{c \cdot \sin e}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \sin^2 e}{g^2}$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cdot \sin^2 e}{g} = \frac{200^2 \cdot 0{,}866^2}{2 \cdot 10} = 1500 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad 73$$

Der grösste Werth, den $\sin e$ überhaupt annehmen kann, ist $+1$ und wird erreicht für $e = 90^0$, demnach ergiebt sich für dieselben Werthe von c und g, die grösste Wurfhöhe, wenn $e = 90^0$ gesetzt wird, nämlich:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{200^2}{10} = 2000 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74$$

Der Körper steigt demnach am höchsten, wenn man ihn lothrecht in die Höhe wirft.

§ 49.

Die Wurfweite l ist derjenige besondere Werth von y, für welchen der geworfene Körper wieder in der durch den Ausgangspunkt gelegten wagerechten Linie ankommt, also für welchen:

$$x = 0 \quad \text{ist.}$$

Hiernach ergiebt sich die Wurfweite aus den beiden Gleichungen:

$$l = y = c \cdot \cos e \cdot t,$$

$$x = c \cdot \sin e \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0.$$

Aus der letzten Bedingungsgleichung folgt diejenige Zeit:

$$t = \frac{2c \cdot \sin e}{g} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 0{,}866}{10} = 34{,}64 \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 75$$

welche auf den Weg OB verwendet wird (Fig. 47).

Wird dieser bestimmte Werth t in die allgemeine Gleichung für y eingesetzt, so ergiebt sich der gesuchte Sonderwerth, nämlich die Wurfweite:

$$l = y = c \cdot \cos e \frac{2c \cdot \sin e}{g}$$

$$l = \frac{c^2 \cdot \sin 2e}{g} = \frac{200^2 \cdot \sin (2 \cdot 60)}{10} = 3464 \text{ m} \quad . \quad . \quad 76$$

Der grösseste Werth, den $\sin 2e$ überhaupt annehmen kann, ist $+1$ und wird erreicht für

$$2e = 90^0,$$

$$e = 45^0.$$

Hiernach ist bei denselben Werthen von c und g die grösseste erreichbare Wurfweite:

$$l_{max} = \frac{c^2 \cdot \sin (2 \,.\, 45)}{g} = \frac{c^2}{g} = 2h_{max} = 4000 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad 77$$

und die entsprechende Wurfhöhe:

$$h = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cdot \sin^2 45}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{c^2}{g} = \frac{1}{4} l_{max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78$$

Für jeden Winkel e, welcher kleiner oder grösser als 45^0 ist, ergiebt sich eine kleinere Wurfweite.

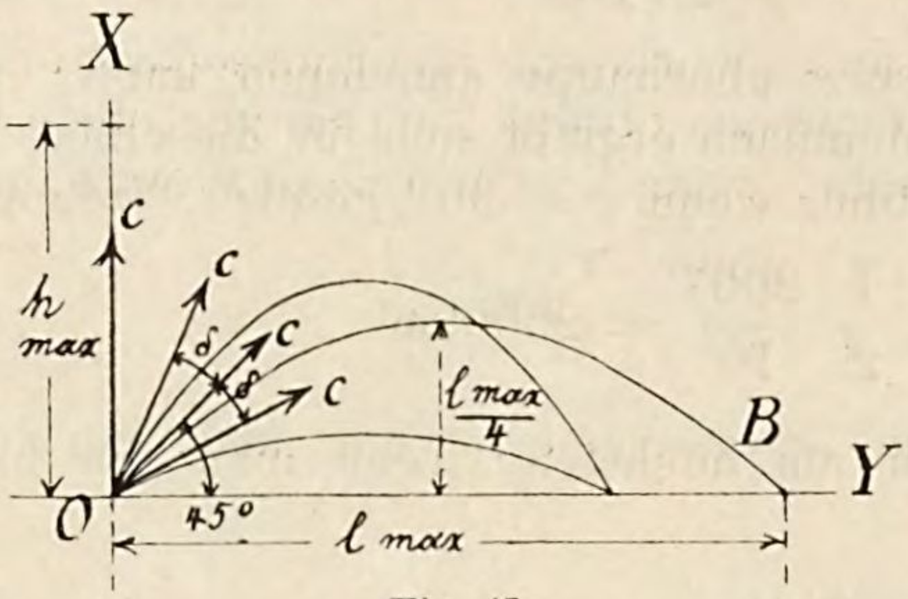


Fig. 47.

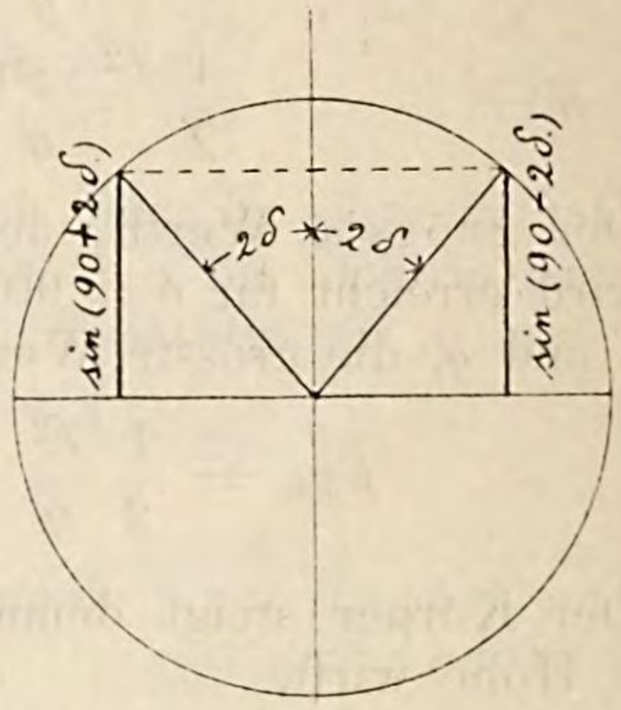


Fig. 48.

Denn es geht aus der allgemeinen Gleichung für die Wurfweite:

$$l = \frac{c^2 \cdot \sin 2e}{g}$$

hervor, dass sowohl für $e = 45^0 + \delta$,

als auch für $e = 45^0 - \delta$

doch l denselben Werth behält, da

$$\sin 2(45^0 + \delta) = \sin 2(45^0 - \delta),$$

$$\sin (90^0 + 2\delta) = \sin (90^0 - 2\delta) \text{ ist.}$$

Ein mit derselben Geschwindigkeit c und bei derselben Beschleunigung g, aber unter den Winkeln:

$$e = 45^0 + \delta$$

oder:

$$e = 45^0 - \delta$$

abgeworfener Körper, wird demnach dieselbe Wurfweite:

$$l = \frac{c^2}{g} \sin 2(45^0 \pm \delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 78$$

erreichen.

Dagegen die zugehörigen Zeiten sind verschieden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{2c}{g} \sin (45^0 + \delta) \\ t_2 &= \frac{2c}{g} \sin (45^0 - \delta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 79$$

Beim Werfen von Geschossen wählt man die steilere Wurfrichtung $(45^0 + \delta)$, wenn der Gegenstand von oben her zertrümmert werden soll; die flachere, unter dem Winkel $(45^0 - \delta)$ geworfene Kugel dagegen setzt, nachdem sie das Ziel getroffen hat, ihre Bewegung fort und richtet bei diesem Abprallen (Ricochettiren) und Weiterhüpfen Verheerungen an.

In Wirklichkeit wird jeder geworfene Körper in Folge des Luft-

widerstandes eine sogen. ballistische Kurve beschreiben, die um so mehr von der Parabel abweicht, je grösser die Geschwindigkeit und der Querschnitt des Körpers ist, kurz, je grösser der Widerstand ist, welchen der geworfene Körper überwinden muss, wenn er sich seine Gasse reisst.

§ 50.

Aufgaben.

Beispiel 30: Von einem Punkte O, welcher $x = 20$ m über der wagerechten Linie AB liegt, wird ein Körper horizontal mit einer Geschwindigkeit $c = 500$ m abgesandt; die Beschleunigung sei $g = 10$ m.

a) Nach welcher Zeit erreicht er die Wagerechte AB?

b) In welchem Abstande y liegt dieser Punkt?

c) Um wie viel sinkt der Punkt O in der ersten Sekunde?

a) $t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2$ Sek.

b) $y = \sqrt{\frac{2c^2 \cdot x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500^2 \cdot 20}{10}} = 1000$ m oder

$y = c \cdot t = 500 \cdot 2 = 1000$ m,

c) $x_1 = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5$ m.

Beispiel 31: Unter einem Winkel $e = 15^0$ soll in der Entfernung . . . . . $l = 8000$ m ein Gebäude beschossen werden.

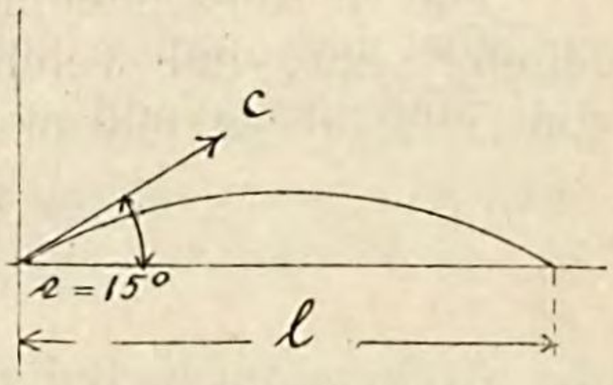


Fig. 49.

a) Mit welcher Geschwindigkeit c muss das Geschoss abgehen?

$$l = \frac{c^2 \cdot \sin 2e}{g}$$

$$c = \sqrt{\frac{lg}{\sin 2e}} = \sqrt{\frac{8000 \cdot 10}{\sin 30}} = 400 \text{ m}.$$

b) Nach welcher Zeit schlägt die Kugel ein?

$$t = \frac{2c \cdot \sin e}{g} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 0{,}2588}{10} = 20{,}7 \text{ Sek.}$$

c) Wie gross ist die Wurfhöhe?

$$h = \frac{c^2 \cdot \sin^2 e}{2g} = \frac{400^2 \cdot 0{,}2588^2}{2 \cdot 10} \text{ . . rund} = 536 \text{ m}.$$

d) Wann wird der Scheitel der Wurflinie erreicht?

$$t = \frac{c \cdot \sin e}{g} = \frac{400 \cdot 0{,}2588}{10} = 10{,}35 \text{ Sek.}$$

e) Mit welcher Geschwindigkeit w erreicht die Kugel das Ziel?

$$w = c = 400 \text{ m}.$$

Beispiel 32: Eine Kanonenkugel, welche mit der Geschwindigkeit $c = 500$ m das Rohr verlässt, soll eine Wurfweite . . . . . $l = 12\,500$ m erreichen. Unter welchem Winkel e muss das Rohr gegen die Wagerechte geneigt sein? Auf Luftwiderstand soll keine Rücksicht genommen werden.

$$l = \frac{c^2 \cdot \sin 2e}{g}$$

$$\sin 2e = \frac{g \cdot l}{c^2} = \frac{10 \cdot 12\,500}{500^2} = \frac{1}{2}$$

$$2e = 30^0$$

$$e = 15^0.$$

Die grösste erreichbare Wurfweite wäre (für $e = 45^0$):

$$l_{max} = \frac{c^2}{g} = \frac{250\,000}{10} = 25\,000 \text{ m},$$

die entsprechende Wurfhöhe:

$$h = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cdot \sin^2 45^0}{g} = 6250 \text{ m}.$$

Die 4 Riesenkanonen, welche Krupp für die italienische Regierung geliefert hat, und welche 1886 geprüft wurden, sollten eine Schussweite von 5000 bis 10 000 m haben. Nach den Versuchen betrug die Elevation:

$e = 2^0\,29'$ bei 2432 m Schussweite,

$e = 18^0$ „ 12133 m „

die Anfangsgeschwindigkeit:

$$c = 550 \text{ m}^*).$$

Nach unserem obigen Beispiele war (ohne Rücksicht auf Luftwiderstand):

$e = 15^0$ bei 12 500 m Schussweite.

b.

Die Central-Bewegung.

§ 51.

Einleitende Bemerkungen. Bei der Wurfbewegung wurde angenommen, dass die erdwärts gerichtete Beschleunigung ihre Richtung nicht ändere. Diese Annahme ist für die verhältnissmässig kurzen Wegestrecken, mit welchen die von uns geworfenen Körper die Erdoberfläche bestreichen, wohl zulässig, immerhin aber ungenau. Genau genommen ist eine Wurfbewegung, wie wir solche im Voranstehenden behandelten, kein natürlicher Vorgang.

---

*) Näheres siehe Z. d. Vereins deutsch. Ing. 1887, S. 741 u. ff.

Denn erfahrungsgemäss ist die Erdbeschleunigung stets nach dem Mittelpunkte (Centrum) der Erde gerichtet, bleibt also nicht gleichlaufend, sondern verändert beständig ihre Richtung. Würde der geworfene Körper nicht schliesslich durch die feste Erdoberfläche an seiner Fortbewegung verhindert, schrumpfte vielleicht der Erdball mit allen seinen Eigenschaften (Anziehungskraft) in seinen Mittelpunkt zusammen, so würde unser geworfener Körper *O* in Folge der ihm mit auf den Weg gegebenen (gleichförmigen) Geschwindigkeit und der nach dem Erdmittelpunkte gerichteten Beschleunigung stets eine krummlinige, aber nur im besonderen Falle eine parabolische, in allen anderen Fällen eine kreisförmige, eine elliptische oder hyperbolische Bahn beschreiben (siehe unten Seite 62).

Solche kreisenden Bewegungen (Mittelpunktsbewegungen, Centralbewegungen) führt z. B. unsere Erde, führen sämmtliche Planeten um die Sonne, ebenso der Mond um die Erde aus.

Man darf annehmen, dass alle diese Himmelskörper bei ihrer Geburt, d. i. beim Ausgehen von der Mutter Sonne, eine gewisse Geschwindigkeit mit auf die Reise nahmen, dazu aber von Anbeginn ihrer Wanderschaft unaufhörlich nach dieser hin eine Beschleunigung p erfuhren. Gegenüber dem unermesslichen Weltenraume sind die Planeten auch nur Punkte, die bei ihrer Geburt in den Weltenraum hineingeworfen wurden und von da an ihre kreisende Bewegung begannen.

Wir gehen noch weiter: Als solche um einen Punkt (Mittelpunkt, Brennpunkt) kreisende Bewegung kann überhaupt jede krummlinige Bewegung aufgefasst werden, da ja bekanntlich eine jede krumme Linie sich durch einen Kreisbogen ersetzen lässt.

Bei der folgenden Behandlung der kreisenden (Central-) Bewegung wollen wir wieder von dem bei der Wurfbewegung geschilderten Vorgange ausgehen:

Der Punkt *O* werde mit einer Geschwindigkeit v abgesandt, so dass er sich in der Richtung *ON* gleichförmig fortbewegen würde. Gleichzeitig aber werde er senkrecht zu v mit der Beschleunigung p fortgetrieben. Auch im weiteren Verlaufe der Bewegung soll p stets rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung stehen (also nach dem Mittelpunkte der Bewegung gerichtet sein).

Dann ist die Mittelbewegung aus diesen ungleichartigen Seitenbewegungen wieder krummlinig und gekennzeichnet durch den Halbmesser r desjenigen Kreises, welcher an Stelle der Krümmung gesetzt werden kann.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, in welcher Beziehung die genannten Grössen

$$v, \quad p, \quad r$$

zu einander stehen müssen.

§ 52.

Es gelten für die Zusammensetzung der Bewegungen dieselben Regeln, welche oben (§ 25) ermittelt und angewandt sind.

Nach dem sehr klein angenommenen Zeittheilchen t_1 wird *O* nach *D*, einem Punkte des Kreises (oder der krummen Linie) vom Halbmesser r gelangt sein, wenn *D* so gewählt ist, dass

$$BD = OA = v \cdot t_1,$$

$AD =$ und parallel $OB = \frac{p \cdot t_1^{\,2}}{2}$ ist.

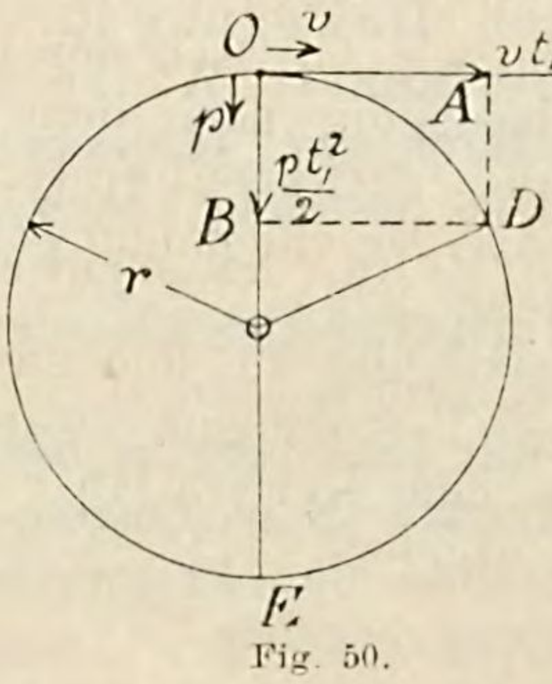


Fig. 50.

Nun ist aber nach einem geometrischen Satze:

$$BD^2 = OB \cdot BE$$
$$= OB\,(OE - OB)$$
$$= OB \cdot OE - OB^2$$

oder wenn man für die geometrischen Werthe die der Mechanik einsetzt:

$$v^2 \cdot {t_1}^2 = \frac{p \cdot {t_1}^2}{2} \cdot 2r - \frac{p^2 \cdot {t_1}^4}{4}.$$

Je kleiner t_1, desto geringer ist der Fehler, den man begeht, wenn man das Glied $\frac{p^2 \cdot {t_1}^4}{4}$ gegen das Glied $\frac{p \cdot {t_1}^2}{2} \cdot 2r$ vernachlässigt.

Für einen Zeitpunkt, also einen Zeitabschnitt t_1 geringster Dauer, ist demnach:

$$v^2 \cdot {t_1}^2 = \frac{p \cdot {t_1}^2}{2} 2r$$

oder:

$$\boxed{v^2 = p \cdot r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 80$$

$$r = \frac{v^2}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 81$$

$$p = \frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 82$$

Es wird im Folgenden auch genannt werden:

v die Umfangsgeschwindigkeit,

w die Winkelgeschwindigkeit;

dann ist:

v der Bogenweg in der Entfernung r vom Drehpunkte in 1 Sek.,

w „ „ „ „ „ 1 „ „ „ „ 1 Sek.

und es gilt:

$$\frac{v}{w} = \frac{r}{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83$$

$$v = r \cdot w; \quad \text{oder} \quad w = \frac{v}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84$$

Dann lässt sich auch schreiben:

$$p = \frac{v^2}{r} = r \cdot w^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85$$

Diese Huygens'sche Gleichung drückt das Gesetz der krummlinigen Bewegung um einen Mittelpunkt vollständig und auf die einfachste Weise aus.

Durch zwei Grössen der Gleichung ist stets die dritte bestimmt.

Die beständig nach dem Mittelpunkte der Bewegung hin erforderliche, hinstrebende, Beschleunigung p heisst deshalb auch Centripetal-Beschleunigung (Normalacceleration). (Centrum, Mittelpunkt; petere, streben.)

Wir sind hier zu dem eigenthümlichen Ergebnisse gelangt, dass ungleichartige Bewegungen, welche einen rechten Winkel einschliessen, wohl stets eine krummlinige, aber nicht eine ungleichförmige Mittelbewegung ergeben.

§ 53.

Aus der letzten Gleichung erfolgt auch ohne weiteres:

$$v = \sqrt{p \cdot r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86$$

$$w = \sqrt{\frac{p}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87$$

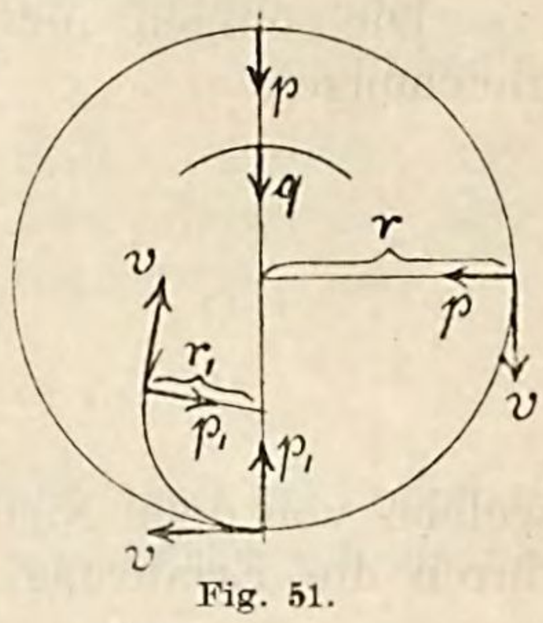


Fig. 51.

d. h. für dieselbe Umfangsgeschwindigkeit v stehen p und r im umgekehrten Verhältnisse; dagegen für dieselbe Winkelgeschwindigkeit w stehen p und r in demselben Verhältniss.

Bezeichnen wir also für dieselbe Winkelgeschwindigkeit w mit:

p die Beschleunigung in der Entfernung r,

q „ „ „ „ „ 1

von dem Bewegungsmittelpunkte, so verhält sich:

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88$$

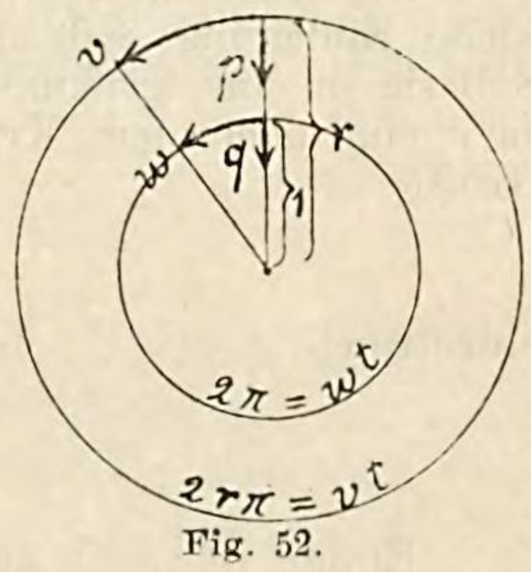


Fig. 52.

und die Beschleunigung in der Entfernung 1 vom Mittelpunkte ist:

$$q = \frac{p}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89$$

der:

$$w = \sqrt{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 90$$

§ 54.

Die Umlaufszeit t für die mit gleichförmiger Umfangsgeschwindigkeit v durchlaufene Kreisbahn ($2r\pi$) ist nach der Gleichung:

$$2r\pi = v \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 91$$

$$t = 2\pi \frac{r}{v} = 2 \cdot \pi \frac{r}{\sqrt{p \cdot r}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^2}{p \cdot r}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r}{p}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{p}{r}}} \quad . \quad . \quad 92$$

$$\boxed{t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{q}} \text{ Sekunden}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93$$

Die Umlaufszeit hängt demnach nur ab von q, der in der Entfernung eins vom Mittelpunkte nach diesem hin gerichteten Beschleunigung, nicht von r.

Für denselben Werth von q werden alle Kreise, selbst elliptische Bahnen, in derselben Zeit durchlaufen. Weiter unten wird unter „Schwingungsbewegung“ darauf hingewiesen, dass diese Gleichung sogar für die ungleichförmige Bewegung in geradlinigen Bahnen gilt, wenn auch hier die Beschleunigung nach demjenigen Punkte hin gerichtet ist, der als Schwingungsmittelpunkt angesehen werden muss.

§ 55.

Die obigen für alle krummlinigen Bewegungen geltenden Grundgleichungen:

$$p = \frac{v^2}{r} = r w^2,$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{q}},$$

welche von dem Niederländer Huygens 1673 aufgestellt wurden, werden durch die Erfahrung bestätigt.

Die träge Masse bewegt sich erfahrungsgemäss geradlinig und gleichförmig (siehe Einleitung § 6) mit der vorhandenen Geschwindigkeit v ungeändert weiter. Soll sie in eine krumme Bahn vom Halbmesser r gezwängt werden, so muss senkrecht zu v eine nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtete Beschleunigung von der Grösse

$$p = \frac{v^2}{r}$$

hinzutreten.

§ 56.

Einige Beispiele aus dem alltäglichen Leben.

Gesetzt, wir hätten in einer Rennbahn an einem Leitseil (Longe) ein Pferd, welches beständig mit der Geschwindigkeit r geradeaus strebte. Wir müssten ein um so grösseres p erzeugen, je kleiner r sein sollte. Mit anderen Worten, wir müssten das Pferd um so stärker mittelst der Leine nach uns hinziehen, je kleiner der Kreis sein sollte, in welchem dasselbe um uns kreisen soll.

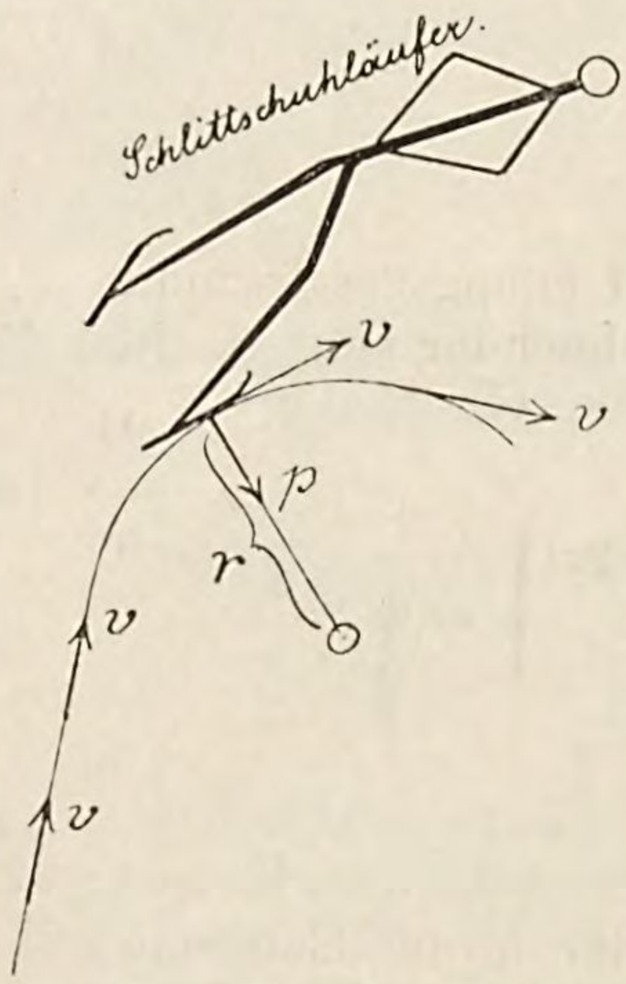


Fig. 53.

Ein Schlittschuhläufer, ein Zweiradfahrer bewegt sich mit der erlangten Geschwindigkeit v geradlinig und gleichförmig weiter, wenn er sich gehen lässt. Jedoch schon durch blosses Neigen (Fallen) des Körpers nach der einen oder anderen Seite hin wird er eine dem Huygens'schen Gesetze entsprechende Bogenbewegung $\left(r = \frac{v^2}{p}\right)$ herbeiführen. Zugleich muss der Läufer seine Schlittschuhe, der Fahrer das vordere Rad, in diejenige Ebene bringen, welche den Bogen tangirt.

Kurz, die Huygens'schen Gleichungen können als die Grundgleichungen aller krummlinigen Bewegungen angesehen werden. Sie gelten allgemein ebensowohl für die Kreisbewegungen der Himmelskörper und der Kurbelwarze der Dampfmaschinen und Pumpen, als auch für die Bogenbewegung des Schlittschuhläufers, ja selbst des Betrunkenen. Sie dienen als Fundament zum Aufbau der Lehre von den Centralkräften und werden uns im Verein mit den Kepler'schen Gesetzen als Brücke zu dem nach Newton genannten Gravitationsgesetze (§ 137) dienen.

Wir werden die Gleichung $r = \frac{v^2}{p}$ sogar benutzen zur Ermittelung der Krümmungshalbmesser von Kurven.

§ 57.

Beispiele.

Für den Maschinentechniker ist die Beantwortung folgender Frage von Wichtigkeit:

Beispiel 33: Es soll die Beschleunigung p gefunden werden, mit welcher der Kolben bezw. die Kurbelwarze einer Dampfmaschine ihre sogen. Totlage D_1 verlässt (Fig. 37), wenn angenommen wird, dass die dazu gehörige Kurbel einen Halbmesser:

$$r = 0{,}5 \text{ m}$$

und im Warzenkreise eine Tangentialgeschwindigkeit

$$v = 2 \text{ m}$$

hat.

Die Normalbeschleunigung (Centripetalbeschleunigung) im Warzenkreise ist:

$$p = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0{,}5} = 8 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94$$

Diese Beschleunigung fällt bei der Totlage des Kolbens mit der Richtung der Kolbenstange bezw. mit der Bewegungsrichtung des Kolbens in diesem Augenblicke zusammen, ist deshalb zugleich die gesuchte Beschleunigung.

Beispiel 34: Mit welcher Geschwindigkeit v müsste ein Körper O an der Oberfläche der Erde wagerecht abgesandt werden, wenn er die Erde umkreisen sollte, solche Bewegung als ausführbar vorausgesetzt?

Es sei angenommen

als Halbmesser dieser Kreisbahn rund	$r = 6\,370\,000$ m,
als senkrecht zur Bewegung (also nach dem Mittelpunkte) gerichtete Erdbeschleunigung	$p = g = 9{,}81$ m.

Dann ergiebt sich nach unserer Gleichung:

$$v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6370000} = 7905 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95$$

Wären wir im Stande, Geschosse mit dieser Geschwindigkeit von den höchsten Bergen der Erde abzusenden, so würden wir sie zu Trabanten der Erde machen.

Schreibt man die Gleichung:

$$v = \sqrt{2g\frac{r}{2}} = \sqrt{2g \cdot h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96$$

so drückt

$$h = \frac{r}{2} = \frac{6\,370\,000}{2} = 3\,185\,000 \text{ m}$$

diejenige Höhe aus, welche unser Körper mit der gleichförmigen Erdbeschleunigung $g = 9{,}81$ m lothrecht durchfallen müsste, um eine Geschwindigkeit zu erlangen, welche jener ermittelten Geschwindigkeit entspricht.

Die Umlaufszeit unserer neuen Trabanten würde betragen:

$$t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2 \cdot 6370000\,\pi}{7905} = 5063 \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97$$

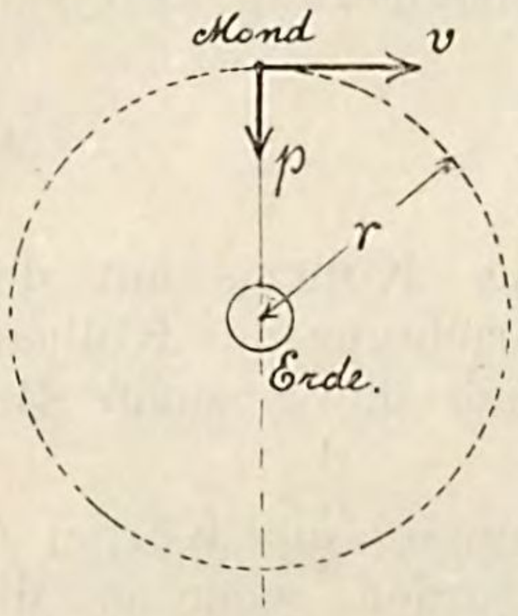
$$= 1 \text{ St. } 24 \text{ M. } 23 \text{ Sek.}$$

Es lässt sich ferner beweisen, dass die Bahnlinie des geworfenen Körpers sein würde:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{eine Ellipse,} & \text{wenn} & v > 7905 \text{ m} & \text{aber} & < 7905\sqrt{2} \text{ m} \\ \text{„ Parabel,} & \text{„} & v = 7905\sqrt{2} \text{ m} & & = 11180 \text{ m} \\ \text{„ Hyperbel,} & \text{„} & v > 11180 \text{ m} & & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 98$$

wäre; wie auch die ursprüngliche Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden möge.

Näheres hierüber: Ritter, Analyt. Mech. 1883, Seite 109.



Beispiel 35: Welche Beschleunigung p ist nach dem Mittelpunkte der Erde erforderlich, um den Mond in seine Kreisbahn um jenen zu zwängen?

Es ist wieder

$$p = \frac{v^2}{r}.$$

Die Geschwindigkeit v des Mondes auf seiner Kreisbahn ergiebt sich aus seiner Umlaufszeit

$$t = 27 \text{ T. } 7 \text{ St. } 43 \text{ Min. } 11\,1/2 \text{ Sek.,}$$

$$= 2\,360\,591{,}5 \text{ Sekunden}$$

und seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte:

$$r = 60 \text{ Erdradien,}$$

$$= 60 \text{ . } 6\,370\,000 \text{ m,}$$

$$= 382\,200\,000 \text{ m.}$$

Dann ist

$$2r\pi = v \cdot t,$$

$$v = \frac{2r\pi}{t} = \frac{2 \text{ . } 382\,200\,000\,\pi}{2\,360\,591{,}5} = \text{rund } 1000 \text{ m} \quad . \quad 99$$

folglich:

$$p = \frac{1000^2}{382\,200\,000} = \text{rund } 0{,}0027 \text{ m} = 2{,}7 \text{ mm.} \quad . \quad 100$$

Beispiel 36: Mit welcher Beschleunigung wird die Erde nach der Sonne hinbewegt?

Als mittlerer Halbmesser der kreisförmig angenommenen Erdbahn gelte . . . . . $r = 20\,000\,000$ Meilen,
als mittlere Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn . . . . . $v = 4$ Meilen,
dann ist:

$$p = \frac{v^2}{r} = \frac{4^2}{20\,000\,000} = 0{,}000\,0008 \text{ Meilen} = 0{,}006 \text{ m} = 6 \text{ mm.}$$

Die Erdbahn würde übergehen aus der Kreisbahn

$$\left.\begin{array}{llll} \text{in eine Ellipse,} & \text{wenn } v > 4 \text{ Meilen} & \text{aber} < 4\sqrt{2} \text{ Meilen} \\ \text{„ Parabel,} & \text{„ } v = 4\sqrt{2} & = 5{,}66 \text{ Meilen} \\ \text{„ Hyperbel,} & \text{„ } v > 5{,}66 \text{ Meilen} & \end{array}\right\} \quad . \quad 101$$

„Wäre von irgend einem anderen Körper (z. B. einem Meteoriten oder einem Kometen) in dem Augenblicke, in welchem derselbe 20 000 000 Meilen von der Sonne entfernt ist, die Geschwindigkeit durch Beobachtung bestimmt worden, so würde man an der Grösse dieser Geschwindigkeit erkennen können, ob der Körper dem Sonnensysteme angehört oder nicht.

Die Bahn würde eine geschlossene (elliptische) oder nicht geschlossene (hyperbolische) Kurve sein, je nachdem die beobachtete Geschwindigkeit kleiner oder grösser war als 5,66 Meilen pro Sekunde.“

(Näheres Ritter, Anal. Mech. 1883, S. 110.)

§ 58.

Bestimmung der Halbmesser von krummen Linien mittelst der Huygens'schen Gleichung

$$v^2 = p \,.\, r.$$

Die Huygen'sche Gleichung gilt für jede krummlinige Bewegung, muss deshalb auch geeignet sein, den Halbmesser

$$r = \frac{v^2}{p}$$

irgend einer krummen Linie zu ermitteln, wenn aus dem Bewegungsgesetze sich die Grössen v und p ermitteln lassen.

Krümmungshalbmesser der Parabel (Wurflinie).

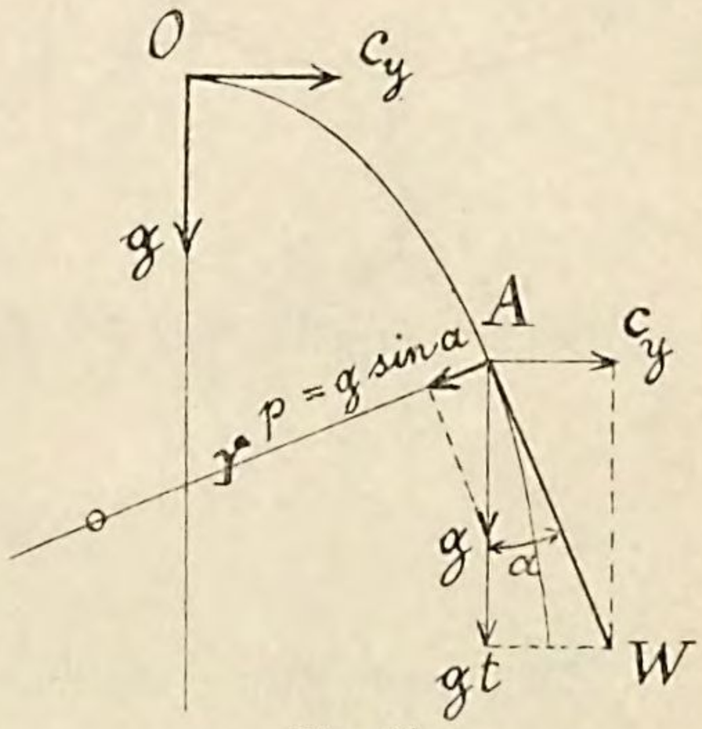


Fig. 55.

Die Parabellinie sei entstanden durch die wagerechte gleichförmige Geschwindigkeit c_y und die dazu senkrecht, also lothrecht gerichtete Beschleunigung g. Ihre Krümmung wechselt beständig. Es soll im Punkte A der Halbmesser der Parabellinie, welche hier den Winkel a mit der Beschleunigung g einschliesst, bestimmt werden.

Für diesen Punkt ist (nach Fig. 38 und 55) die Geschwindigkeit in der Parabellinie:

$$v = w = \frac{c_y}{\sin a}.$$

Die senkrecht hierzu, also nach dem Mittelpunkte der Krümmung gerichtete Beschleunigung ist:

$$p = g \cdot \sin a,$$

folglich ist der gesuchte Halbmesser:

$$r = \frac{w^2}{g \cdot \sin a} = \frac{{c_y}^2}{g \cdot \sin^3 a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 102$$

Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie.

Die Schraubenlinie liegt auf dem Mantel eines Cylinders, dessen Halbmesser R sein mag, ist somit doppelt gekrümmt (Fig. 56).

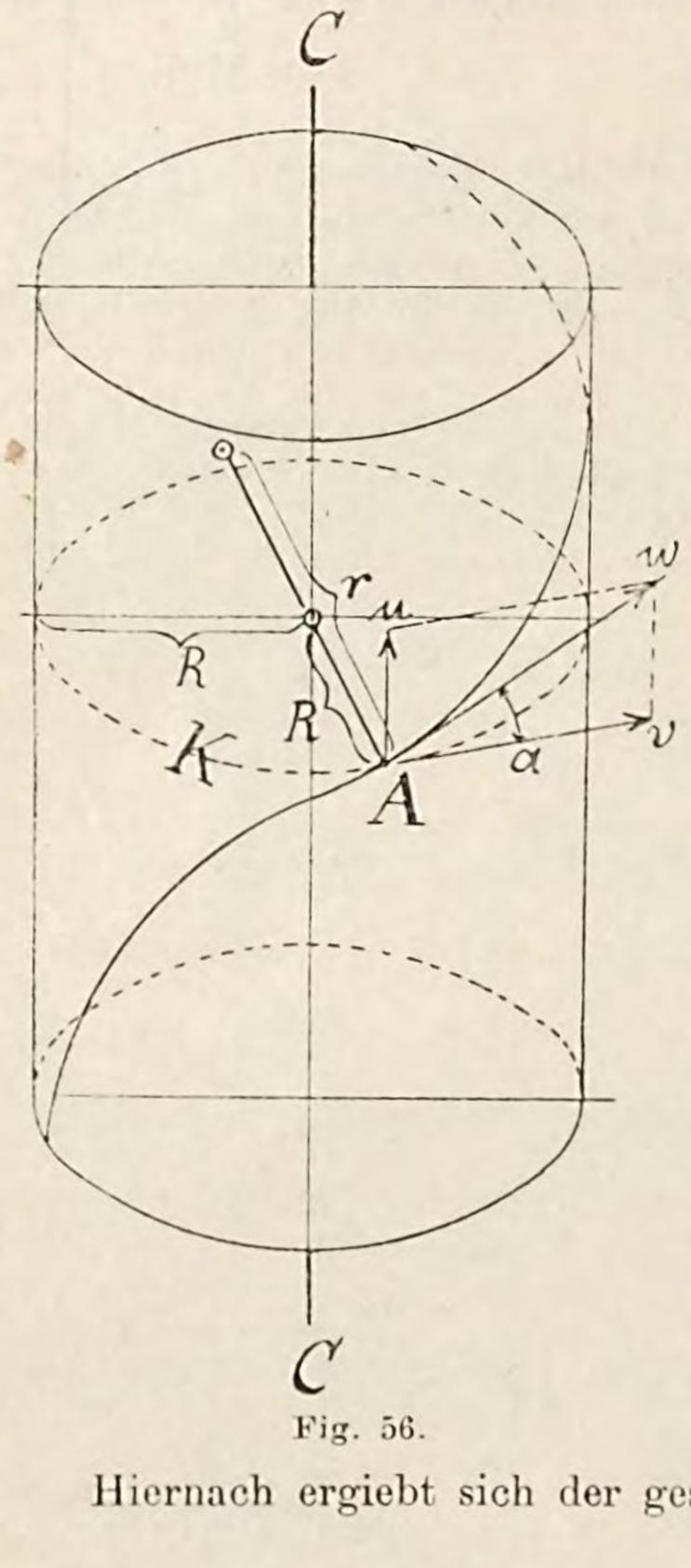


Fig. 56.

Sie setzt sich zusammen aus zwei Seitenbewegungen:

1. der geradlinigen Bewegung in der Richtung der Achse CC mit der Geschwindigkeit . . . . . u,
2. der krummlinigen Bewegung in dem Kreise K mit der Geschwindigkeit . . v

und übernimmt damit selbstredend auch die Eigenthümlichkeiten dieser Seitenbewegungen.

Ist w der Grösse und Richtung nach die Mittelbewegung in der Schraubenlinie und a der Winkel zwischen w und v, so ist zunächst:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} \quad . . . . . \quad 103$$

$$\cos a = \frac{v}{w} \quad . . . . . \quad 104$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{u}{v} \quad . . . . . \quad 105$$

In Bezug auf die Beschleunigung p und den gesuchten Halbmesser r der Schraubenlinie gilt nun Folgendes:

Die Beschleunigung p der Schraubenlinie muss sich aus den Beschleunigungen der Seitenbewegungen ergeben. Nun erfordert aber die geradlinige Bewegung mit der Geschwindigkeit u keine Beschleunigung, es muss deshalb die Beschleunigung der Schraubenlinie gleich der der Kreisbewegung sein, d. h.:

$$p = \frac{w^2}{r} = \frac{v^2}{R} \quad . . . . \quad 106$$

Hiernach ergiebt sich der gesuchte Halbmesser:

$$r = R\left(\frac{w}{v}\right)^2 \quad . . . . . \quad 107$$

$$r = \frac{R}{\cos^2 a} \quad . . . . . \quad 108$$

(Siehe auch Ritter, Techn. Mech. VI. Auflage 1892, S. 128 ff.)

IV.

Die sogen. „wahre“ (oder wirkliche) und die sogen. „scheinbare“ (oder bezügliche, relative) Bewegung.

§ 59.

Bislang ist von den verschiedenartigen einfachen und zusammengesetzten, geradlinigen und krummlinigen Bewegungen nur eines einzigen Punktes O gehandelt. In vielen Fragen der Technik und Wissenschaft ist es jedoch auch sehr wichtig zu wissen, wie ein Punkt O sich in Bezug auf einen anderen Punkt T bewegt, wenn letzterer ebenfalls in Bewegung begriffen ist. Der Maschinentechniker muss z. B. ermitteln, welche Bewegung ein Wasserstrahl in Bezug auf das eben-

falls in Bewegung begriffene Wasserrad oder auf die Turbine annimmt in dem Augenblicke, in welchem er den Umfang dieser Räder trifft.

Von solchen bezüglichen Bewegungen, die sich auch mit Hülfe des Parallelogrammes oder Polygones ermitteln lassen, soll im Folgenden gehandelt werden.

Ein Reiter O bewegt sich mit der Geschwindigkeit c, ein Fussgänger T mit der Geschwindigkeit v. Es soll die Geschwindigkeit von O in Bezug auf T (oder umgekehrt) gefunden werden.

Man füge v, die Geschwindigkeit von T in umgekehrter Richtung, sowohl in T als auch in O hinzu (Fig. 57). Hierdurch wird an dem gegenseitigen Bewegungsverhältnisse zwischen O und T durchaus nichts geändert. Dagegen wird T durch die Zusammensetzung der beiden, genau gleich grossen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten $(+v, -v)$ gleichsam zur Ruhe gebracht, während O durch Zusammensetzung seiner wahren Geschwindigkeit c und der Geschwindigkeit $(-v)$ nach dem bekannten Parallelogrammgesetze die Geschwindigkeit r zeigt.

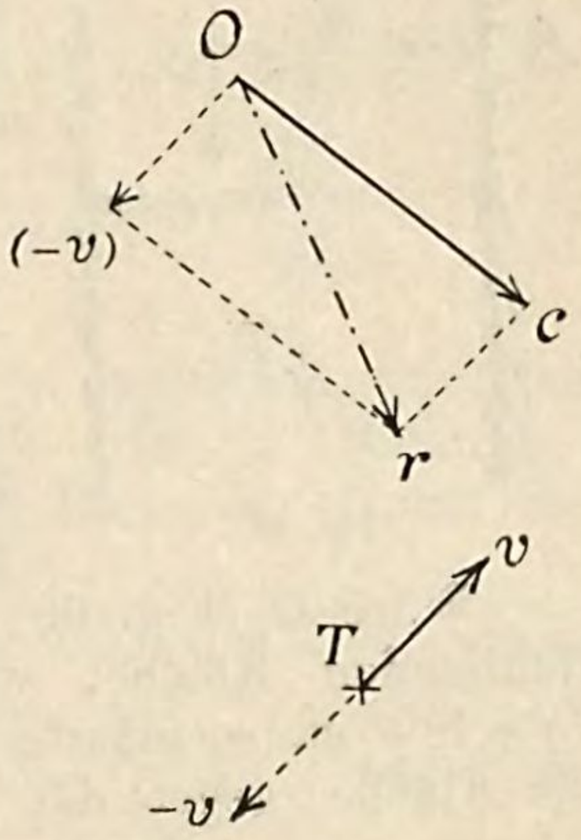


Fig. 57.

Man nennt r nun die scheinbare, oder bezügliche, oder relative Geschwindigkeit: „Scheinbare“, weil es dem Beobachter T so erscheint, wie wenn O diese Bewegung r hätte; „bezügliche“, weil in der That r nach Grösse und Richtung die Bewegung von O in Bezug auf T ist.

Nach dem Voranstehenden ergiebt sich folgende allgemeine Regel (Fig. 57): Um die Geschwindigkeit von O in Bezug auf T zu erhalten, füge zu der wahren Geschwindigkeit c von O die Geschwindigkeit von T in umgekehrter Richtung, also $(-v)$ hinzu. So ist r die Resultirende von c und $(-v)$ der Grösse und Richtung nach die Geschwindigkeit von O in Bezug auf T.

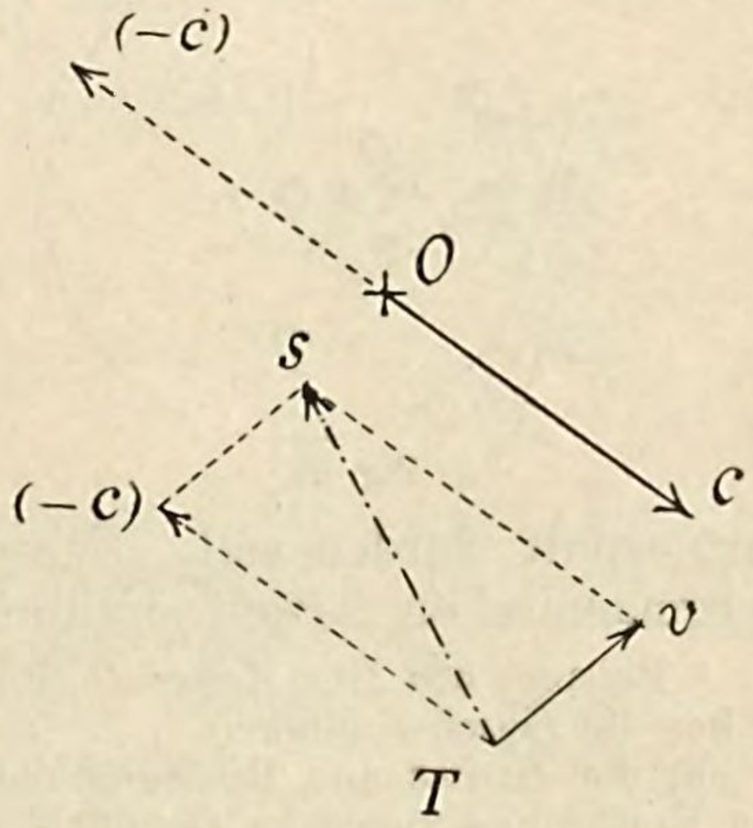


Fig. 58.

Wollte man umgekehrt (Fig. 58) die Bewegung von T in Bezug auf O wissen, so hätte man c in umgekehrter Richtung (also als $-c$) in O und T hinzuzufügen. Jetzt würde O zur Ruhe gebracht sein, und T führt in Bezug auf O die Bewegung s aus.

s und r sind einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, was sich leicht ergiebt, wenn man die Bewegungen der Punkte O und T von einem Punkte ausgehen lässt.

Uebrigens gelten für die scheinbare Bewegung dieselben Gesetze wie für die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.

§ 60.

Häufig werden noch besondere Anforderungen an die gegenseitige Bewegung gestellt.

Beispiel 37: Das Schiff O (Fig. 59) soll sich senkrecht zur Richtung des Stromes T bewegen mit einer Geschwindigkeit . . . $c = 2$ m,
T hat die Geschwindigkeit . . . $v = 0{,}5$ m.

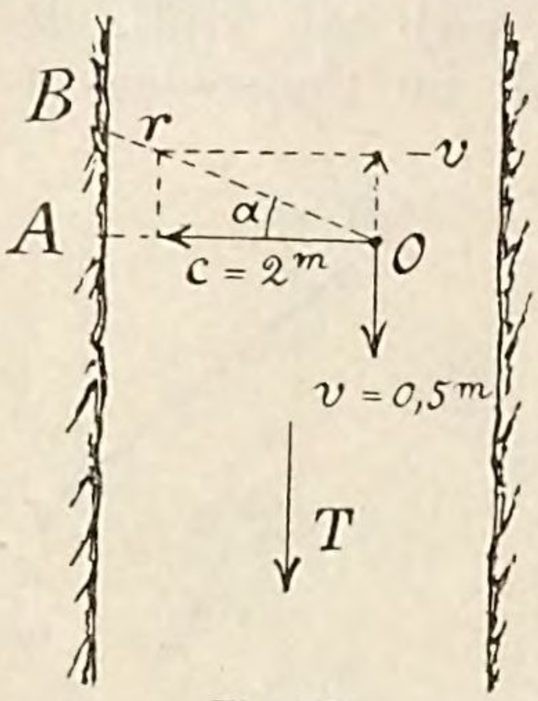


Fig. 59.

Der Steuermann muss sein Schiff mit der scheinbaren Geschwindigkeit r stromaufwärts lenken, welche sich der Grösse und Richtung nach aus den Gleichungen ergiebt:

$$r = \sqrt{c^2 + v^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2} \;.\; . \;\; r = 2{,}06\,\text{m} \;\; . \;\; 109$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{0{,}5}{2{,}0} \qquad = 0{,}25 \;\; . \; . \; . \; . \; . \;\; a = 14^0 \;\; . \; . \; . \;\; 110$$

Um also den Punkt A am jenseitigen Ufer zu treffen, muss auf den Punkt B scheinbar losgesteuert werden.

Wäre O (Fig. 60) ein Sandkörnchen auf einer schwach nach A hin abfallenden Fläche, welches mit der Geschwindigkeit v der Fläche fortschreitet, so müsste man in der Richtung r einen Wasserstrom (schräg zur Fläche) gegen das Körnchen senden, wenn dasselbe in der Richtung c

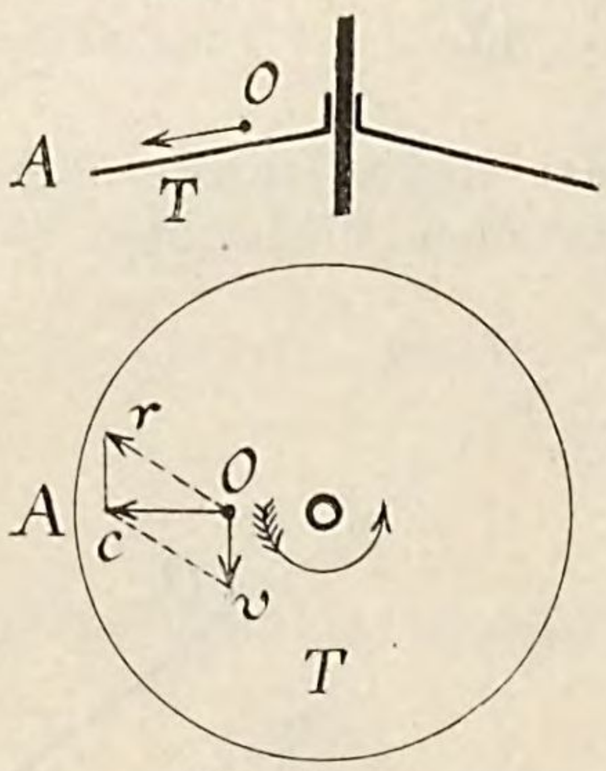


Fig. 60.

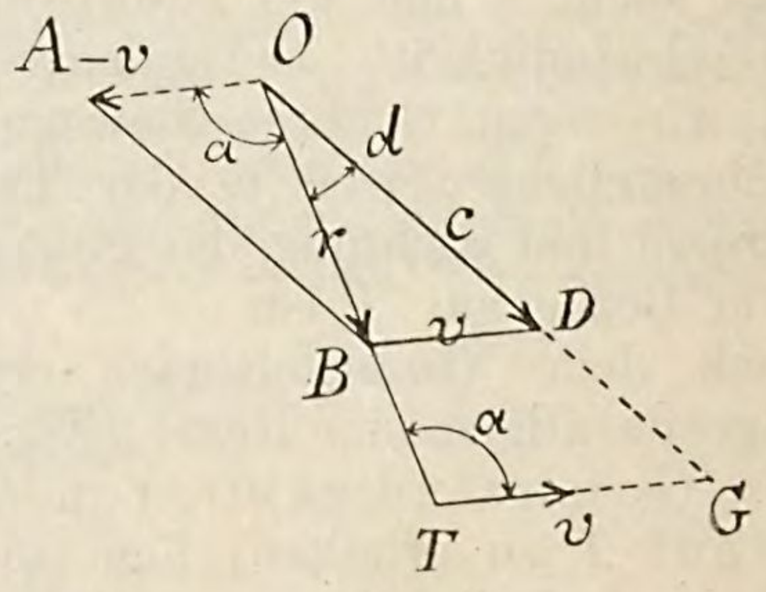


Fig. 61.

fortgespült werden soll. (Vorgang auf dem sogen. rotirenden Herde der bergmännischen Erzaufbereitung.)

Beispiel 38: Der Reiter O (Fig. 61) soll den Fussgänger T treffen.
O hat die Geschwindigkeit . . . . . $c = 3$ m,
T hat der Grösse und Richtung nach . . . . . $v = 2$ m,
die Entfernung zwischen O und T betrage . . . . . $OT = 100$ m,

1. Wie muss c gerichtet sein?
2. Wie gross muss r sein?
3. In welchem Punkte G findet der Zusammenstoss statt?

Nach der Forderung muss r in die Verbindende OT fallen. Der Winkel zwischen dieser Verbindenden und v sei a. Somit ist a auch eine bekannte Grösse.

Trage $(-v)$ in O an, mache $AB = c = 3$ m, vervollständige das Parallelogramm $OABD$ und verlängere OD bis zum Durchschnitt G mit v: alsdann ist:

OD die gesuchte Richtung von c, bestimmt durch $\sin d = \sin a \frac{v}{c}$,

$$OB = r = \sqrt{c^2 + v^2 + 2c \,.\, v \cos(a + d)} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;\; 111$$

G, der Punkt, in welchem Reiter und Fussgänger sich treffen, folgt aus der Beziehung:

$$TG : v = OT : r.$$

$$TG = 100 \frac{2}{r} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;\; 112$$

Beispiel 39: Es regnet. Der Tropfen (Fig. 62) fällt senkrecht herab mit der wahren Geschwindigkeit . . $c = 40$ m. Mit welcher Geschwindigkeit r und unter welchem Winkel a trifft derselbe einen mit der Geschwindigkeit . . . . . $v = 30$ m durch den Regen fahrenden Eisenbahnzug?

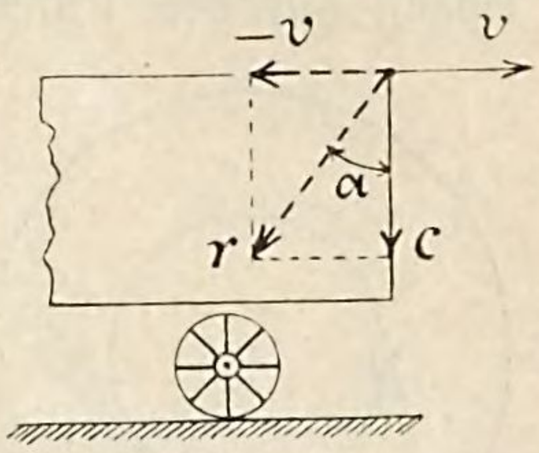


Fig. 62.

$$r = \sqrt{c^2 + v^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} \quad . \quad . \quad . \quad r = 50 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{v}{c} = \frac{30}{40} = 0{,}75 \quad . \quad . \quad . \quad a = \sim 37^0.$$

Dem im Wagen sitzenden Beobachter würde es erscheinen, wie wenn der Tropfen das Fenster in der Richtung r träfe. In die Richtung r müsste man ein Rohr bringen, wenn der Tropfen längs der Achse desselben fallen sollte.

Beispiel 40: Die Geschwindigkeit des Erdballes auf seiner Bahn um die Sonne ist nach dem Beispiel 9, §14, etwa $v = 4$ Meilen. Ein von einem Fixsterne S (Fig. 63) kommender Lichtstrahl erreicht das Objektivglas eines mit der Erde sich fortbewegenden Fernrohres mit der wahren Geschwindigkeit . . . . $c = 40000$ Meilen.

In welcher Richtung r muss das Fernrohr F gehalten werden, wenn der Lichtstrahl in der Achse desselben sich fortbewegen soll?

Diese Richtung ist durch den Winkel a bestimmt, wenn für denselben gilt:

$$\operatorname{tg} a = \frac{v}{c} = \frac{4}{40\,000} = 0{,}0001$$

$$a = \text{rund } 20 \text{ Sek.}$$

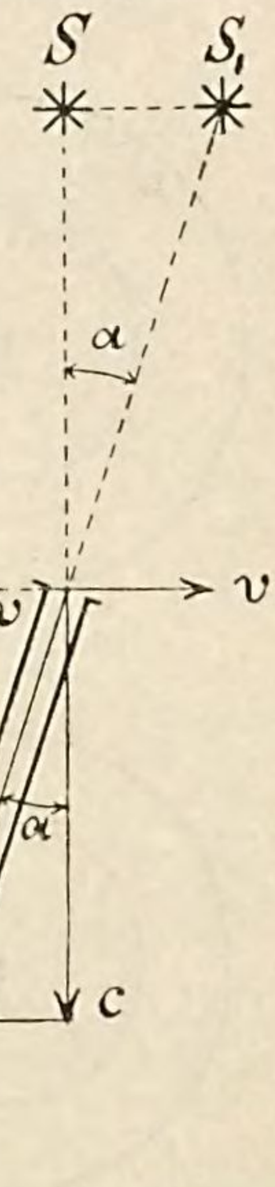


Fig. 63.

Um diesen Winkel scheint dem Beobachter der Stern S in der Richtung der Erdbewegung verschoben. (Aberration des Sternenlichtes). Im Laufe eines Jahres scheint der scheinbare Ort S_1 des Sternes eine Ellipse um den wahren Ort S des Sternes zu beschreiben.

Aus der beobachteten Aberration a des Sternenlichtes hat Bradley umgekehrt die Geschwindigkeit des Lichtes $c =$ etwa 40000 Meilen ermittelt.

Beispiel 41: Bestimmung der Schaufelstellung bei Wasserrädern und Turbinen.

Das Verfahren, die scheinbare Bewegung r zu finden, gilt auch für Drehbewegungen, überhaupt für krummlinige Bewegung, sofern es sich um eine augenblickliche gegenseitige Bewegung handelt.

Der Wasserstrahl O (Fig. 64) trifft mit der wahren Geschwindigkeit c (der Grösse und Richtung nach) den Umfang des Wasserrades T, das die Geschwindigkeit v hat.

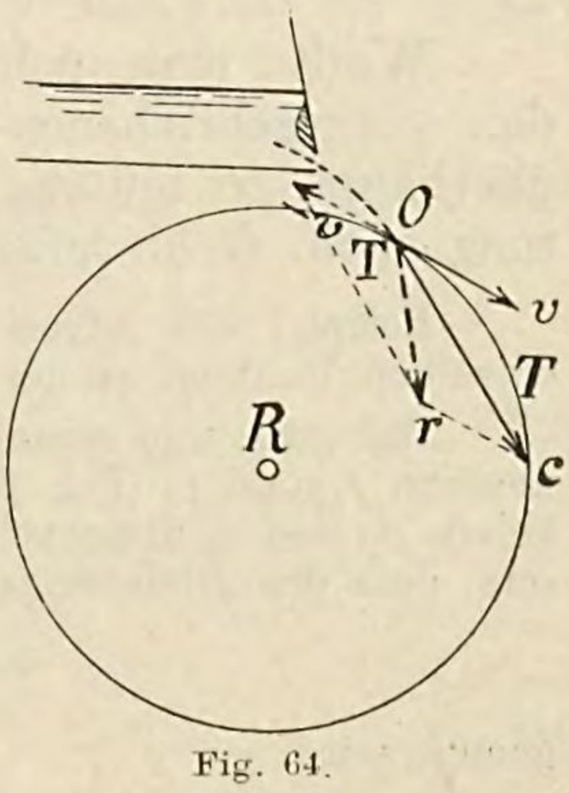


Fig. 64.

Es soll die scheinbare Geschwindigkeit r des Wassertheilchens O in Bezug auf den Punkt T des Wasserradumfanges gefunden werden.

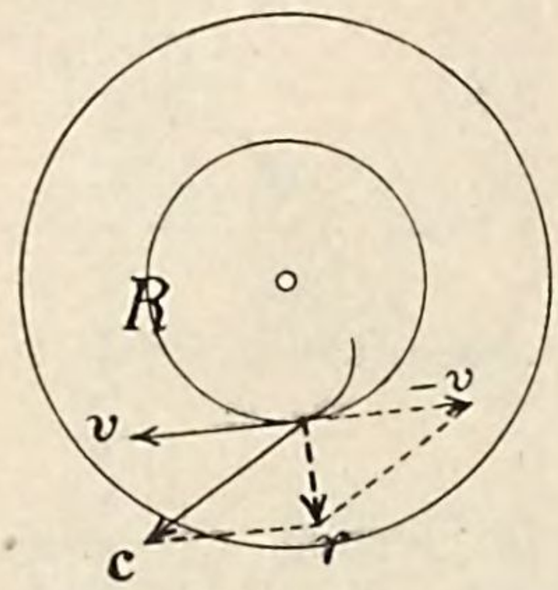


Fig. 65.

Man trage in T (oder O, da beide Punkte sich decken), $(-v)$ an und beschreibe über $(-v)$ und c ein Parallelogramm, so ist die Diagonale r die gesuchte Geschwindigkeit, mit der sich der Wasserstrahl in Bezug auf das Wasserrad beim Eintritt in dieses, also im Augenblicke des Zusammentreffens, bewegt.

Diese Richtung ist der Schaufel bei T zu geben, wenn der eintretende Wasserstrahl hier keine Störung (keinen Stoss) erleiden soll. Ebenso bestimmt man bei Turbinen (Fig. 65) die Richtung des ersten Theilchens der gekrümmten Schaufel. (Ausführliches ist in der Maschinenlehre zu finden.)

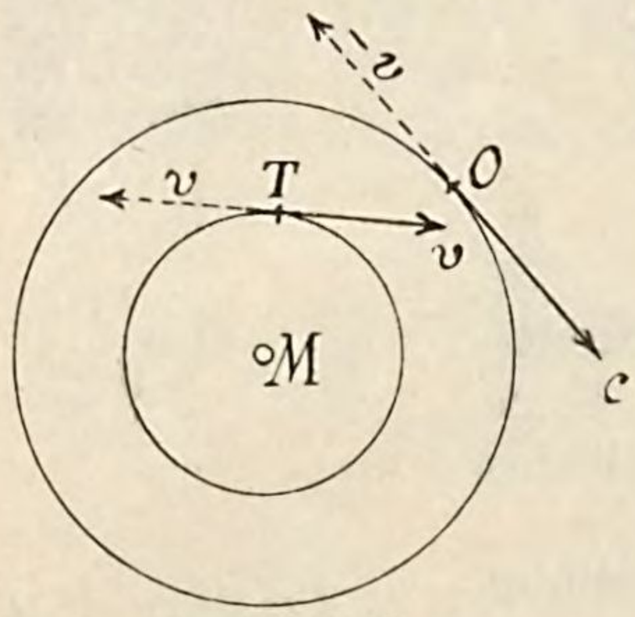


Fig. 66.

Beispiel 42: Die beiden Punkte O und T (Fig. 66) drehen sich in Kreisen um den Mittelpunkt M unabhängig von einander bezw. mit den Geschwindigkeiten c und v.

Wie gross ist die „scheinbare“ Umfangsgeschwindigkeit r des Punktes O in Bezug auf den Punkt T.

Man trage wieder $(-v)$ in T und O an, dadurch kommt T zur Ruhe und die scheinbare Geschwindigkeit r des Punktes O in Bezug auf den zur Ruhe gebrachten Punkt T ist:

$$r = c - v,$$

d. h. O eilt um r dem Punkte T voraus, wenn $c > v$, umgekehrt bleibt O hinter T zurück, wenn $c < v$, was noch deutlicher hervortritt, wenn man die Punkte O und T auf derselben radialen Linie annimmt (Fig. 67).

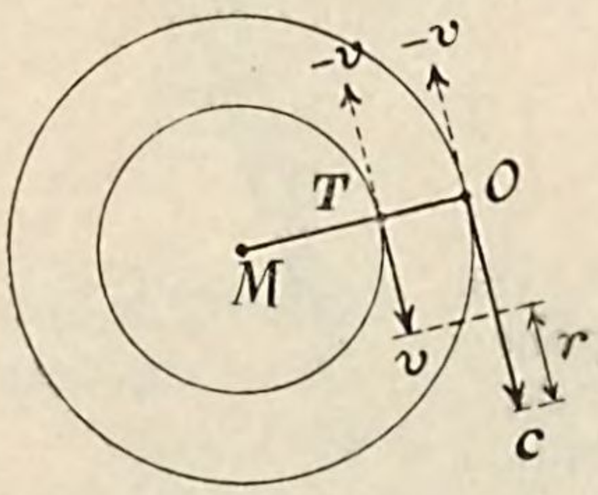


Fig. 67.

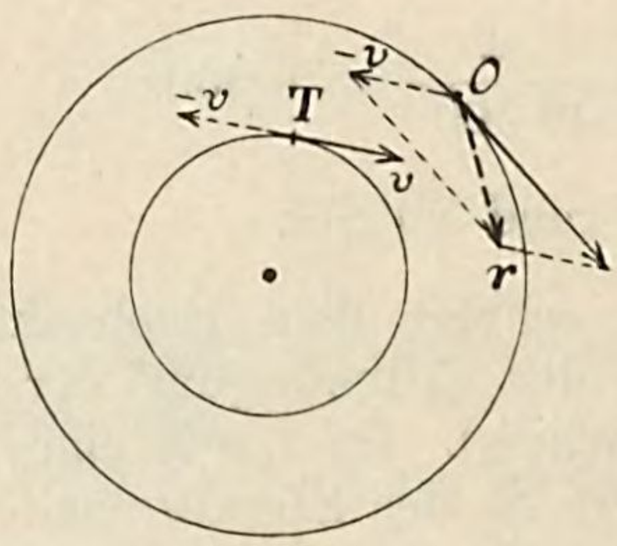


Fig. 68.

Wollte man nicht nur die bezügliche Umdrehungsgeschwindigkeit auf den vorgeschriebenen Wegen wissen, sondern die bezügliche Bewegung überhaupt, so müsste man r bestimmen, indem man $(-v)$, auch der Richtung nach, O hinzufügt (Fig. 68).

Beispiel 43: Etwas verwickelter werden die bezüglichen Bewegungen in den einzelnen Punkten zweier mit einander im Eingriff stehender Zahnräder.

Bei zwei mit einander im Eingriff stehenden Rädern I und II von den Halbmessern r_1 und r_2 (Fig. 69) müssen im Berührungspunkte a die Umfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 dieselben, folglich die Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2 so beschaffen sein, dass den Gleichungen:

$$v_1 = v_2$$

$$r_1 w_1 = r_2 w_2 \quad \ldots\ldots\ldots\

Man findet nun die Geschwindigkeit des Rades II in Bezug auf I, wenn man dem ganzen Systeme um den Mittelpunkt I die entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeit, also $-w$, ertheilt. Dadurch kommt I zur Ruhe.

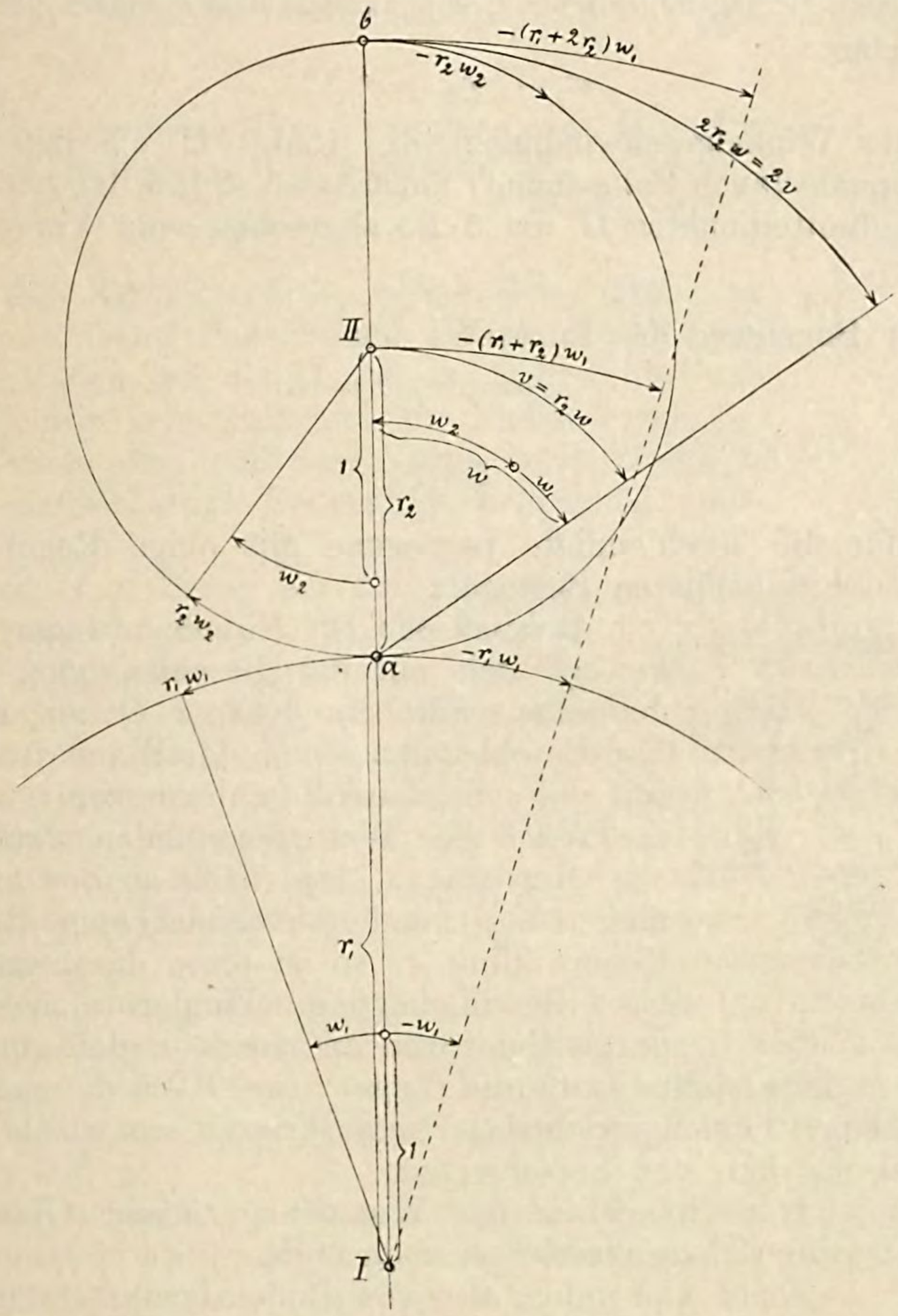


Fig. 69.

Die verschiedenen Punkte des Rades II haben dann in Bezug auf das ruhende Rad I folgende Geschwindigkeiten:

der Berührungspunkt a . . . . $r_2w_2 - r_1w_1$

$= Null$; da $r_2w_2 = r_1w_1$ ist; 114

der Mittelpunkt II . . . . . $-(r_1 + r_2)w_1$

$= -(r_1w_1 + r_2w_1)$

$= -r_2(w_2 + w_1)$ 115

der Punkt b, welcher dem Eingriffspunkte a gegenüberliegt:

$-r_2w_2 - (r_1 + 2r_2)w_1$

$= -r_2w_2 - r_1w_1 - 2r_2w_1$

$= -2r_2(w_2 + w_1)$ 116

Die Bewegung der sich gegen einander drehenden Räder II und I erfolgt ebenso, als ob I ruhte und II auf dessen Umfange nach rechts fortrollte. (Siehe auch im Maschinenbau die Form der Zähne eines Zahnrades.)

Der augenblickliche Berührungspunkt a hat jederzeit die Geschwindigkeit Null, ist somit zugleich als augenblicklicher Drehpunkt für II anzusehen.

Setzt man

$$w_1 + w_2 = w, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 117$$

so ist w als Winkelgeschwindigkeit des Rades II um den augenblicklichen Drehpunkt (auch Pol genannt) aufzufassen (§ 146, B), und der Bogenweg des Radmittelpunktes II um a ist abgesehen vom Vorzeichen:

$$v = r_2 w, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 118$$

dagegen der Bogenweg des Punktes b um a ist:

$$= 2 r_2 w = 2 v \quad \ldots \ldots \ldots \quad 119$$

§ 61.

Auch für die beschleunigte Bewegung gilt obige Regel (§ 59) zur Auffindung der scheinbaren Bewegung.

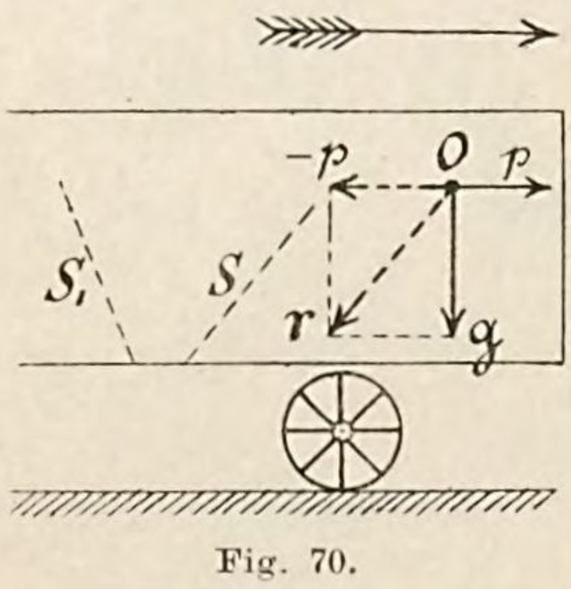


Fig. 70.

Beispiel 44: Ein Eisenbahnwagen T (Fig. 70) bewegt sich mit der Beschleunigung p fort. In demselben fällt ein Körper O mit der wahren Erd-Beschleunigung g an der Wand frei herab. Es soll die scheinbare Beschleunigung r in Bezug auf die Wand des Wagens gefunden werden.

Man trage $(-p)$ in O an und ziehe in dem über $(-p)$ und g verzeichneten Rechteck die Uebereckline r, so ist diese die gesuchte scheinbare Beschleunigung. Hindert man den Körper durch Befestigen an einem Faden am Fallen, so nimmt das so hergestellte Loth die Lage r an. Würde man das Loth aus dieser seiner Gleichgewichtslage herausbringen, so würde es um dieselbe pendelartig hin- und herschwingen.

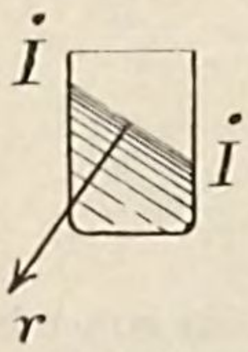


Fig. 71.

Der Spiegel ii des Wassers in einem Glase (Fig. 71) würde sich senkrecht zu r einstellen.

Einer von unten, also vom Boden her unterstützten Stange S müsste dieselbe Gleichgewichtslage r gegeben werden (Fig. 70).

Dieselbe Stellung muss ein im beschleunigten Wagen stehender Fahrgast annehmen, um sich ins Gleichgewicht zu bringen. Bei plötzlichem Stillstand des Wagens würde er nach vorn überfallen. Dagegen würde jemand, der in einem durch Bremsen verzögerten Wagen steht, unwillkürlich die entgegengesetzte Stellung S_1 aufsuchen, folglich nach rückwärts taumeln, wenn er durch plötzliches Anhalten des Wagens in dieser Stellung überrascht würde.

Diese Beobachtung kann man auf jeder Eisenbahnfahrt machen und auf die obige Weise sich erklären.

Mit anderen Worten: Während der Fahrgast stets nach vorwärts fallen wird, sowohl beim plötzlichen Anhalten als auch bei einem Anhalten in der Beschleunigungsperiode, wird er nach rückwärts taumeln, wenn dem Anhalten eine durch Bremsen herbeigeführte verzögerte Bewegung vorausgeht.

Beispiel 45: Ein Fahrstuhl T bewege sich mit der Beschleunigung p abwärts in einem Schachte. In demselben falle ein Körper O mit der Beschleunigung g.

Wäre für einen Augenblick:

$$p = g,$$

so würde die scheinbare Beschleunigung des fallenden Körpers O in Bezug auf den Fahrstuhl T:

$$r = g - p = O$$

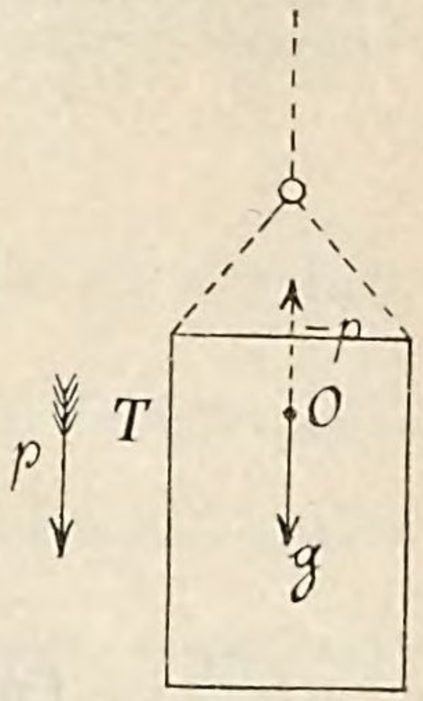


Fig. 72.

sein; d. h. der Körper würde in derselben Höhe im Fahrstuhl schwebend sich halten. Wäre der Körper durch einen Faden mit der Decke des Fahrstuhles verbunden, so würde keine Spannung im Faden vorhanden sein, was durch eine zwischen Körper und Decke in den Faden eingeschaltete Federwage sich leicht nachweisen liesse.

Was von O in Bezug auf den Fahrstuhl gesagt ist, gilt auch für den ganzen Fahrstuhl in Bezug auf das Förderseil. In letzterem würde für diesen Augenblick keine Spannung eintreten. Eine zwischen Fahrstuhl und Seil eingeschaltete Fangvorrichtung würde „fangen“, ohne dass das Seil gerissen ist. (Siehe Maschinenlehre unter „Förderung“.)

Ebenso würde ein auf dem Boden des Fahrstuhles stehender Bergmann den Boden nicht mehr unter den Füssen fühlen.

Wer „am Seil fährt“ hat in solchen Augenblicken das eigenthümliche unangenehme Gefühl, als ob der Boden ihm unter den Füssen scheinbar verschwände.

Nach dem oben gesagten würde die im Fahrstuhle befindliche Person oder ein Luftschiffer in seinem Schiffe mittelst einer empfindlichen Federwage, an welcher ein Körper von bekanntem Gewichte hängt, beobachten und messen können, ob das Fahrgeräth mit Beschleunigung fällt oder sich gleichförmig bewegt.

Bei beschleunigtem Aufsteigen zeigt die Wage ein grösseres, dagegen bei beschleunigtem Fallen ein zu kleines Gewicht an. Von der Stosswirkung bei plötzlichem Aufsetzen des Fahrstuhles wurde bereits in der Einleitung unter „Trägheitsvermögen“ gehandelt.

Auch die Beziehungen zwischen einer gleichförmigen und einer ungleichförmigen Bewegung lassen sich mit Hülfe der oben (§ 59) aufgestellten allgemeinen Regel auffinden.

So erscheint es dem Beobachter O (Fig. 73) in einem Luftballon, der mit der Beschleunigung p zu fallen beginnt, wie wenn die Wolke T, die mit der Geschwindigkeit v gleichförmig wagerecht fortschreitet, den Weg $T\,T_1\,T_2\,T_3\ldots$ zurücklegte.

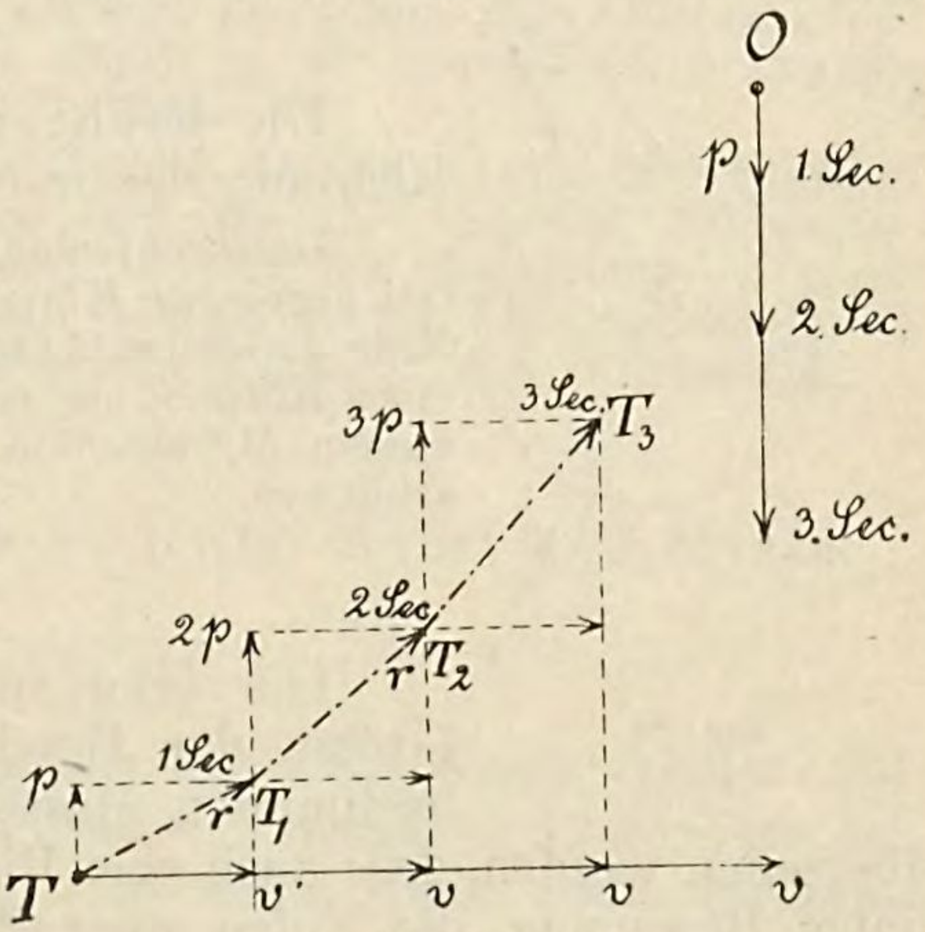


Fig. 73.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes

oder

Fortschreitende Bewegung der Körper.

I.

Beziehungen zwischen Beschleunigung p, Kraft P und Masse m.

§ 62.

Bislang sind die Bewegungen und Bewegungsänderungen ohne Rücksicht auf die bewegende Kraft (Ursache der Bewegungsänderung) und die bewegte Masse (Menge des Stoffes, der sich bewegt) behandelt. Im Folgenden soll nun auch Kraft und Masse berücksichtigt werden.

Die unbekannte Masse eines Körpers ist einzig und allein aus der Bewegungsänderung ($\pm$ Beschleunigung), welche eine bekannte Kraft an dem Körper bewirkt, zu bestimmen.

Ebenso ist eine unbekannte Kraft nach Richtung, Grösse und Angriffspunkt aus ihren Wirkungen, d. i. aus den Bewegungsänderungen, welche sie in einer gewissen Zeit an einer gegebenen Masse hervorbringt, zu ermitteln.

§ 63.

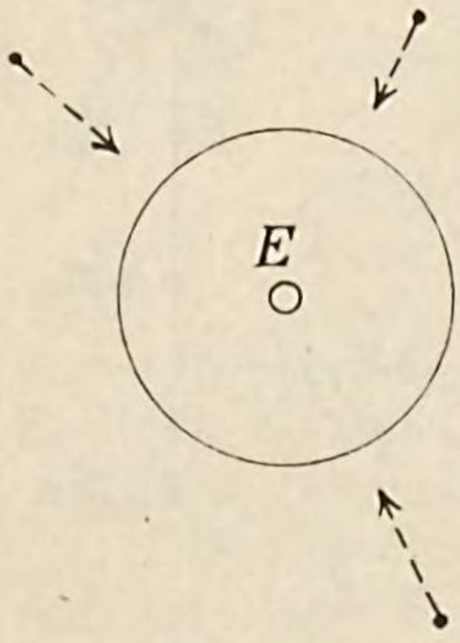


Fig. 74.

Die Richtung einer Kraft ergiebt sich aus der Richtung der hervorgebrachten Beschleunigung.

Das senkrechte (lothrechte) oder erdwärts gerichtete Fallen frei gegebener Körper lässt auf eine nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Anziehungskraft, der Schwerkraft, das Kreisen eines Körpers um einen bestimmten Mittelpunkt, auf eine nach diesem Mittelpunkte hin gerichtete Kraft, der Centripetalkraft, schliessen.

§ 64.

Die Grösse der Kraft schätzt man nach der Grösse der Beschleunigung, welche diese Kraft einer bestimmten Masse ertheilt. Hierbei darf wieder nicht übersehen werden, dass auch eine Richtungsveränderung, also eine krummlinige Bewegung, die Folge einer Beschleunigung ist.

Finden wir also die Fallbeschleunigung an den Polen und am Meeresspiegel grösser als am Aequator und auf hohen Bergen, so schätzen wir dort die Schwerkraft grösser.

Soll unter sonst gleichen Verhältnissen das Kreisen in einem stärker gekrümmten, also kleineren Kreise erfolgen, so muss entsprechend die Centripetalkraft vergrössert werden.

§ 65.

Der Angriffspunkt der Kraft ergiebt sich ebenfalls aus der Richtung der Beschleunigung (Fig. 74).

Von welcher Stelle der Erdoberfläche aus wir auch den Stein frei fallen lassen, immer fällt er nach dem Mittelpunkte hin (lothrecht).

Der Angriffspunkt der Schwerkraft des Erdballes scheint demnach dessen Mittelpunkt (Schwerpunkt *E*) zu sein.

Die durch die Richtung des Fadens, an welchem man den Stein befestigt, sichtbar gemachte Beschleunigungslinie (Falllinie) ist stets nach demselben Punkte im Innern des Steines gerichtet, wie man letzteren auch dreht und wendet.

Der Angriffspunkt der Kraft, welche den Stein beschleunigt, scheint demnach dessen Mittelpunkt (Schwerpunkt *S*) zu sein.

Im Mittelpunkte (Schwerpunkte) der Erde sowie des Steines haben demnach scheinbar Kräfte ihren Sitz, welche eine gegenseitige Wirkung auf einander ausüben.

So beobachten wir die Wechselwirkung in der Natur.

Der Schwerpunkt (von dem später ausführlich gehandelt wird) ist derjenige Punkt in einem Körper, der unterstützt werden muss, wenn der Körper vor dem Fallen bewahrt werden soll. In diesem Punkte kann man sich die gesammte Masse *m* vereinigt denken, denselben also auch auffassen als materiellen Punkt von der Masse *m*.

§ 66.

Nach dem zuletzt Gesagten ist das Gebiet des gegenwärtigen Abschnittes, der von der Bewegung des materiellen Punktes handeln soll, also diejenigen Fälle zu betrachten hätte, in welchem die Kräfte nur in einem Massen-Punkte angreifen, schon ein sehr grosses. Wir werden in demselben schon von der Bewegung ausgedehnter Körper handeln dürfen, bei denen nur die Bewegung des Schwerpunktes und nicht zugleich die der anderen Punkte im Körper, die sich vielleicht um jenen Punkt drehen, zu berücksichtigen ist. Unzweifelhaft sind auch diejenigen Fälle hierher zu zählen, bei denen es sich um die Drehung ausgedehnter Körper (z. B. des Erdballes) um einen anderen Körper (die Sonne) handelt, wenn hierbei nur die fortschreitende Bewegung des Massenmittelpunktes und nicht zugleich die gegenseitige Bewegung der einzelnen Punkte besonders zu verfolgen ist. Damit ist die ungewöhnliche Doppelüberschrift des gegenwärtigen Abschnittes (S. 72) begründet.

Soll dagegen bei Drehbewegungen der Einfluss der Entfernung der einzelnen Massentheilchen von dem Massenmittelpunkte oder von einer künstlich festgelegten Drehachse (z. B. eines Rades) ermittelt werden, so führt die Behandlung auf einen ganz neuen Begriff, nämlich den des „Trägheitsmomentes“. Es ist deshalb die Drehbewegung der Körper in einem besonderen Kapitel (§ 264) zu behandeln.

Nähere Bestimmungen über die Begriffe: Kraft und Masse.

§ 67.

Die Richtung, Grösse und der Angriffspunkt einer Kraft, werden auf dem Papiere durch eine mit einer Pfeilspitze versehenen Linie von bestimmter Grösse und Lage dargestellt. (Solche Linie wird kurzweg „Kraft“, auch „Kraftvektor“ genannt.)

§ 68.

Man hat auch wohl die Kräfte eingetheilt in

A. Augenblicks- (oder Momentan-)Kräfte,
B. Dauernde (oder kontinuirliche) Kräfte.

A.

Unter den Augenblicks-Kräften hätte man dann solche Kräfte zu verstehen, die nur einmal und zwar nur während eines Augenblickes, d. h. während einer so kurzen Zeit wirken, dass deren Dauer verschwindend klein ist. Sie würden eine geradlinige, gleichförmige Bewegung veranlassen.

Solche Augenblicks-Kräfte giebt es aber in der Natur und Kunst ebensowenig wie vollkommen gleichförmige Bewegungen.

Denn selbst die Stosswirkungen, wie sie bei dem elektrischen Funken, dem Blitze, bei Explosionen beobachtet werden, sind nicht zeitlos (§ 4).

Jedenfalls gilt deshalb für die Kräfte kürzester Dauer der Erfahrungssatz der Beschleunigung (§ 4) ebensogut wie für die folgenden Kräfte.

B.

Die dauernd wirkenden Kräfte sind entweder unveränderlich oder veränderlich.

Unveränderlich (konstant) nennt man die Kraft, wenn sie eine der Grösse und Richtung nach unveränderliche Beschleunigung an demselben Körper hervorbringt. In jedem anderen Falle heisst sie veränderlich (variabel).

§ 69.

Wirken auf ein und denselben Körper K (Fig. 75) beliebige Kräfte:

$P\,P_1\,P_2\,\ldots$ oder das Gewicht G ein, so stehen die erzeugten Beschleunigungen:

$p\,p_1\,p_2\,\ldots$ oder die Erdbeschleunigung g zu den antreibenden Kräften in gleichem Verhältnisse; d. h., es ist:

$$\frac{P}{p} = \frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \ldots = \frac{G}{g} \quad . \quad . \quad 120$$

Dieses für ein und denselben Körper unter allen Umständen sich stets gleichbleibende Verhältniss nennen wir die Masse des Körpers, die wir von nun an mit m bezeichnen wollen. Die Masse des Körpers ist demnach ein **Verhältniss**; nämlich:

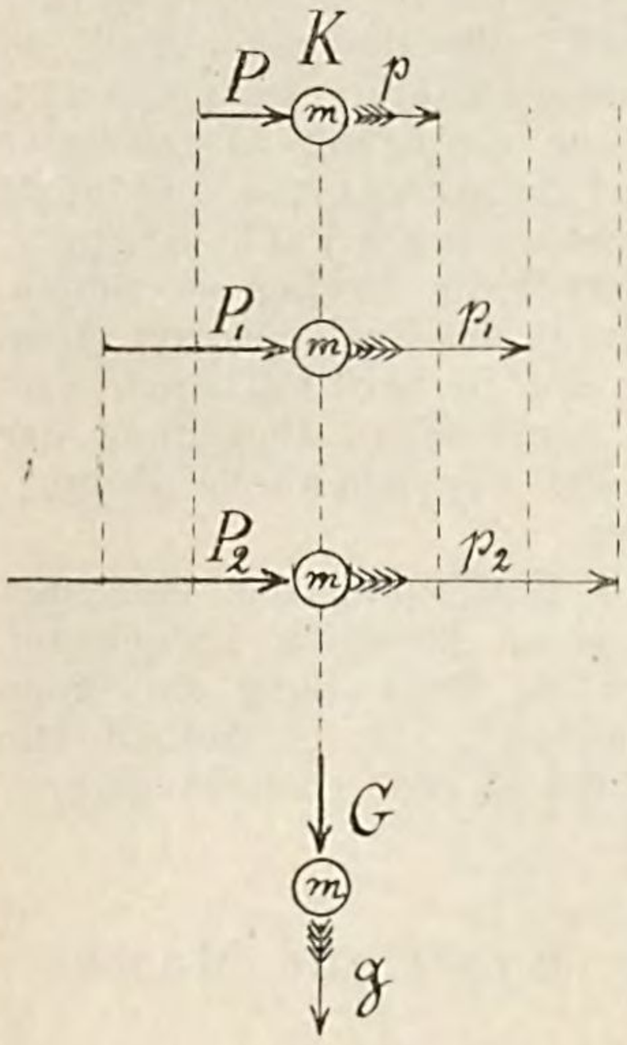


Fig. 75.

$$m = \frac{P}{p} \quad \text{oder} \quad = \frac{G}{g} \quad . \quad . \quad 121$$

$$Masse = \frac{antreibende\ Kraft}{erzeugte\ Beschleunig.} = \frac{Gewicht}{Erdbeschl.}.$$

Die Masse eines Körpers ist folglich dadurch zu ermitteln, dass man das Gewicht desselben bestimmt und dieses durch die Erdbeschleunigung g desjenigen Ortes theilt, an welchem die Gewichtsbestimmung vorgenommen wurde.

Im Mittel ist (für alle Körper) am Meeresspiegel die Erdbeschleunigung:

$$g = 9{,}81 \text{ m} = 981 \text{ cm}$$

beobachtet.

Ueber die Abhängigkeit des Werthes g von der Entfernung vom Erdmittelpunkte und von der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes wird später ausführlich gehandelt (§§ 138 und 145).

Insbesondere durch die Beachtung der zuletzt aufgestellten Gleichung, die sich auch schreiben lässt:

$$\left.\begin{array}{lll} P = mp & \text{oder} & G = mg \\ p = \dfrac{P}{m} & & g = \dfrac{G}{m} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 122$$

zeichnet sich der zweite Abschnitt wesentlich vor dem ersten aus (§ 11 u. ff.).

Man lese auch nach, was schon in den §§ 3 und 4 gesagt ist.

§ 70.

Gewichtsbestimmungen.

Für zwei verschiedene Körper, deren Massen mit m_1 und m_2, deren Gewichte mit G_1 und G_2 bezeichnet werden mögen, ist an demselben Orte der Erde, also für denselben Werth g:

$$m_1 = \frac{G_1}{g}$$

$$m_2 = \frac{G_2}{g}$$

also:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{G_1}{G_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 123$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich an demselben Orte wie ihre Gewichte. Die Massenverhältnisse der Körper sind demnach durch Wägung zu ermitteln.

Unsere Wägungen laufen in der That auf Vergleichung der Massen hinaus, und unsere Gewichtsätze sind nichts anderes als Massensätze.

§ 71.

Die Einheit der Kraft und der Masse.

Nach der allgemein gültigen Gleichung:

$$m = \frac{P}{p}$$

ist:

$$m = 1, \text{ für } P = 1 \text{ und } p = 1;$$

d. h. in Worten:

Die **Masseneinheit** hat jeder Körper (irgend eines beliebigen Stoffes), der unter der Einwirkung der Kraft Eins in der Zeit Eins die Beschleunigung Eins erfährt.

Oder umgekehrt:

Die **Krafteinheit** ist diejenige Kraft, die der Masse Eins in der Zeit Eins die Beschleunigung Eins ertheilt.

Nach Uebereinstimmung nimmt man als **Masseneinheit** die in 1 Kubikdecimeter = 1 Liter (bezw. in 1 Kubikcentimeter) chemisch reinen Wassers grössester Dichte (d. i. bei 4^0 Celsius) enthaltene Masse an.

Als **Gewichtseinheit** gilt dann derjenige Druck, den diese Masse am Meeresspiegel im 45sten Breitengrade auf seine Unterlage ausübt. Dieser Druck (dieses Gewicht) wird 1 **Kilogramm** (bezw. 1 Gramm) genannt. Als Abkürzungen gelten *kg* (bezw. *g*), die ohne Abkürzungspunkt unmittelbar hinter die betreffende Zahl gesetzt werden, wie im Folgenden zu sehen ist: 1000 kg = 1 Tonne (t).

Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen sei noch folgende Art, die Masseneinheit eines Körpers zu bestimmen, angegeben:

Aus der Gleichung:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{G}{9{,}81 \text{ m}}$$

ist für:

$$G = 9{,}81 \text{ kg}$$

$$m = \frac{9{,}81 \text{ kg}}{9{,}81 \text{ m}} = 1.$$

Hiernach enthielte ein Körper die Masseneinheit, der an einem Orte, an welchem die Beschleunigung $g = 9{,}81$ m herrscht, 9,81 kg wiegt.

Allgemein könnte als Masseneinheit die Masse desjenigen Körpers angesehen werden, dessen Gewicht durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird, die für die Erdbeschleunigung an dem Orte der Gewichtsermittelung gilt.

Gesetzliche und internationale Bestimmungen:

Das gesetzliche bezw. internationale Kilogramm ist nach der Mass- und Gewichtsordnung vom 17. August 1868, 11. Juli 1884, 23. April 1893 die Einheit des Gewichtes und dargestellt durch die Masse desjenigen Gewichtsstückes, welches durch die internationale Generalkonferenz für Mass und Gewicht als internationales Prototyp (gemeinsames Muster) des Kilogramm anerkannt und bei dem internationalen Mass- und Gewichtsbureau (Paris, Pavillon de Breteuil bei Sèvres) niedergelegt ist.

Ferner ist gesetzlich bestimmt:

„Dem tausendsten Theil des Kubikmeter wird der von einem Kilogramm reinen Wassers im Zustande seiner grössten Dichtigkeit unter dem absoluten Druck einer Atmosphäre eingenommene Raum gleichgeachtet. Derselbe heisst das Liter (l)."

II.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§ 72.

Einleitende Bemerkungen. Nachdem im Voranstehenden zunächst allgemein dargethan wurde, in welcher Beziehung Beschleunigung, Kraft und Masse zu einander stehen, liegt es nahe, nun auch zu untersuchen, welchen Einfluss es hat, wenn nicht nur eine einzige, sondern gleichzeitig mehrere Kräfte auf unseren materiellen Punkt einwirken. Es schliesst sich diese Untersuchung ebenso innig an die voranstehende an, wie oben die der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen an die der einfachen Bewegungen.

Die Zusammensetzung der Bewegungen lief darauf hinaus, an Stelle mehrerer gleichzeitiger Bewegungen nur eine einzige gleichwerthige zu

setzen. Ebenso lehrt der gegenwärtige Absatz, mehrere in demselben Punkte angreifende Kräfte (Seitenkräfte) durch eine einzige gleichwerthige Kraft (die Mittelkraft, Resultirende, Resultante) zu ersetzen.

Die Kräfte stehen, wie oben gezeigt wurde, in genau demselben Verhältnisse, wie die bewirkten Beschleunigungen (oder Bewegungen). Es müssen deshalb auch für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte dieselben Regeln und Sätze gelten wie für die Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen (Bewegungen). Man hat nur da, wo dort Beschleunigung gesagt wurde, hier Kraft zu setzen.

A.

Die Kräfte wirken in derselben Ebene.

a.

Zusammensetzung zweier Kräfte.

§ 73.

Die Seitenkräfte P_1 und P_2 (Fig. 76) schliessen den Winkel a mit einander ein; dann ist die Mittelkraft gegeben durch die Gleichung:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cdot \cos a} \quad \text{. der Grösse nach . . 124}$$

$$\sin d = \sin a \, \frac{P_2}{P} \quad \text{. . . . . der Richtung nach . . 125}$$

In Worten: Die Mittelkraft P zweier Seitenkräfte P_1 und P_2 ist der Grösse und Richtung nach gleich der Diagonale desjenigen Parallelogrammes, welches über den Seitenkräften verzeichnet ist (Parallelogramm-Satz).

Die den Winkel a einschliessenden Kräfte $P_1 P_2$ sind zusammengenommen gleichwerthig P.

Folglich würde auch eine Kraft $(-P)$, welche gleich P, aber dieser entgegengesetzt gerichtet ist, den gegebenen Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht halten (Fig. 76).

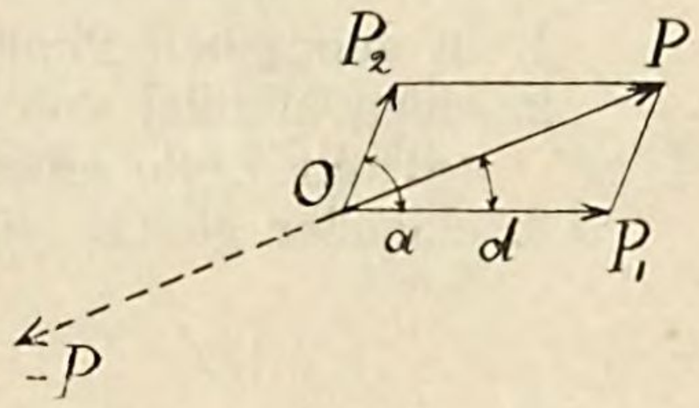


Fig. 76.

Dieser Satz, welcher eine unmittelbare Folgerung des Parallelogramm-Satzes ist, soll der Satz von den drei Kräften genannt und im § 74 ausführlicher behandelt werden.

Für $a = 0^0$, ist:

$$P = P_1 + P_2 \quad \text{. . . . 126}$$

d. h. die Mittelkraft gleich gerichteter Kräfte ist gleich deren Summe (Fig. 77).

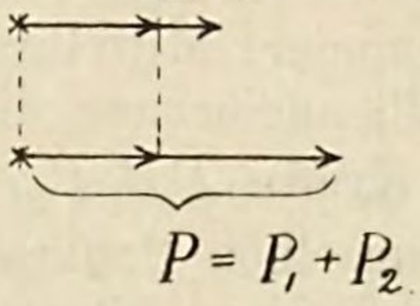


Fig. 77.

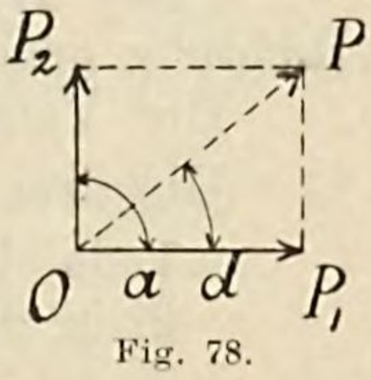


Fig. 78.

Für $a = 90^0$, ist:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \text{ (Fig. 78)} \quad \text{. . . . . 127}$$

$$\sin d = \frac{P_2}{P}; \quad \cos d = \frac{P_1}{P}; \quad \operatorname{tg} d = \frac{P_2}{P_1} \quad \text{. . . . 128}$$

Für $a = 90^0$ und $d = 45^0$, ist:

$$P_1 = P_2 \text{ und } P = P_1 \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 129$$

(Maschinenwissenschaften: Hydraulischer Arbeitsmesser von Hefner-Altenek.)

Für das Gleichgewicht müsste das Kräfteergebniss (die Resultante):

$P = O$ sein, was aber nur möglich ist, wenn für sich:

$$\left.\begin{matrix} P_1 = O \\ P_2 = O \text{ ist.} \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130$$

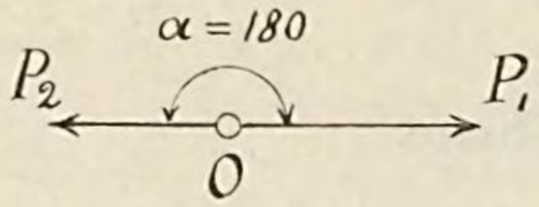


Fig. 79.

Für $a = 180^0$, ist:

$$P = P_1 - P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131$$

und hat das Vorzeichen der grösseren Kraft; d. h. die Mittelkraft entgegengesetzter Kräfte ist gleich deren Unterschiede (Fig. 79).

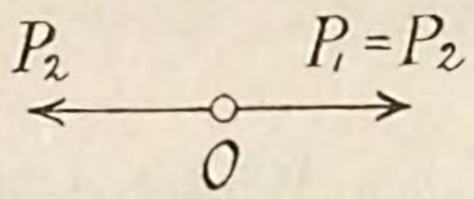


Fig. 80.

Ist ausserdem:

$$\left.\begin{matrix} P_1 = P_2 \\ P = O \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132$$

so ist:

d. h., zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte haben das Ergebniss (die Resultante) Null; halten sich demnach im Gleichgewichte.

Dieser Satz könnte der Satz von den zwei Kräften genannt werden und gegenüber dem Satze von den drei Kräften so ausgedrückt werden:

Die geringste Zahl von Kräften, welche sich überhaupt im Gleichgewicht halten können, ist zwei.

Diese Kräfte müssen dann:

1. in demselben Punkte angreifen,
2. einen Winkel von 180^0 mit einander einschliessen, d. h. in derselben Linie, aber im entgegengesetzten Sinne wirken,
3. einander gleich sein.

§ 74.

Der Satz von den drei Kräften (Fig. 81).

Die geringste Zahl von nicht in derselben Linie wirkenden, sondern gegeneinander geneigten Kräften, welche sich im Gleichgewicht halten können, ist drei.

Jede dieser Kräfte ist aufzufassen als die in entgegengesetzter Richtung genommene Mittelkraft aus den anderen beiden Kräften.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes ist § 151 gegeben.

Die drei Kräfte $P P_1 P_2$ müssen folglich:

1. in demselben Punkte angreifen,
2. in derselben Ebene wirken,
3. so beschaffen sein, dass jede gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist der Mittelkraft (Resultanten) aus den anderen beiden.

Der letzte Satz lässt sich in eine bestimmte mathematische Form kleiden:

Nach dem Sinussatze folgt zunächst aus dem schraffirten Dreiecke der Fig. 81:

$$P : P_1 : P_2 = \sin f : \sin e : \sin d,$$
$$= \sin(180^0 - f) : \sin(180^0 - e) : \sin(180^0 - d),$$
$$= \sin a : \sin a_1 : \sin a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133.$$

Diese Gleichung heisst wörtlich:

Drei sich im Gleichgewichte haltende Kräfte müssen sich verhalten wie die Sinus der Winkel, welche je von den beiden anderen Kräften (an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte O) eingeschlossen werden.

Dieser Satz von den drei Kräften ist sehr wichtig und wird später öfters angewandt.

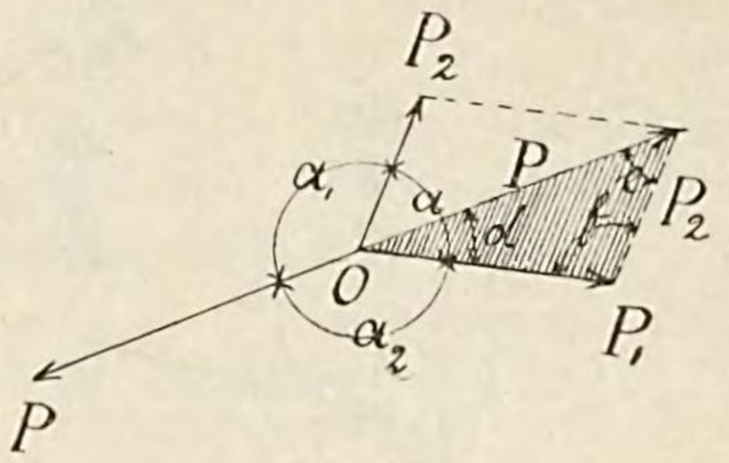


Fig. 81.

Der Satz von den vier Kräften wird später unter den Kräften im Raume behandelt.

b.

Zerlegung der Kräfte.

§ 75.

Mit Hülfe des Parallelogramm-Satzes lässt sich eine gegebene Kraft P nach zwei angenommenen Richtungen XZ in die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegen (Fig. 82), indem man vom Endpunkte der die Kraft P darstellenden Linie zu den angenommenen Richtungen parallele Linien zieht. Alsdann ist nach dem Sinussatze:

$$P_1 = P \cdot \frac{\sin(a - d)}{\sin a}; \quad P_2 = P \cdot \frac{\sin d}{\sin a} \quad . \quad . \quad 134$$

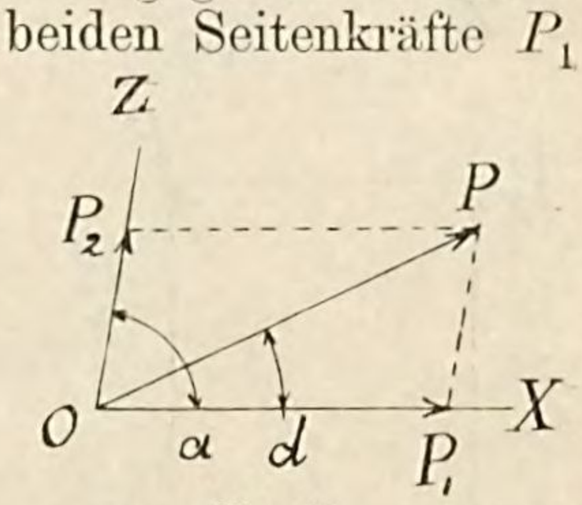


Fig. 82.

Schliessen die angenommenen Richtungen XZ einen rechten Winkel ein (Fig. 83), so ist:

$$P_1 = P \cdot \cos d; \quad P_2 = P \cdot \sin d \quad . \quad . \quad 135$$

Eine Zerlegung letzterer Art ist wiederholt vorzunehmen bei der Lösung der nun folgenden Aufgabe.

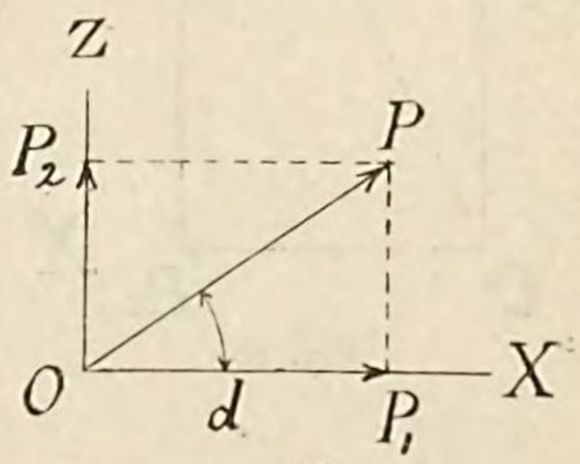


Fig. 83.

c.

Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Kräften in derselben Ebene.

§ 76.

Schliessen die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ mit der X-Richtung, beziehungsweise die Winkel $d_1 d_2 d_3 \ldots$ (Fig. 84) ein, so ist die Mittelkraft (Fig. 85) gegeben durch die Gleichungen:

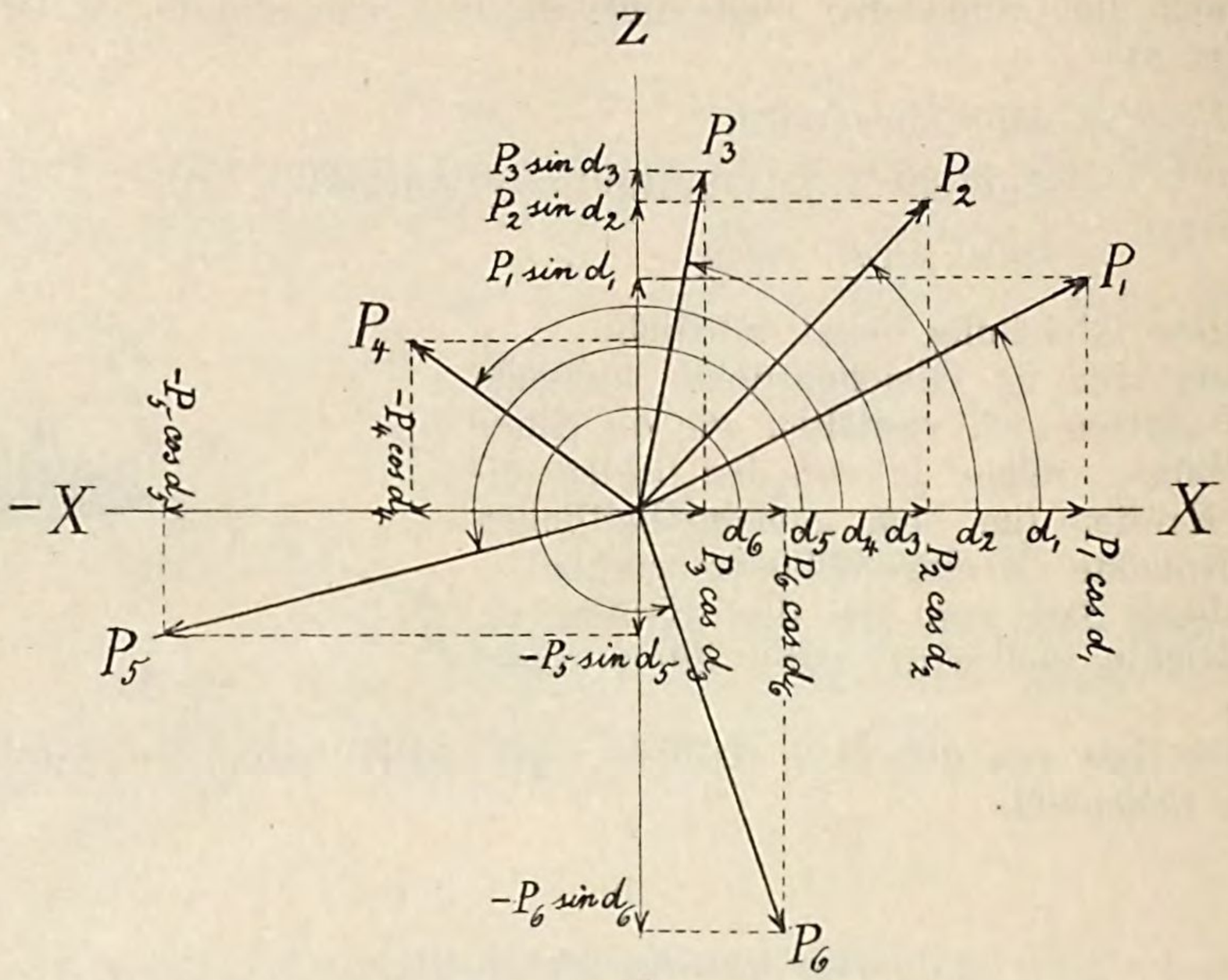


Fig. 84.

Z

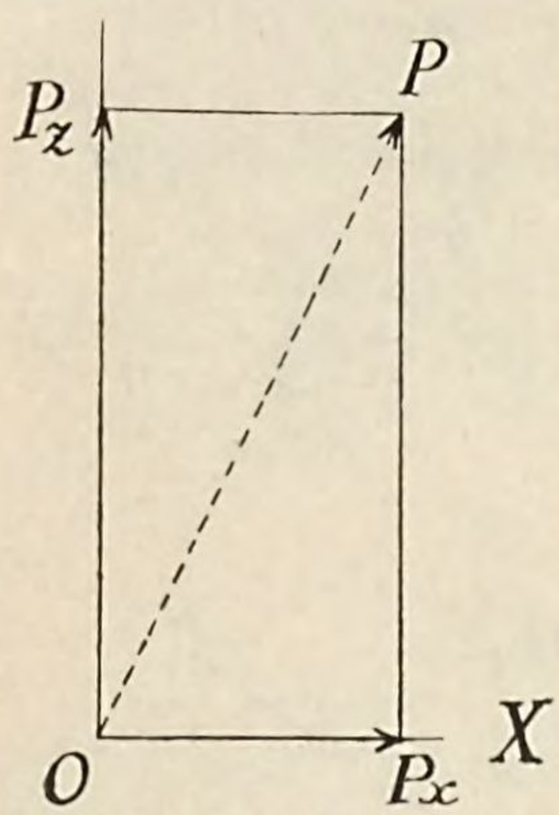


Fig. 85.

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \quad \ldots \text{ der Grösse nach } \ldots 136$$

$$\left.\begin{aligned} \sin d &= \frac{P_z}{P} \\ \text{oder:} \\ \cos d &= \frac{P_x}{P} \\ \text{oder:} \\ \operatorname{tg} d &= \frac{P_z}{P_x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ der Richtung nach } \ldots 137$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wenn: } P_x &= P_1 \cdot \cos d_1 + P_2 \cdot \cos d_2 \pm \ldots \\ P_z &= P_1 \cdot \sin d_1 + P_2 \cdot \sin d_2 \pm \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots 138$$

Für das Gleichgewicht muss sein:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= 0 \\ P_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots, \ldots\ldots 139$$

d. h., sollen beliebig viele Kräfte in einer Ebene sich in einem Punkte O das Gleichgewicht halten, so muss die algebraische Summe sämmtlicher Kraftantheile, welche in die X-, und die Summe sämmtlicher Kraftantheile, welche in die Z-Achse fallen, für sich gleich Null sein.

Man lese auch nach, was unter „Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl von Geschwindigkeiten“ gesagt ist. Die Sätze dort gelten auch hier, wenn Kräfte anstatt Geschwindigkeiten gesetzt werden. Auch das Zahlenbeispiel dort könnte hier benutzt werden; nur wäre anstatt $c_1 = 3$ m, $c_2 = 5$ m, $c_3 = 4$ m, bezw. $P_1 = 3$ kg, $P_2 = 5$ kg, $P_3 = 4$ kg zu setzen.

Durch Zeichnung findet man die Mittelkraft P der Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ nach genau denselben Regeln, welche in den §§ 25, 26, 39 für Geschwindigkeiten gegeben sind.

§ 77.

Kräfteparallelogramm. Gesetzes zunächst die Kräfte P_1 P_3 zur Mittelkraft P'' zusammen aus den Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$. Man setze mittelst des Parallelogramm- und P_2 zur Mittelkraft P', dann P' mit und so fort, so ist P die Mittelkraft In der angegebenen Weise ist fortzufahren, wenn noch mehr Kräfte zusammenzusetzen sind.

P in entgegengesetzter Richtung, also als $(-P)$ genommen, hält der gefundenen Mittelkraft P, somit auch den Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ das Gleichgewicht.

§ 78.

Kräftepolygon. Man reihe in beliebiger Reihenfolge die gegebenen Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ nach Grösse und Richtung aneinander, so bildet die

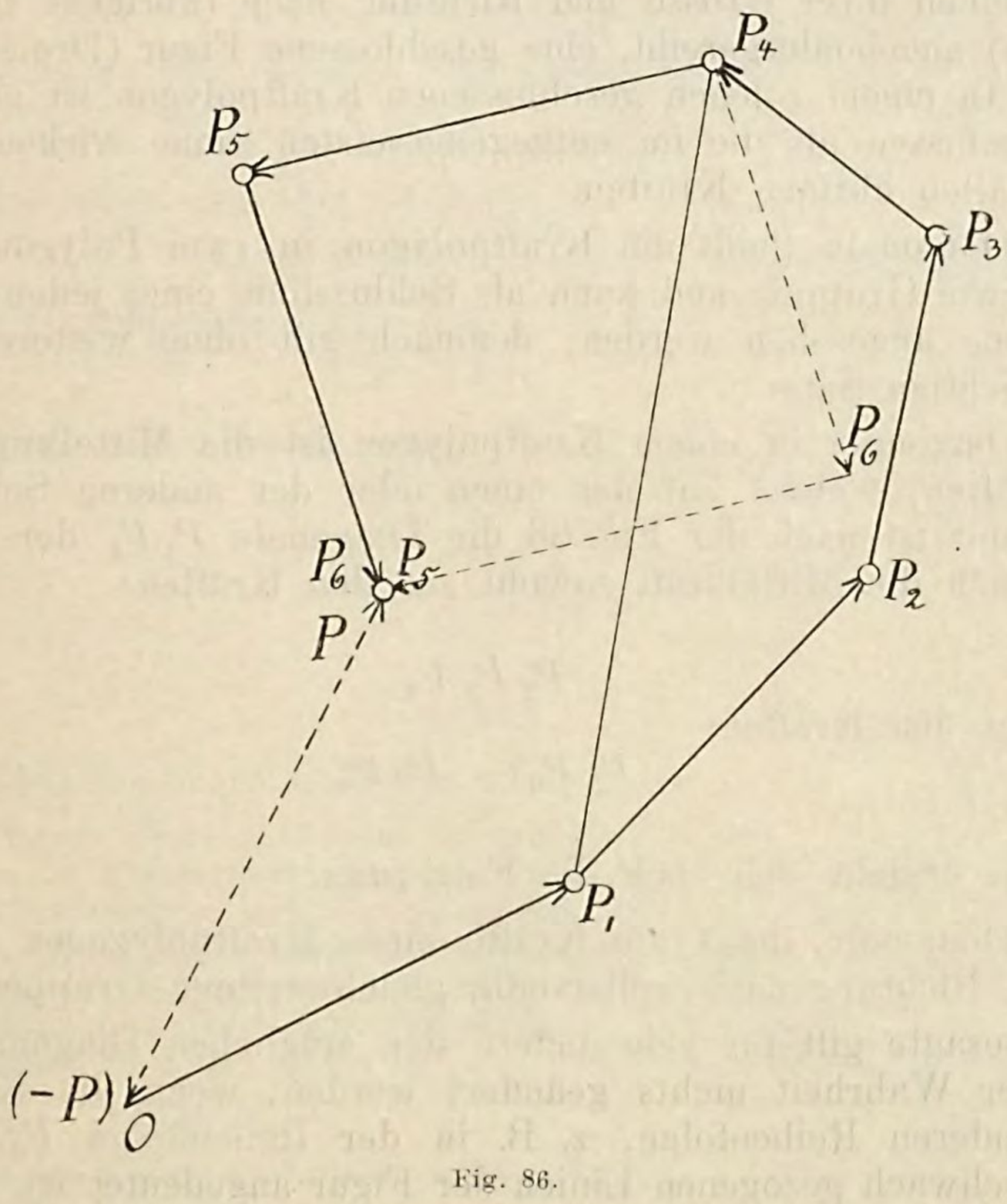


Fig. 86.

Linie P, welche noch zu ziehen ist, um die Figur zu einer geschlossenen zu machen, die Mittelkraft aus den gegebenen Kräften (Fig. 86). Nimmt man in der Figur diese Kraft P in derjenigen Richtung, welche durch die Pfeil-

spitze ($-P$) angedeutet ist, so hat sie eine der Mittelkraft aus den gegebenen Kräften $P_1 P_2 P_3 \ldots$ entgegengesetzte Richtung und ist dann, wie der Vergleich mit der Figur leicht ergiebt, als diejenige Kraft anzusehen, welche den gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält. Die so das Gleichgewicht sich haltenden Kräfte bilden ein geschlossenes Polygon, in welchem die Kräfte ihrer Richtung nach in sich zurücklaufen; d. h. ginge man auf den Seiten des Polygons von irgend einer Stelle aus stets in der Richtung der einzelnen aneinandergereihten Kräften fort, so würde man wiederum an dem Ausgangspunkte ankommen. In diesem Kräfte-Kreislaufe liegt zugleich die Wahrheit ausgedrückt, dass bei Kräften, welche sich im Gleichgewichte halten, eine einseitige Kraftwirkung nicht vorhanden sein kann.

Ebensogut wie P, könnte auch jede andere Seite des Polygons als Schlusslinie angesehen werden, d. h. von ihr dasselbe gesagt werden, wie vorhin von P.

Hiernach leuchtet die Richtigkeit folgender für die Graphostatik (§ 258 u. ff.) wichtigen Sätze ein:

Halten sich (3, 4 und mehr) Kräfte an einem Körper (z. B. an einer Dachkonstruktion, einer Brückenkonstruktion etc.) im Gleichgewichte, so bilden dieselben ihrer Grösse und Richtung nach (übrigens in beliebiger Reihenfolge) aneinandergereiht, eine geschlossene Figur (Dreieck, Viereck, Polygon). In einem solchen geschlossenen Kraftpolygon ist eine jede der Kräfte aufzufassen als die im entgegengesetzten Sinne wirkende Mittelkraft aus allen übrigen Kräften.

Jede Diagonale theilt ein Kraftpolygon in zwei Polygone, also die Kräfte in zwei Gruppen und kann als Schlusslinie eines jeden der beiden Theilpolygone angesehen werden; demnach gilt ohne weiteres auch der folgende wichtige Satz:

Jede Diagonale in einem Kraftpolygon ist die Mittelkraft aus denjenigen Kräften, welche auf der einen oder der anderen Seite von ihr liegen. Somit ist nach der Fig. 86 die Diagonale $P_1 P_4$ der Grösse und Richtung nach die Mittelkraft sowohl aus den Kräften:

$$P_2 P_3 P_4,$$

als auch aus den Kräften:

$$P_5 P_6 (-P) P_1.$$

Hieraus ergiebt sich noch die Folgerung:

Jede Diagonale theilt die Kräfte eines Kraftpolygones in zwei der Grösse und Richtung nach vollständig gleichwerthige Gruppen.

Das Gesagte gilt für jede andere der möglichen Diagonalen. Auch kann an der Wahrheit nichts geändert werden, wenn die Kräfte $P_5 P_6$ in einer anderen Reihenfolge, z. B. in der Reihenfolge $P_6 P_5$, wie es durch die schwach gezogenen Linien der Figur angedeutet ist, aneinandergefügt werden.

Unsere Diagonale kann auch als Projektion der beiden Kraftgruppen angesehen werden. Weitere Ausführungen sind weiter unten unter „Graphostatik“ gebracht.

B.

Kräfte im Raume.

§ 79.

Gegeben sind die Kräfte $P_1\,P_2\,P_3\ldots$,
welche mit der OX die Winkel $a_1\,a_2\,a_3\ldots$,
„ „ OY „ „ „ $b_1\,b_2\,b_3\ldots$,
„ „ OZ „ „ „ $c_1\,c_2\,c_3\ldots$
einschliessen (Fig. 87).

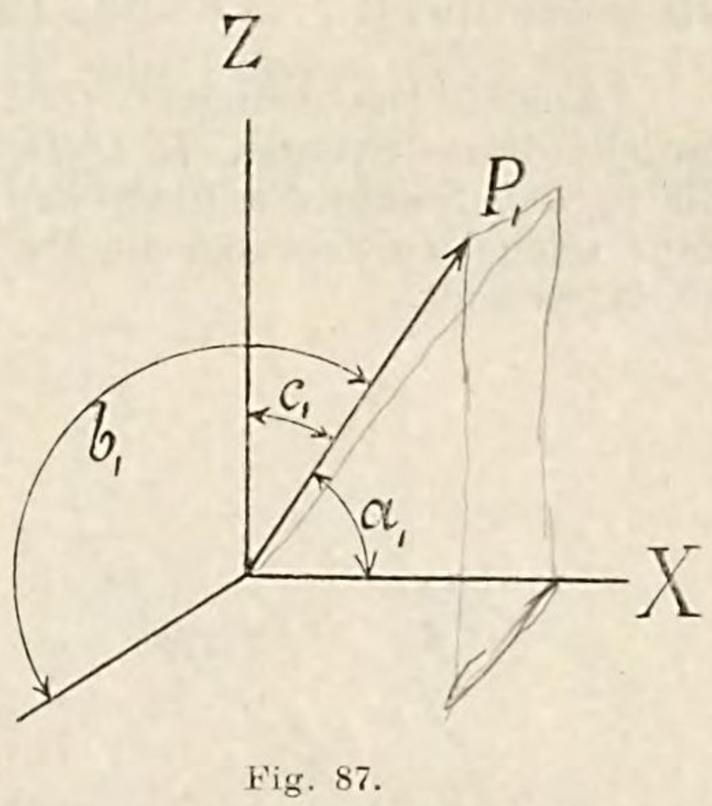


Fig. 87.

Dann ist die Mittelkraft:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \text{ nach Grösse} \ldots 140$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{P_x}{P} \\ \cos b &= \frac{P_y}{P} \\ \cos c &= \frac{P_z}{P} \end{aligned}\right\} \text{ nach Richtung } \ldots \quad 141$$

wenn:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_1 \cdot \cos a_1 + P_2 \cdot \cos a_2 \pm \ldots \\ P_y &= P_1 \cdot \cos b_1 + P_2 \cdot \cos b_2 \pm \ldots \\ P_z &= P_1 \cdot \cos c_1 + P_2 \cdot \cos c_2 \pm \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 142$$

Auch hier muss stets der Gleichung:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 \quad \text{genügt werden.}$$

Für das Gleichgewicht muss sein:

$$P = O, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 143$$

was nur möglich ist, wenn für sich:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= O \\ P_y &= O \\ P_z &= O \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 144$$

ist.

§ 80.

Der Satz von den vier Kräften.

Die geringste Zahl von nicht in derselben Ebene, sondern im Raume auf denselben Punkt O wirkenden Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, ist vier. Jede dieser Kräfte ist wieder aufzufassen als die in entgegengesetzter Richtung angenommene Mittelkraft aus den andern drei Kräften.

In nebenstehender Figur sind z. B.

$$P_1\,P_2\,P_3$$

als Zugkräfte in den Ketten anzusehen, durch welche man die Kugel vom Gewichte

$$G = (-P)$$

an der Decke eines Zimmers aufgehängt hat.

Nimmt man der Einfachheit wegen an, dass die Ketten senkrecht zueinander stehen, so ist:

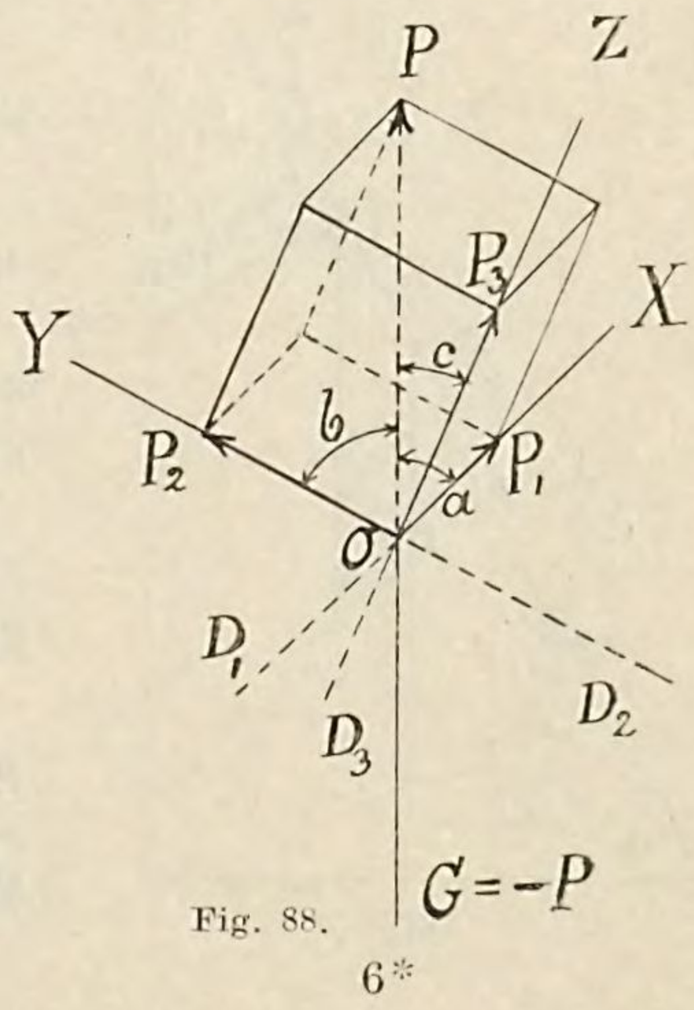


Fig. 88.

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} \\ P_1 &= P \cdot \cos a \\ P_2 &= P \cdot \cos b \\ P_3 &= P \cdot \cos c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145$$

Anstatt das Gewicht G an Ketten aufzuhängen, könnte man dasselbe auch mittelst dreier Stangen $D_1 D_2 D_3$ gegen den festen Erdboden stützen. Dann würden die in den Stangen auftretenden Druckspannungen dieselben Grössen $P_1 P_2 P_3$ haben. Eine solche Vorkehrung, als Dreifuss schon den Alten bekannt, wird in der Technik oft angewandt.

§ 81.

Beispiele.

Beispiel 46: Die beiden Kräfte:

$P_1 =$ . . . . . 40 kg,
$P_2 =$ . . . . . 90 kg

schliessen einen Winkel:

$a =$ . . . . . 30^0

miteinander ein (Fig. 89).

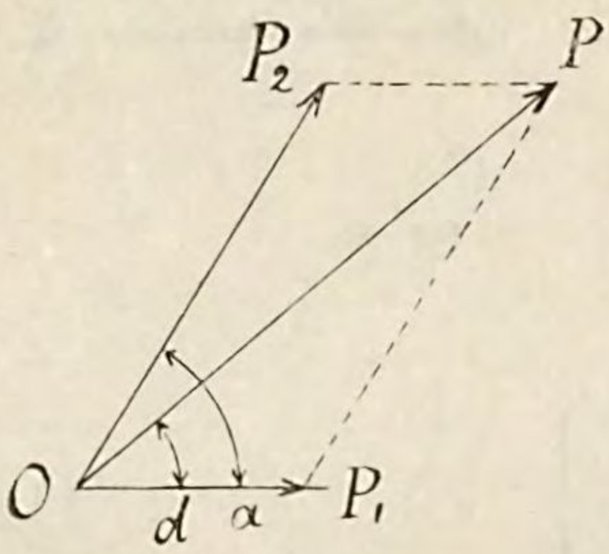


Fig. 89.

Welche Grösse und Richtung hat die Mittelkraft P?

$$P = \sqrt{40^2 + 90^2 + 2 \cdot 40 \cdot 90 \cdot \cos 30} = \sqrt{1600 + 8100 + 7200 \cdot 0{,}866},$$

$$P = \sqrt{15\,935} = 126 \text{ kg}.$$

Den Winkel d, den die Mittelkraft mit der Kraft P_1 einschliesst, ergiebt die Gleichung:

$$\sin d = \sin a \cdot \frac{P_2}{P} = 0{,}5 \cdot \frac{90}{126},$$

$$d = 21^0.$$

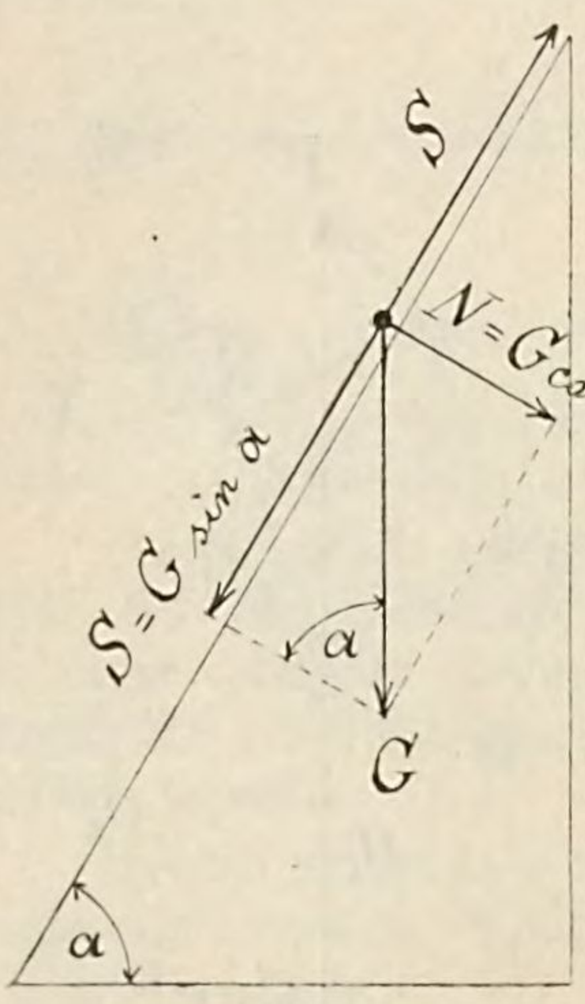


Fig. 90.

Beispiel 47: Auf einer geneigten Ebene (in einem tonnlägigen Schachte) von der Neigung:

$a =$ . . . . . 60^0

soll eine Last (Erztonne) vom Gewichte:

$G =$ . . . . . 1000 kg

emporgezogen werden (Fig. 90).

Es ist der im Seile erforderliche Zug S zu bestimmen, wenn das Seil die Richtung der geneigten Ebene hat.

Man zerlege G parallel und senkrecht zur geneigten Ebene, so ist der sogen. Herabgleitungstrieb:

$$S = G \cdot \sin a = 1000 \cdot 0{,}866 = 866 \text{ kg} \quad \ldots \quad 146$$

Ebenso gross muss auch der aufwärtsgerichtete, gesuchte Zug am Seile sein, wenn auf Reibung keine Rücksicht genommen wird.

Der senkrecht zur geneigten Ebene gerichtete Kraftantheil (Druck):

$$N = 1000 \cdot \cos a = 1000 \cdot 0{,}5 = 500 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 147$$

veranlasst Reibung, von der später gehandelt werden soll.

Beispiel 48: Wie gross würde unter sonst gleichen Verhältnissen die erforderliche, wagerecht gerichtete Zugkraft H sein müssen (Fig. 91)?

$$H = G \cdot \frac{\sin a}{\cos a} = G \cdot \operatorname{tg} a = 1000 \cdot 1{,}732 = 1732 \text{ kg} \quad . \quad . \quad 148$$

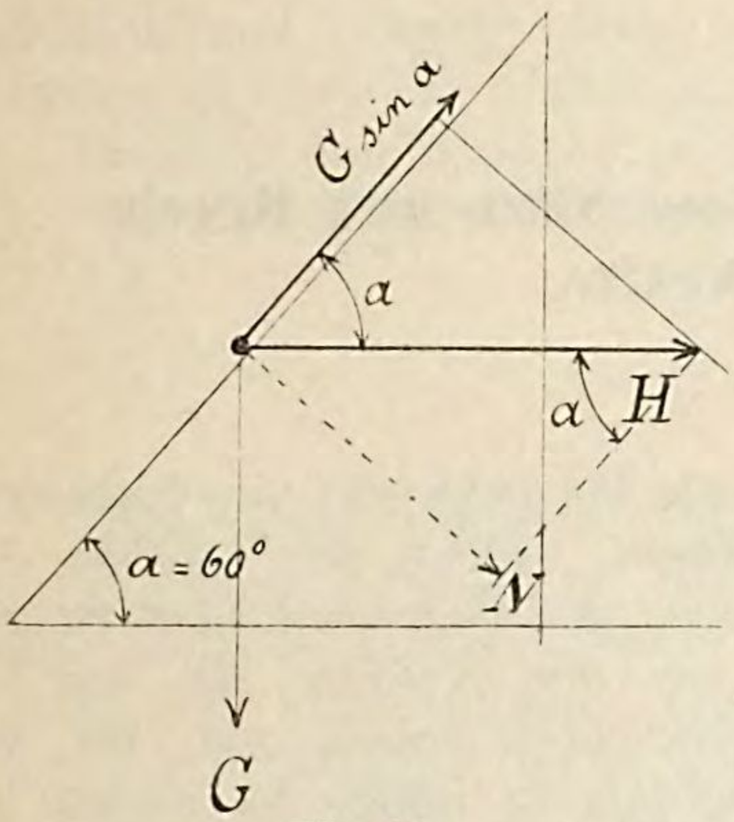


Fig. 91.

Es muss nämlich H so gross sein, dass der in die Richtung der geneigten Ebene fallende Antheil gleich der erforderlichen Zugkraft:

$$S = G \cdot \sin a \quad \text{(Fig. 90)}.$$

Der Normaldruck ist dann:

$$N = H \cdot \sin a = G \cdot \operatorname{tg} a \cdot \sin a.$$

Beispiel 49: Bei dem in der Fig. 92 verzeichneten Kurbelgetriebe sei L die Schubstange, r die Kurbellänge, a der augenblickliche Winkel zwischen der Kurbelstellung und der Kolbenstangenrichtung, b der dazugehörige Winkel zwischen Schubstange und Kolbenstangenrichtung, P die Kraft in der Richtung der Kolbenstange. Es soll die Kraft in der Richtung der Schubstange L gefunden werden.

Durch Zerlegung der gegebenen Kraft P findet man als gesuchte Schubstangenkraft:

$$P_1 = \frac{P}{\cos b} \quad . \quad . \quad . \quad 149$$

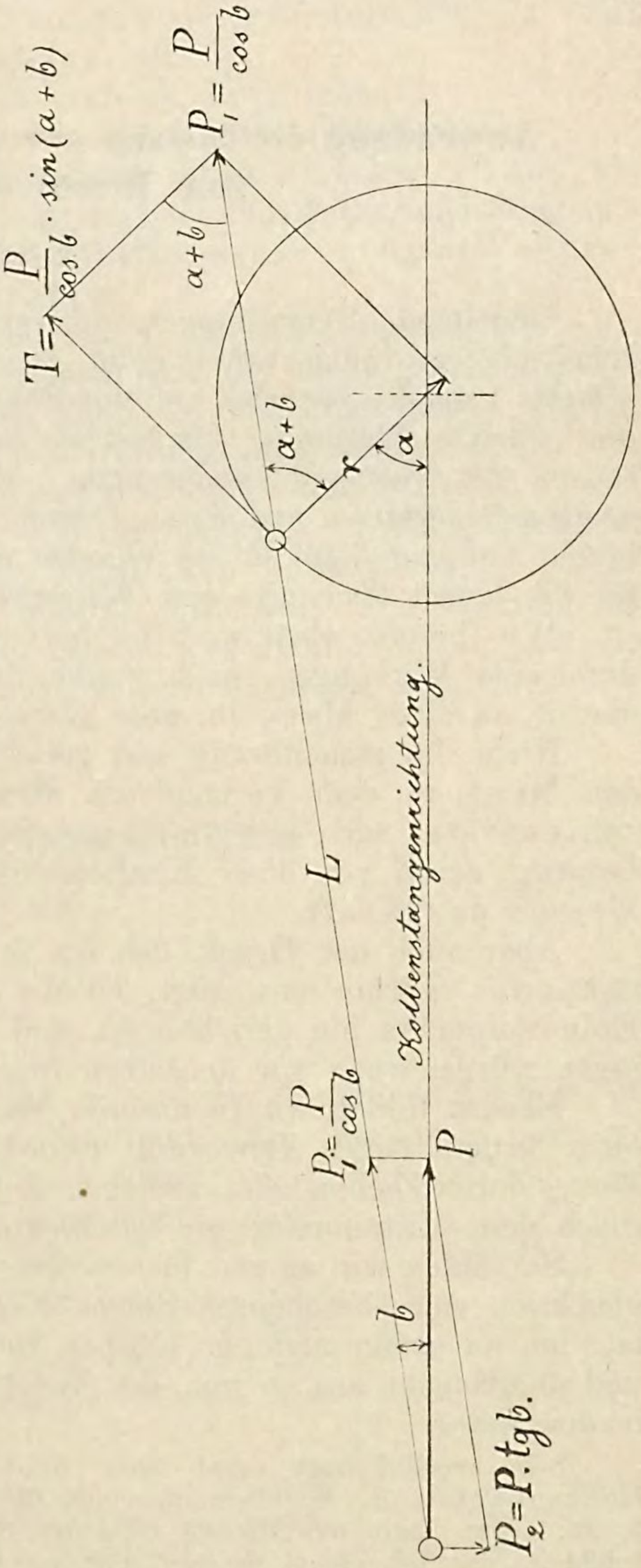


Fig. 92.

Die Kraft $P_2 = P \cdot \operatorname{tg} b$ wird durch die sogen. Führung (Gleitbahn) aufgenommen und erzeugt hier Reibung.

Die Kraft P_1 wird auf den Kurbelzapfen übertragen. Durch abermalige Zerlegung ergiebt sich dann als Tangentialkraft:

$$T = \frac{P}{\cos b} \cdot \sin(a + b),$$

welche die Drehung der Kurbel veranlasst. Der in der Richtung des Radius r fallende Antheil ist schädlich.

III.

Anwendung der bislang gewonnenen Sätze und Regeln zum Messen der Kräfte.

§ 82.

Einleitende Bemerkungen. Dieser Absatz III bezweckt die bisherigen Ermittelungen innig miteinander zu verbinden. Denn der „Erste Abschnitt“ handelte zunächst nur von Bewegungen und Bewegungsänderungen, der „Zweite Abschnitt“ bis hierher dann von den Kräften, als den Ursachen der Bewegungsänderungen. Im Folgenden sollen nun die Bewegungsänderungen und deren Ursachen zugleich in innige Beziehung gebracht und auf diese Weise Gesetze und Regeln festgestellt werden, die für die Kunst (Technik) und Wissenschaft unentbehrlich sind.

Wie bereits oben in § 62 hervorgehoben wurde, wird eine Kraft durch die Wirkungen, d. h. durch die Bewegungsänderungen gemessen, die sie an einer Masse in einer gewissen Zeit hervorbringt.

Nicht die gleichförmig und geradlinige Bewegung, also das Beharren der Masse in dem vorhandenen Bewegungszustande, sondern die beschleunigte, auch krummlinige Bewegung, kurz die Bewegungs-Aenderung, zeugt von einer Krafteinwirkung und ist der Massstab zum Messen der Kraft.

Aber auch der Druck, den ein in der Hand oder auf der Wagschale ruhender Körper uns zeigt, ist die Folge einer Kraft, die nach dem Erdmittelpunkte hin gerichtet ist, und den Körper sofort dahin beschleunigen würde, wenn wir denselben freigeben.

Ebenso fühlen wir in unseren Muskeln die Kraft, die zur Erzeugung einer krummlinigen Bewegung erforderlich ist, wenn wir die bewegte Masse durch Ziehen oder Drücken in ihre krummlinige Bahn einzwängen (nach dem Mittelpunkte hin beschleunigen).

So fühlen wir an und in unserem eigenen Körper durch Vermittelung gleichsam eines besonderen Sinnes (Kraftsinnes) die Kraft, die nothwendig ist, um an einem anderen Körper Bewegungsänderungen herbeizuführen, und überzeugen uns so von der Wechselwirkung zwischen den Körpern in der Natur.

Sehr treffend sagt schon einer unserer tiefsten und erfolgreichsten Denker Redtenbacher in den Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues 1859 S. 22: „Man kann die Materie oder den Stoff gleichsam als ein Doppelwesen betrachten, das mit einem passiven und mit einem aktiven Prinzip begabt ist. Das passive Prinzip, das man das „Beharrungsvermögen“, auch Trägheit genannt hat, be-

steht theils in der Fähigkeit der Materie, durch sich selbst und ohne alle äussere Einwirkung in einem Zustande des ruhigen oder des bewegten Seins verharren zu können, theils in der Unfähigkeit durch sich selbst einen in ihr vorhandenen Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verändern. Dies Beharrungsvermögen könnte man auch das Prinzip der Selbsterhaltung des ruhigen oder des bewegten Seins der Materie nennen. Das zweite, nämlich das aktive Prinzip, wird Kraft genannt. Es entsteht in der Fähigkeit der Stoffe, aufeinander wechselseitig einzuwirken und dadurch die Zustände ihres Seins zu verändern. Dieses aktive Prinzip kann man auch das Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit der Stoffe nennen, wodurch das ruhige oder das bewegte Sein der Körper verändert wird."

Meines Dafürhaltens müsste man noch einen Schritt weiter gehen und kurz und bündig sagen, dass eine gewisse Dreiheit die Ur- und Natureigenschaft aller Naturkörper ist.

Denn in den Naturkörpern liegt zugleich das Streben:

1. Bewegungsänderungen an sich zu verhüten (Trägheit),
2. „ gegenseitig zu beschränken (Undurchdringlichkeit und Widerstandsfähigkeit),
3. „ an anderen Körpern zu erzeugen (Wechselwirkung).

Die sogen. Undurchdringlichkeit, d. i. diejenige Eigenschaft aller Körper, einen bestimmten Raum einzunehmen, der nicht gleichzeitig von einem anderen eingenommen werden kann, ist unbedingt jenem Doppelwesen noch hinzuzufügen. Ohne Undurchdringlichkeit mit einer gewissen Widerstandsfähigkeit wäre keine Wechselwirkung, kein natürliches noch künstliches Gebilde denkbar. Sie erst gewährleistet deshalb auch den Bestand unserer Bauwerke und aller künstlichen Vorrichtungen.

Suchen wir nun auf Grund unserer bisherigen Ermittelungen die mathematischen Ausdrücke, die zum Messen der Kräfte dienen, aus den uns bereits bekannt gewordenen Bewegungserscheinungen abzuleiten.

A.

Satz von der Beschleunigung.

§ 83.

Die Gleichung (§ 69):

$$P = m \cdot p = \frac{G}{g} \cdot p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150$$

lässt zunächst eine unbekannte Kraft P aus der Beschleunigung p, die wir an einer Masse m beobachten, ermitteln. Ein Verfahren, das zur Ermittelung der Erdbeschleunigung g führt, wird später bei der Lehre vom Pendel angegeben. Auch in der Physik wird hiervon gehandelt.

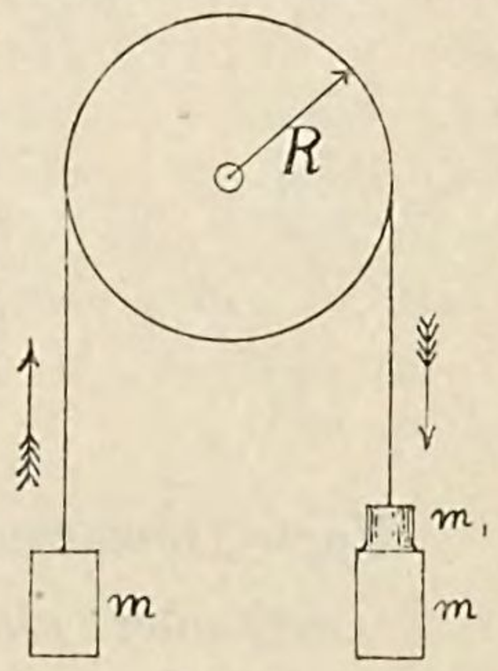


Fig. 93.

Beispiel 49: An den Enden eines über eine drehbare Rolle R gelegten Fadens ist je eine Masse m befestigt. Alsdann halten sich diese Massen das Gleichgewicht. Wird auf eine der Massen nun noch die Masse m_1 gelegt, so bewirkt diese durch ihr Gewicht:

$$G_1 = m_1 g$$

eine Beschleunigung p sämmtlicher Massen m, m, m_1 so zwar, dass die belastete Masse m fällt, die andere Masse aber steigt. Es gilt dann auch hier die Gleichung der Beschleunigung:

$$\textit{Kraft} = \textit{Masse} \times \textit{Beschleunigung}.$$

und es ist:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot g &= (m + m + m_1) \cdot p \\ p &= \frac{m_1}{2m + m_1} \cdot g \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 151$$

Ist $m_1 = \frac{1}{4} m$, so ergiebt sich:

$$p = \frac{\frac{1}{4} m}{2m + \frac{1}{4} m} \cdot g,$$

$$p = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} \cdot g = \frac{1}{9} g.$$

Es beträgt demnach die mitgetheilte Beschleunigung nur $\frac{1}{9}$ der Beschleunigung des freien Fallens g.

Dieser Vorgang findet statt bei der sogen. Atwood'schen Fallmaschine, einer physikalischen Vorrichtung, die dazu dient, die Fallgesetze durch den Versuch nachzuweisen.

Dieselbe Berechnung gilt auch für des Herunterlassen (sogen. Hängen) einer Last mittelst einer Fördermaschine, also auch für die Bewegung beim sogen. Bremsberge des Bergmanns. Man kann sich vorstellen unter m die Masse der Nebenlast (der leeren Fördergefässe und der Förderseile), unter m_1 die Masse der Nutzlast (Ladung). Von dem Einflusse der Masse der drehbaren Rolle wird erst später unter Trägheitsmomenten gehandelt.

B.

Satz vom Antriebe.

§ 84.

Bewegungsgrösse. Antrieb. Aus der Gleichung 6:

$$v = c + pt,$$

oder:

$$v - c = pt$$

folgt, wenn auf beiden Seiten mit m, der Masse, die sich bewegt, vervielfältigt wird:

$$\left.\begin{aligned} mv - mc &= mp \cdot t \\ \boxed{mv - mc &= P \cdot t} \\ \frac{G}{g} v - \frac{G}{g} c &= P \cdot t \\ v - c &= g \frac{P}{G} \cdot t. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 152$$

Nach Descartes (Cartesius) nennt man die Ausdrücke:

mv oder mc, d. i. Masse mal Geschwindigkeit, Bewegungsgrösse,

Pt . . ., d. i. Kraft mal Wirkungsdauer, den Antrieb der Kraft, welche die Geschwindigkeitszunahme $v - c$ hervorrief.

In Worten heisst das Gesetz, das durch die obigen Gleichungen ausgedrückt ist:

Die Zunahme an Bewegungsgrösse der Masse m ist gleich dem Antriebe der Kraft P.

Vermittelst der Gleichung lässt sich die Kraft P, überhaupt jede der Grössen ermitteln, wenn die übrigen bekannt sind. So ist:

$$P = \frac{mv - mc}{t} = \frac{G}{g}\,\frac{v - c}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 153$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit:

$$c = 0$$

$$\boxed{mv = P \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 154$$

Diese Gleichung lässt sich auf verschiedene Weise in Worte fassen:

1. Wenn einer Masse m in t Sekunden die Endgeschwindigkeit v ertheilt werden soll, so ist dazu erforderlich eine Kraft:

$$P = \frac{mv}{t} = \frac{G}{g}\,\frac{v}{t};$$

2. Wenn der Masse m durch die Kraft P die Endgeschwindigkeit v ertheilt werden soll, so muss die Dauer der Einwirkung betragen:

$$t = \frac{mv}{P} = \frac{G}{g}\,\frac{v}{P};$$

3. Wenn diese Masse m der Kraftwirkung P während t Sekunden ausgesetzt ist, so erlangt sie die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Pt}{m} = \frac{g}{G} \cdot P \cdot t;$$

4. Wenn eine Kraft P in t Sekunden einem Körper die Endgeschwindigkeit v ertheilen soll, so muss dessen Masse sein:

$$m = \frac{P \cdot t}{v},$$

oder dessen Gewicht:

$$G = g\,\frac{Pt}{v}.$$

§ 85.

Wenn zwei verschiedene Kräfte . . . . . P und P_1
auf zwei verschiedene Massen . . . . . m „ m_1
einwirken und dabei in den Zeiten . . . . . t „ t_1
die Geschwindigkeiten . . . . . v „ v_1
hervorbringen, so verhalten sich:

$$\frac{m_1 v_1}{mv} = \frac{P_1 t_1}{P \cdot t}.$$

Ist in beiden Fällen die Zeit dieselbe, also:

$$t_1 = t,$$

so ist:

$$\frac{m_1 v_1}{m \cdot v} = \frac{P_1}{P}.$$

Ist in beiden Fällen auch die Kraft dieselbe, also:

$$P_1 = P,$$

kurz der Antrieb Pt derselbe, so ist:

oder:

$$\left.\begin{aligned} m_1 v_1 &= m \cdot v \\ \frac{v}{v_1} &= \frac{m_1}{m} = \frac{\frac{G_1}{g}}{\frac{G}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 155$$

Die letzte sehr wichtige Gleichung auf einen besonderen Fall angewendet, würde in Worten heissen:

Wenn beim Abfeuern einer Kanone die Kraft P der Pulvergase gleichzeitig auf die Kugel von der Masse m und rückwärts auf das Kanonenrohr von der Masse m_1 einwirkt, so verhalten sich die den Massen ertheilten Geschwindigkeiten v und v_1 umgekehrt wie die Massen.

Ist wie bei den Krupp'schen, der italienischen Regierung 1885 und 1886 gelieferten Riesenkanonen das Geschossgewicht nahezu $G = 1000$ kg, die Geschwindigkeit des Geschosses an der Rohrmündung etwa $c = 500$ m; ferner das Gewicht des Rohres $G_1 = 125\,000$ kg, so würde die Geschwindigkeit, mit welcher letzteres beim Abfeuern nach hinten ausweichen, gleichsam nach rückwärts geschossen würde:

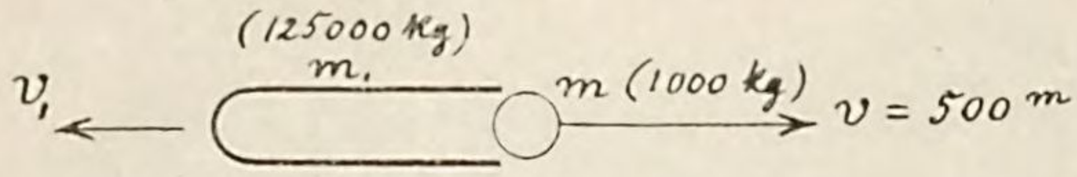


Fig. 94.

$$v_1 = \frac{G \cdot v}{G_1} = \frac{1000 \cdot 500}{125000} = 4{,}0 \text{ m}$$

sein, wenn keine Bewegungshindernisse vorhanden wären.

Bei der Maxim-Mitrailleuse wird der Rückstoss der explodirenden Pulverladung dazu benutzt, die zum Abfeuern des nächsten Schusses erforderlichen Arbeiten des Schützen zu verrichten: nämlich: das Oeffnen des Verschlusses, Hinauswerfen der leeren Patronenhülse, Einführen einer neuen Patrone, Schliessen des Verschlusses und Abfeuern der nächsten Patrone.

Ein ähnlicher Vorgang findet bei der 1870 von Shaw hergestellten sogen. Amerikanischen Pulverramme statt, welche bezweckt, mittelst des Rücklaufes eines Kanonenrohres (Mörsers) mit grosser Gewalt Pfähle einzurammen.

Ein (unserm Kanonenrohre entsprechender) Mörser A, dessen Weite etwa 50 cm, dessen Tiefe 60 cm beträgt, wird mit der Oeffnung nach oben auf dem einzurammenden Pfahle B angebracht. Ein (der Kanonenkugel entsprechender) eiserner Rammbär C von etwa $G = 1000$ kg Gewicht wird lothrecht so geführt, dass er nach der Auslösung in die Oeffnung des Mörsers fällt, hierbei die Luft im Mörser verdichtet und hierdurch, wie in einem sogen. pneumatischen Feuerzeuge, so hohe Wärme erzeugt, dass die auf den Boden des Mörsers geworfene Patrone D sich entzündet. Auf diese Weise wird nicht nur der Rammbär wieder nach oben geschleudert, sondern auch insbesondere durch den Rückschlag des Mörsers der Pfahl eingetrieben. Nun wird eine neue Patrone in den Mörser geworfen und derselbe Vorgang wiederholt sich.

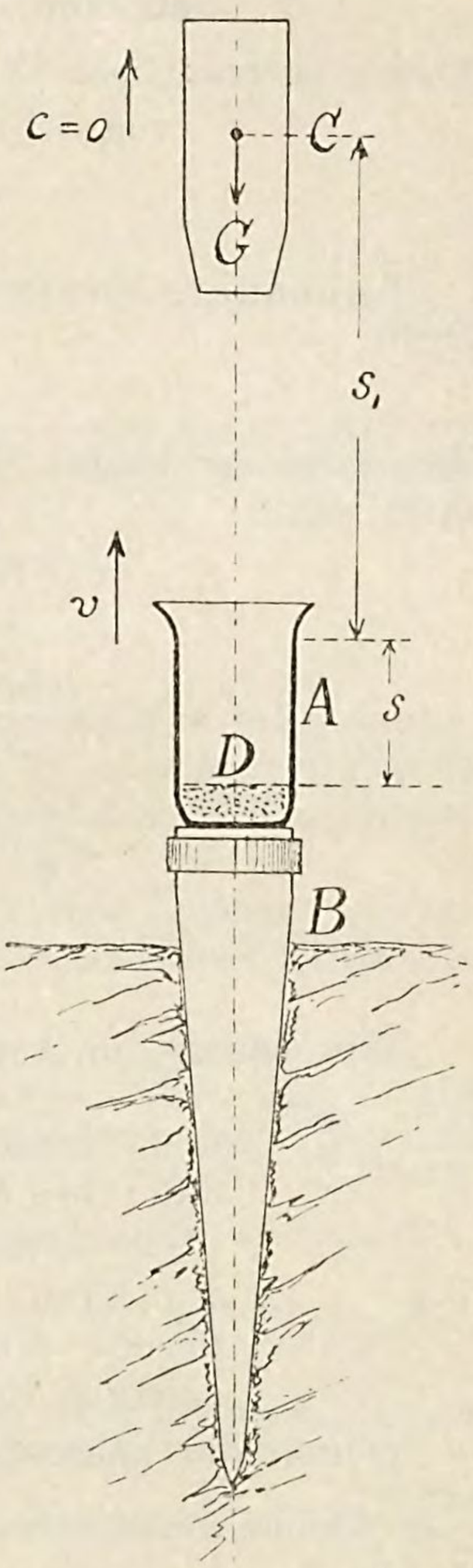


Fig. 95.

Die Betriebskosten bei der Pulverramme sollen geringer sein, als diejenigen bei allen anderen Arten von Rammen. Nach Rankine, Handbuch der Bauingenieurkunst (Deutsch von Kreuter, 1888, S. 672) sollen sich verhalten die Kosten des Rammens mittelst:

Pulver- Dampf- Kunst- und Zug-Ramme
wie 6 : 7 : 28 : 42,

dagegen die Anschaffungskosten:
wie 20 : 45 : 2 : 1.

Aus den vorstehenden, der Gleichung $\frac{v}{v_1} = \frac{m_1}{m}$ entsprechenden Betrachtungen lässt sich noch eine allgemeine Wahrheit ableiten, auf die wir später bei der Lehre vom Stoss zurückkommen müssen.

Für zwei gleich grosse Massen $m_1 = m$ würde auch $v = v_1$ sein, d. h. bei gleichem Antriebe würden gleiche Massen mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen fortfliegen. Dann würde aber, was ohne weiteres einzusehen ist, der Gesammtmassenmittelpunkt (Schwerpunkt) der bewegten Massen m und m_1 seine ursprüngliche Lage unverändert beibehalten, somit in Ruhe bleiben. Wäre vor dem Antriebe bereits eine Bewegung des Gesammtmassenmittelpunktes vorhanden, so würde diese Bewegung ungeändert fortgesetzt werden. Dasselbe gilt aber auch ganz allgemein, wenn die Massen verschieden gross sind, weil nach obigem Satze, bei gleichem Antriebe sich die kleine Masse entsprechend mit grösserer Geschwindigkeit fortbewegt. Würde demnach z. B. plötzlich unser Erdball durch eine innere Kraft in Stücke von den Massen $m_1 m_2 m_3 \ldots$ zersprengt, so würden die einzelnen Stücke mit Geschwindigkeiten davonfliegen, die der Gleichung entsprechen:

$$v_1 : v_2 : v_3 \ldots = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3} \ldots,$$

somit auch hier der Massenmittelpunkt nach wie vor seine Bewegung um die Sonne unverändert so lange fortsetzen, bis die Geschwindigkeiten eines der Stücke dadurch verändert würde, dass es irgend wo aufschlüge und so eine äussere Kraft hinzuträte.

Diese Wahrheit in ihrer Allgemeinheit heisst: Der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

C.

Satz von der Arbeit oder von der Energie.

(Auch genannt: Satz [Prinzip] von der Erhaltung der Kraft, oder Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.)

§ 86.

Lebendige Kraft. Mechanische Arbeit. Aus der Gleichung 10 (§ 20):

$$v^2 - c^2 = 2ps$$

folgt, wenn auf beiden Seiten mit der Masse m, die sich bewegt, vervielfältigt wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} &= mp \cdot s \\ \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} &= P \cdot s \\ \frac{G}{2g}v^2 - \frac{G}{2g}c^2 &= P \cdot s \\ v^2 - c^2 &= 2g\frac{P}{G} \cdot s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 156$$

Wir nennen die Ausdrücke:

$\frac{mv^2}{2}$, $\frac{mc^2}{2}$, d. i. Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit durch zwei, die lebendige Kraft (thatkräftig vorhandene, oder kinetische Energie) zu Ende, bezw. zu Anfang der Bewegung,

$P \cdot s$ . . ., d. i. Kraft mal Weg in der Richtung der Kraft, die mechanische Arbeit (Wirkung, Werk, mögliche oder potentielle Energie, Energie der Lage, Spannkraft).

Durch die geleistete mechanische Arbeit wird der Anfangswerth $\frac{mc^2}{2}$ auf den Endwerth $\frac{mv^2}{2}$ gebracht.

In Worten heisst das obige Gesetz:

Die Zunahme an lebendiger Kraft $\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}\right)$ ist gleichwerthig der von der Kraft verrichteten mechanischen Arbeit $P \cdot s$.

Es ist eine Verwandlung eingetreten: Die längs des Weges s von der Kraft P geleistete mechanische Arbeit ist umgewandelt in lebendige Kraft, als solche in der bewegten Masse gleichsam aufgespeichert und verfügbar zu einer gleichwerthigen Arbeitsleistung, nämlich zur Ueberwindung eines Widerstandes längs eines Weges. So benutzt man in der Technik herabfallende Gewichte zum Einrammen von Pfählen, zum Schmieden; die bewegte Masse eines Schwungrades, um Widerstände in Maschinen mit Drehbewegung zu überwinden, die bewegte Masse von Geschossen, um zu zerstören.

Vermittelst der Gleichung lässt sich die Kraft P nun leicht bestimmen, wenn die übrigen Grössen bekannt sind. So ist:

$$P = \frac{mv^2 - mc^2}{2 \cdot s} = \frac{G}{2g} \frac{v^2 - c^2}{s} \quad \ldots\ldots\ldots 157$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit:

$$c = 0$$

ist:

$$\frac{mv^2}{2} = P \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots 158$$

Diese Gleichung lässt sich in ähnlicher Weise, wie es oben für den Satz vom Antriebe geschah, in Worte fassen. Der Anfänger thut gut daran, für die einzelnen Grössen auch hier die vier Sätze zusammenzustellen.

§ 87.

Zwischen dem Satze vom Antrieb und dem von der mechanischen Arbeit besteht ein inniger Zusammenhang, der ja auch schon aus der Ableitung der Sätze aus den so innig zusammenhängenden, beiden Formeln $v = c + pt$ und $v^2 = c^2 + 2ps$ hervorgeht.

Trotzdem gab es eine Zeit, in der zwei bedeutende Männer: Leibniz und Descartes in grosser Meinungsverschiedenheit ob dieses Zusammenhanges waren.

Huygens kann als Entdecker des Satzes von der Arbeit angesehen werden.

Leibniz (1646—1716) führte den Namen „lebendige Kraft“, und als Mass dieser das Produkt mv^2 ein. Dieselbe Schreibweise haben noch heute einige ausländische Autoren, insbesondere die französischen, beibehalten, während in Deutschland wohl jetzt allgemein $\frac{mv^2}{2}$, also die Hälfte des Leibniz'schen Werthes als lebendige Kraft bezeichnet wird.

Descartes (1596—1650) hatte bereits vor Leibniz als Mass der Kraft das Produkt mv eingeführt.

d'Alembert (1717—1783) zeigte in der Vorrede zu seiner Dynamik, dass jene beiden Definitionen nur auf Wortstreit beruhen und verschaffte dem Satze von der mechanischen Arbeit volle Geltung.

Joh. Bernouilli (1667—1748) hatte bereits in demselben Sinne wie d'Alembert sich um die Klärung des Satzes verdient gemacht.

Robert Meyer (1842), Helmholz und andere Forscher aber haben den Satz erst zu dem vornehmsten der Naturwissenschaften gemacht, als der er heute unbestritten gilt.

Man pflegt wohl noch einen Unterschied zu machen zwischen dem Satz (Prinzip) von der Erhaltung der lebendigen Kraft, den man auf Massenbewegung, und dem Satz (Prinzip) von der Erhaltung der Kraft, den man auf Molekularbewegung bezieht.

§ 88.

Die bei den Maschinen gebräuchlichen Arbeitseinheiten.

Der Zweck einer jeden Maschine ist Uebertragung mechanischer Arbeiten. Um die mechanische Arbeit in Zahlen auszudrücken, wählt man meist als

Krafteinheit . . .	1 Kilogramm (kg)	oder	1 Pfund (℔),
Wegeseinheit . .	1 Meter (m)	„	1 Fuss (′)

und erhält als

Arbeitseinheit . . . . . 1 Meterkilogramm (mkg),
oder: 1 Kilogrammmeter (kgm),

d. i. diejenige Arbeit, die erforderlich ist, um 1 kg Gewicht auf 1 m Höhe zu heben.

In der Technik kommt es meist viel weniger darauf an, dass überhaupt eine mechanische Arbeit geleistet werde, als vielmehr darauf, dass in einer bestimmten Zeit, z. B. in 1 Sekunde, 1 Minute, 1 Stunde eine bestimmte Arbeit verrichtet werde.

Die in 1 Sekunde stetig verrichtete mechanische Arbeit nennt man kurz: Leistung oder Effekt (E). Man könnte sie passend auch Wirkungsgrösse nennen gegenüber der Bewegungsgrösse (mv). Es wäre demnach:

$$\left.\begin{aligned} E &= P \cdot v \\ P &= \frac{E}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 159$$

wenn v der Weg in 1 Sekunde oder die Geschwindigkeit bedeutet.

Die Einheit der Leistung (in 1 Sek.) ist demnach das

Sekunden-Meter-Kilogramm (Sec. mkg).

Um unförmige Zahlen zu umgehen, hat man

die Wirkungsgrösse von 75 mkg in 1 Sek. 160

als grössere Arbeitseinheit eingeführt und nennt dieselbe:

1 Pferdekraft, 1 Pferdestärke oder 1 Pferd,

(vielleicht passender noch 1 Pferdeleistung) und wählt hierfür als Abkürzung 1 Pfk., 1 PS., 1 Pf., 1 HP (Horse Power).

Dieser von Watt (1736—1819), dem Reformator der Dampfmaschinen, eingeführte Werth stellt im Mittel die Leistung der kräftigsten Cornwaller Pferde bei 8- bis 10stündiger Schicht dar, d. h. die 8 bis 10 Stunden innerhalb 24 Stunden zu arbeiten hatten. (Nähere Angaben bringen die Maschinenwissenschaften unter „Thierische Motoren“.)

Unter Pferdekraft ist demnach stets die Arbeit von 75 mkg in 1 Sekunde zu verstehen (Metrische Pferdekraft).

Eine Maschine würde demnach $N = 10$ Pferdekräfte äussern, wenn sie im Stande wäre, in je einer Sekunde $75 \cdot 10 = 750$ kg Arbeit zu verrichten, d. h., wenn sie in jeder Sekunde 75 kg auf 10 m Höhe, oder 10 kg auf 75 m, oder 150 kg auf 5 m Höhe u. s. w. heben könnte.

Müssten dagegen in je 1 Minute aus einem $H = 600$ m tiefen Schachte $Q = 1500$ kg Erz gehoben werden, so würde die erforderliche Leistung betragen:

$$N = \frac{QH}{60 \cdot 75} = \frac{1500 \cdot 600}{60 \cdot 75} = 200 \text{ Pferde} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 161$$

Der Name „Pferdekraft“ ist nach dem Sprachgebrauche der Bewegungslehre durchaus nicht treffend gewählt, denn er soll eine Arbeit, also die Leistung einer Kraft bezeichnen. Jedoch der Verein deutscher Ingenieure und der Verband der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine haben in ihren „Grundsätzen für die Untersuchungen an Dampfkesseln und Dampfmaschinen in Bezug auf ihre Leistungen“ (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1884, S. 200 u. ff.) beschlossen, an dem Ausdrucke Pferdekraft festzuhalten. (Siehe auch die Anmerkungen der Zeitschrift 1890, S. 346 und 347.)

Zusammenstellung einiger zusammengehöriger Werthe.

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ Pferdekraft} &= 75 \text{ mkg (gesetzlich im deutschen Reich)},\\ &= 480 \text{ Fusspfund (nicht mehr gebräuchliche preuss. Pferdekraft)}\\ &= 430 \quad \text{„} \quad \text{(Oesterreich)},\\ &= 550 \quad \text{„} \quad \text{(England)}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 162$$

Genau genommen ist:

$$\left.\begin{aligned} 75 \text{ mkg} &= 477{,}9 \text{ Fusspf. (Preuss.)} = 423{,}7 \text{ Fusspf. (Oesterr.)} = 542{,}5 \text{ Fusspf. (Engl.)}\\ &= 593{,}9 \quad \text{„} \quad \text{(Schwed.)} = 600{,}8 \quad \text{„} \quad \text{(Russland)}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 163$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ mkg} &= 5{,}6488 \text{ Oesterreich. Fusspfunde},\\ &= 6{,}3724 \text{ Preussische} \quad \text{„}\\ &= 7{,}2330 \text{ Englische} \quad \text{„}\\ &= 7{,}9187 \text{ Russische} \quad \text{„}\\ &= 8{,}0113 \text{ Schwedische} \quad \text{„} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 164$$

§ 89.

Ist E in Meterkilogrammen gegeben, so ist die Anzahl der Pferdekräfte:

$$N = \frac{E}{75} = 0{,}01333\ E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 165$$

oder:

$$N = \frac{P \cdot v}{75} = 0{,}01333\ P \cdot v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166$$

woraus sich auch ergiebt:

$$\boxed{P = \frac{75 \cdot N}{v}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 167$$

Diese Gleichung hat der Techniker sehr oft anzuwenden, um P aus N und v zu berechnen. (Siehe Maschinenbau und Maschinenlehre.)

Von sehr grosser Wichtigkeit ist noch folgende Formel zur Bestimmung der Kraft P am Umfange eines Rades, einer Scheibe u. dergl.

Ist P die Kraft am Umfange des Rades, in Kilogrammen,

v die Geschwindigkeit am Umfange, in Metern,

n die Anzahl der Umdrehungen in 1 Minute,

R der Halbmesser in Centimetern, so ist nach (§ 14):

$$v = \frac{2R\pi n}{60} \text{ Centimeter in 1 Sekunde},$$

$$v = \frac{2R\pi n}{100 \cdot 60} \text{ Meter},$$

also:

$$Pv = P\,\frac{2R\pi n}{100 \cdot 60} = 75 \cdot N$$

folglich:

$$P = \frac{75 \cdot 100 \cdot 60}{2\pi} \frac{1}{R} \frac{N}{n} = 71\,620 \frac{1}{R} \frac{N}{n} \quad \ldots \quad 168$$

Diese Gleichung würde sich folgendermassen deuten lassen:

Wären durch ein Zahnrad (Riemenscheibe u. s. w.) N Pferdekräfte bei n Umdrehungen in einer Minute zu übertragen, so würde der Zähnedruck (die Riemenspannung) P um so kleiner ausfallen, je grösser der Halbmesser R des Rades gewählt wird.

Abgesehen vom Kostenpunkte und ohne Rücksicht auf den etwa verfügbaren Raum sind deshalb grosse Räder stets vortheilhaft.

§ 90.

Bedeutung des Satzes von der Arbeit für das alltägliche Leben, die Technik und die Wissenschaft.

Wir kommen nun auf unseren Satz von der Arbeit zurück, um anzudeuten, wie unzählig oft im gewöhnlichen Leben sowohl, als in der Technik aus ihm Nutzen gezogen wird.

Wenn wir durch die Kraft P unserer Muskeln einem anfangs ruhenden ($c = 0$) Körper von der Masse m längs des Weges s die Endgeschwindigkeit v ertheilen, so fliegt er, freigegeben, mit der lebendigen Kraft oder einem aufgespeicherten Arbeitsvorrathe:

$$\frac{mv^2}{2} = P \cdot s,$$

fort und hat die Fähigkeit erlangt, seinerseits eine Arbeit zu verrichten, nämlich längs eines Weges w einen Widerstand W zu überwinden, der bestimmt ist durch die Gleichung:

$$W \cdot w = \frac{mv^2}{2} = P \cdot s \quad \ldots \quad 169$$

oder:

$$W = \frac{mv^2}{2 \cdot w} = \frac{P \cdot s}{w} \quad \ldots \quad 170$$

und um so grösser sein muss, je kleiner w ist.

Das gilt überhaupt beim Werfen, sei es eines Steines aus der Hand oder aus der Schleuder, einer Lanze, sei es eines Geschosses aus dem Geschützrohre; gilt beim Schwingen und Aufschlagen einer Axt, eines Hammers, eines bergmännischen Fäustels, eines sogen. Totschlägers, einer Keule, gilt auch, wenn entgegengesetzt dem Fallbestreben Massen hoch geworfen werden, sei es, dass mittelst eines Feuerlöscheimers oder einer Feuerspritze eine Wassermasse emporgeworfen werde; sei es, dass vom Vulkan ein glühender Lavastrom aus dem Erdinnern, oder brennende Wasserstoffsäulen aus dem Innern des Sonnenkörpers mehr denn 17 000 geographische Meilen emporgespieen werden, um sich dem Beobachter als sogen. Protuberanzen zu zeigen (von deren Bewegung in der höheren Mechanik näheres angegeben wird).

Eine hierhergehörige, vorzügliche Verwertung unseres Satzes von der Arbeit

finden wir bei einer sehr nützlichen und empfehlenswerthen Neuerung, dem Schwartzschen Patent-Hand-Feuerlöscher (D. R.-P. 49489). Das Gefäss von nebenstehender Form enthält etwa 10 Liter Wasser und wird in der Weise wie ein gewöhnlicher Feuerlösch-Eimer, die Oeffnung nach vorn, in rasche Bewegung gebracht und dann plötzlich angehalten. Die Austrittsöffnung jedoch besteht aus einem so engen Schlitze, dass bei jedem Hinschwingen nur etwa 1 Liter Wasser austreten kann. Die der gesammten Wassermenge (10 Liter) mitgetheilte lebendige Kraft wird nun auf einmal auf das 1 Liter übertragen, das dadurch in einem kräftigen Strahle etwa 5 m in die Höhe oder 10 m wagerecht fortgeworfen wird.

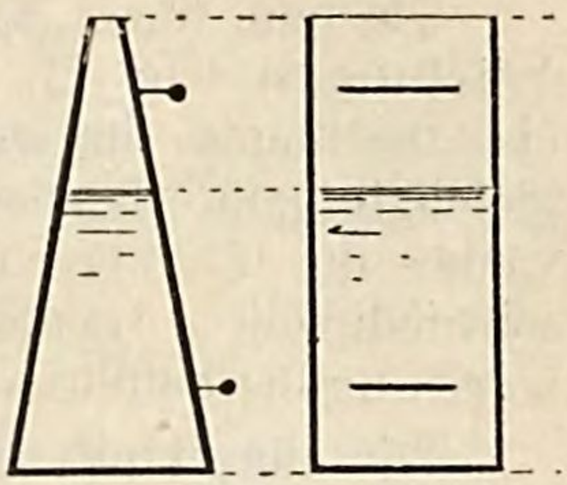


Fig. 96.

In unserem eigenen Körper häufen wir mit Fleiss während eines Anlaufes durch unsere Muskelanstrengung einen Arbeitsvorrath an, der die träge Masse unseres Körpers befähigt, einen breiten Graben, ein Pferd zu überspringen oder ein anderes Hinderniss zu überwinden, allerdings auch befähigt, bei einem plötzlichen Zusammenstosse auf kurzem Wege w einen grossen Druck W auf die Stossstelle zu übertragen. Deshalb ist aber auch derselbe Stoss ein ungleich heftigerer, wenn zwei harte Köpfe aneinander gerathen, als wenn nachgiebige, elastische (gepolsterte) Stellen auf längerem Wege w den Stoss verwirken.

Was wir hier an dem eigenen Körper empfinden, gilt in entsprechender Weise bei allen künstlichen Vorrichtungen, also auch bei unseren Maschinen. Ist der schädliche Stoss W nicht zu vermeiden, so sollte er durch ein nachgiebiges elastisches Zwischenmittel auf einem längeren Wege w verwirkt und so für die Stossstelle gemildert werden.

(Puffer der Eisenbahnwagen, Federbüchsen der Förderkörbe, Gummipuffer bei den Gesteinswalzwerken, Blattfedern unter den Kutschwagen; auch die Prellvorrichtungen und Polster in ihren verschiedenartigen Anordnungen und Anwendungen sind hierher zu rechnen. Als nachgiebiges Zwischenmittel lag über und unter dem Deckel des vertikalen „Treibcylinders“ der ersten Wassersäulenmaschine zu Lautenthal im Harz je ein durch eine grosse Anzahl von Bohrungen b gleichsam porös gemachter Bleiring r, der den Stoss des etwa zu hoch oder zu tief gehenden Treibkolbens T abfangen sollte.)

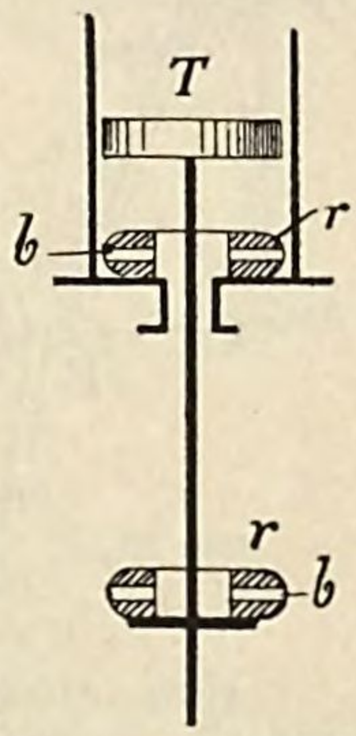


Fig. 97.

Nach unserem Satze von der Arbeit lassen sich auch die gewaltigen zerstörenden Kräfte und Wirkungen erklären und berechnen, die wir beim Zusammenstosse von Eisenbahnzügen oder beim Anprall herabstürzender grösserer Wassermassen beobachten. (Siehe die später folgenden Zahlenbeispiele.)

Er muss auch gelten von dem Tone, dem Lichte, die von der Arbeitsquelle, den Flügeln des winzigen Insektes, dem Geigenbogen, dem Sonnenkörper, bis auf unsere Empfindungswerkzeuge übertragen werden und uns Kunde bringen von der Arbeit, die an der Quelle verrichtet wurde. Kurz: Unser Satz gilt überall da, wo Bewegungsänderungen zu erzeugen und zu verwandeln, zu beschränken und zu regeln, zu verhüten und aufzufangen sind (§ 1); überhaupt für alle mechanischen Vorgänge, also Ortsveränderungen, die ausnahmslos erfordern, dass längs eines Weges w ein Widerstand W überwunden werde.

Diese wenigen Andeutungen aus den verschiedenen Gebieten der Naturwissenschaften zeigen die ausgedehnte Herrschaft des Satzes von der Arbeit, dessen einfachste mathematische Form war:

$$P \cdot s = \frac{m v^2}{2} = W \cdot w \quad \text{(Gleichung 169).}$$

Besprechung einiger wichtiger besonderer Fälle des Satzes von der Arbeit.

§ 91.

1. Die Kraftrichtung fällt nicht mit der Bewegungsrichtung der Masse zusammen. Es wurde oben ausdrücklich hervorgehoben,

dass bei der Bestimmung der mechanischen Arbeit einer Kraft, der Weg s stets in der Richtung der Kraft P zu nehmen sei.

Da nun der „Erfahrungssatz von der Unabhängigkeit der Wirkungen“ (§ 7) ganz allgemein gilt, d. h. eine bestimmte Kraft eine bestimmte ihr zukommende Wirkung an einer Masse hervorbringt, gleichgiltig, in welchem Bewegungszustande sie die Masse antraf, so kann weder die Grösse noch die Richtung der bereits vorhandenen Geschwindigkeit c irgend welche Aenderung an dem Ergebniss der Kraftwirkung herbeiführen.

Dieselbe Kraft P wird längs desselben Weges s (in der Richtung der Kraft genommen) stets genau dieselbe Zunahme an lebendiger Kraft hervorrufen.

Demnach ist es durchaus nicht erforderlich, dass die in Wirklichkeit beschriebene Bahnlinie mit der Richtung der Kraft zusammenfällt.

Wird also die Masse m in der Fig. 98 mit derselben Geschwindigkeit c, jedoch in verschiedenen Richtungen abgesandt, so wird sie zwar verschiedene Wurflinien beschreiben, aber dennoch (wenn die erdwärts gerichtete Kraft P, hier die Schwerkraft, nach Grösse und Richtung, unveränderlich ist) in derselben Wagerechten NN mit genau derselben Endgeschwindigkeit v eintreffen müssen, die durch die Gleichung:

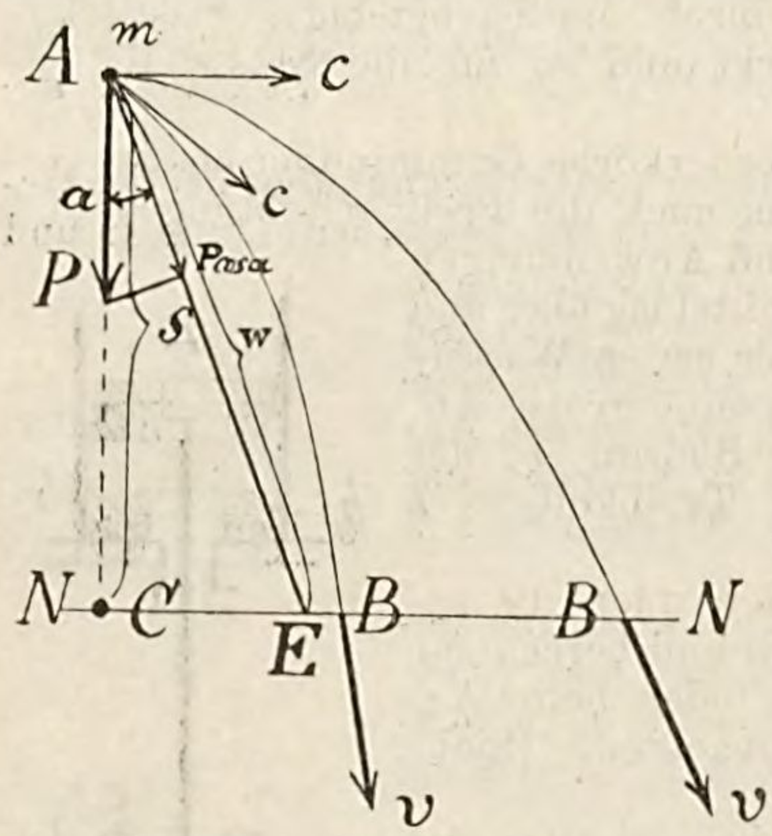


Fig. 98.

$$P \cdot s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

bestimmt ist.

In allen Fällen ist s der Weg in der Richtung der Kraft und aufzufassen als Projektion der wirklich beschriebenen Bahnlinie auf die Kraftrichtung.

Man erhält diese Projektion, indem man vom Endpunkte B des wirklich ausgeführten Weges eine Senkrechte BC auf die Kraftrichtung fällt. Sie ist alsdann vom Anfangspunkte A bis zu dem Fusspunkte C zu rechnen. Also nach der Figur:

$$s = AC.$$

Die Kraftrichtung darf sich hierbei nicht ändern.

Wäre die Anfangsgeschwindigkeit nicht c, sondern c_1, so würde unter sonst gleichen Verhältnissen jetzt die Endgeschwindigkeit v_1 in der NN zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$P \cdot s = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}.$$

Wäre die Bewegung durch die geneigte Bahn $w = AE$, die mit der Kraftrichtung den Winkel a einschliesst (Fig. 98), erzwungen, so würde auch dadurch nichts geändert. Die während des Weges AE von P verrichtete mechanische Arbeit würde sein:

$$A = P \cdot s = P \cdot (w \cdot \cos a) = \frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2}$$

oder:

$$A = P \cdot s = (P \cdot \cos a) \cdot w.$$

Nach der letzten Schreibweise würde $(P \cdot \cos a)$ als die auf den wirklich eingeschlagenen Weg w projizirte Kraft, oder als der in die Richtung der Bewegung fallende Kraftantheil aufzufassen sein.

§ 92.

2. Negative Arbeit oder Arbeit des Widerstandes.

Ist die Kraft wie vorhin abwärts, dagegen die Bewegung aufwärts (wie z. B. beim aufwärts gerichteten Wurfe), kurz, sind Kraft und Bewegung widersinnig gerichtet, so ist offenbar der Weg s als eine negative Grösse einzuführen, folglich die Arbeit der Kraft für diese Bewegung eine negative Grösse.

Für den nebenstehend (Fig. 99) dargestellten Bewegungsvorgang gilt demnach die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} -Ps &= \frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} \\ \text{oder:} \\ Ps &= \frac{m c^2}{2} - \frac{m v^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 171$$

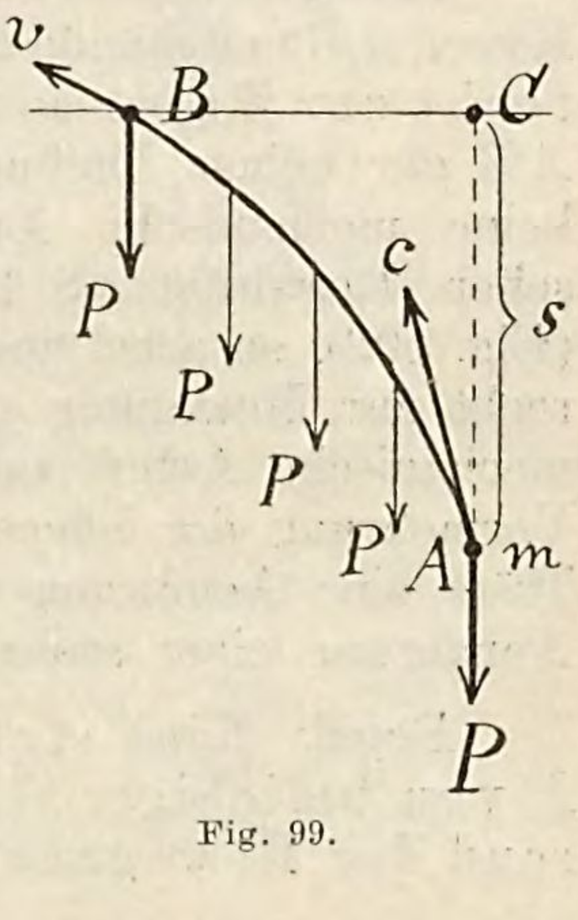


Fig. 99.

In der letzten Gleichung ist P als Widerstand aufzufassen, zu dessen Ueberwindung längs des Weges die lebendige Kraft:

$$\frac{m c^2}{2} - \frac{m v^2}{2}$$

verbraucht, verwirkt werden muss. Man würde kurz setzen können:

Widerstands-Arbeit = verbrauchte lebendige Kraft.

In dieser Form und Bedeutung tritt uns das Arbeitsgesetz überall da entgegen, wo wir aufgespeicherte lebendige Kräfte ausnutzen.

§ 93.

3. Die mechanische Arbeit der Schwerkraft.

Negative mechanische Arbeit verrichtet die Schwerkraft stets bei Aufwärts-Bewegungen; dagegen die mechanische Arbeit Null bei allen Horizontal-Bewegungen.

§ 94.

4. Jede senkrecht zur Bahn gerichtete Kraft verrichtet keine mechanische Arbeit.

Erfolgt die Bewegung der Masse m auf einer wagerechten Ebene (im Meerespiegel), so ist, wie schon vorhin gesagt wurde, der Weg s

im Sinne der lothrecht gerichteten Schwerkraft = Null, also auch die verrichtete mechanische Arbeit = Null (Fig. 100).

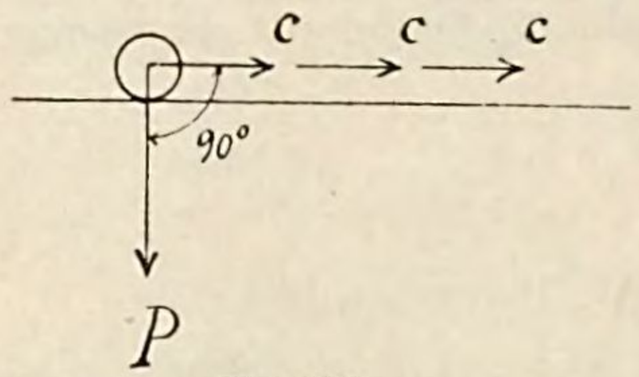


Fig. 100.

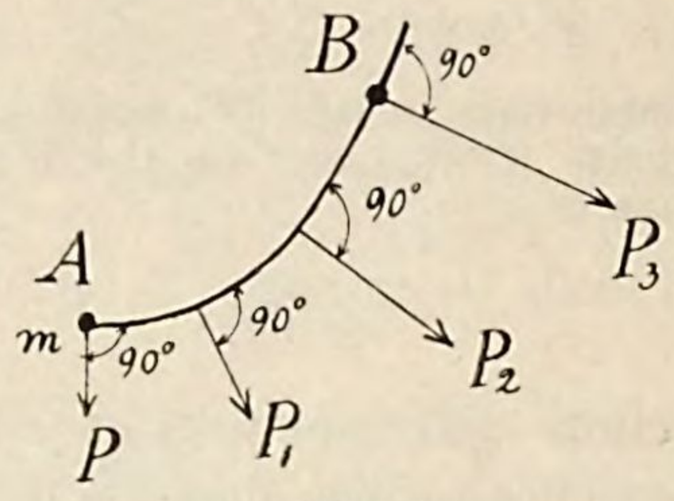


Fig. 101.

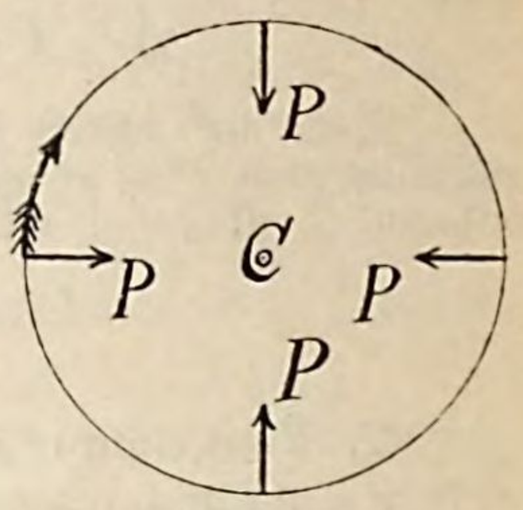


Fig. 102.

Erfolgte die Bewegung (Fig. 101) der Masse m auf einer beliebigen Kurve AB und stände die beliebige, auch veränderliche Kraft P stets senkrecht zur Bahn, so würde sie auf die Verschiebung der Masse m längs AB gar keinen Einfluss ausüben, also auch hier während der Bewegung keine mechanische Arbeit verrichten. (Siehe weiter unten den astatischen Regulator) (§ 123). Geht die Bewegung in einer Kreislinie vor (Fig. 102), so wird von einer stets nach dem Mittelpunkte C, also senkrecht zur Bewegung gerichteten Kraft (Centripetalkraft § 112) P keine mechanische Arbeit verrichtet. Solche Kraft kann deshalb auch hier zur Vermehrung der lebendigen Kraft der bewegten Masse nichts beitragen. Träte eine Aenderung der Anfangsgeschwindigkeit c ein, so müsste diese Aenderung einer anderen Kraft zugeschrieben werden.

Regel: Eine stets senkrecht zur Bahnlinie gerichtete Kraft P von beliebiger Grösse und Veränderlichkeit verrichtet während der Bewegung keine mechanische Arbeit.

§ 95.

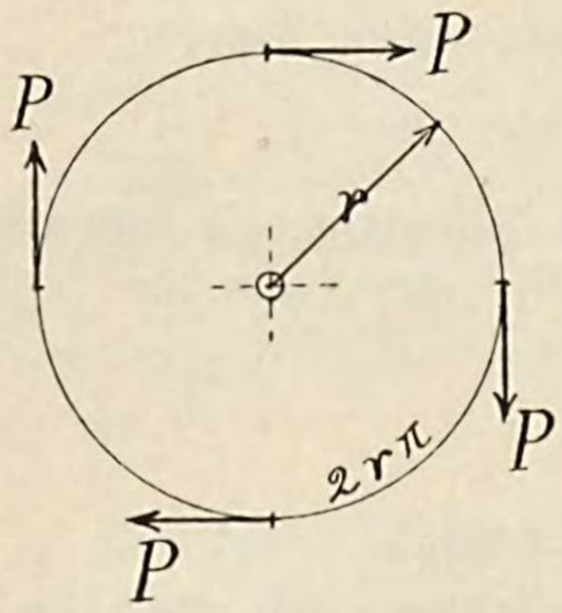


Fig. 103.

5. Die Kraft fällt stets in die Richtung der Kreisbahn (bezw. krummen Bahn).

Wäre die Kraft konstant und stets tangential zum Umfange des Kreises vom Halbmesser r gerichtet (Fig. 103), so würde bei einem vollen Umlaufe die mechanische Arbeit sein:

$$Ps = P \cdot 2r\pi \text{ (§ 106) . . } 172$$

§ 96.

6. Die Kraft ist stets sich selbst parallel und konstant.

Ist die Kreisbahn lothrecht gerichtet (Fig. 104), so ist die mechanische Arbeit der erdwärts gerichteten Schwerkraft P:

während der Bewegung AB . . . $+ Pr$,
„ „ „ BD . . . $+ Pr$,
„ „ „ DE . . . $- Pr$,
„ „ „ EA . . . $- Pr$.

Während eines vollen Kreislaufes ist demnach die mechanische Arbeit der sich stets parallel bleibenden Kraft = Null.

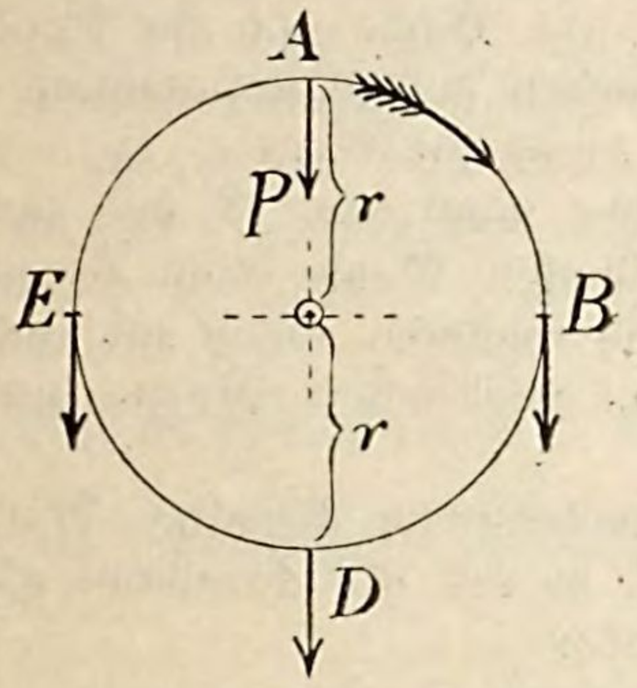


Fig. 104.

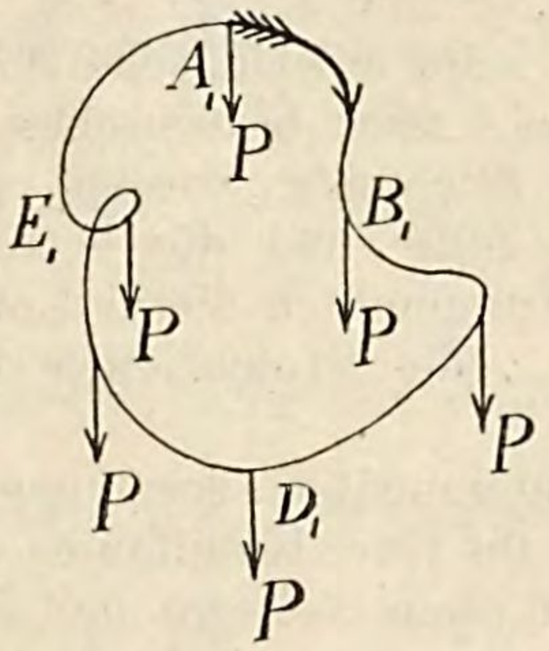


Fig. 105.

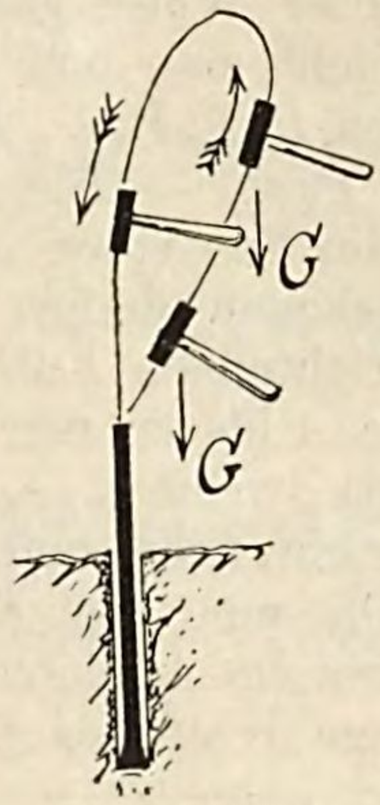


Fig. 106.

Ist die Bahn eine beliebige, aber auch in sich zurücklaufende $A_1 B_1 D_1 E_1 A_1$ (Fig. 105), so verrichtet eine ihrer ersten Lage sich parallel bleibende unveränderliche Kraft P während einer zum Ausgangspunkte zurückkehrenden Bewegung (einem sogen. Kreislaufe) die mechanische Arbeit Null.

Gesetz: Während eines Kreislaufes verrichten parallele unveränderliche Kräfte keine mechanische Arbeit.

So verrichtet bei der bergmännischen Bohrarbeit (Fig. 106) die Schwerkraft G während eines vollen Kreislaufes des Fäustels G keine mechanische Arbeit. (Häuerleistung bei der bergmännischen Bohrarbeit. Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1892, S. 251 u. ff.)

Das hierüber ausgesprochene Gesetz gilt ganz allgemein, sogar für die Bewegung auf einer beliebig gekrümmten Fläche, also auch auf der Kugeloberfläche. Wie auch die Bewegung auf der Kugeloberfläche hin und her vor sich gehen möge; endet die Bewegung im Ausgangspunkte, so ist die von einer parallelen unveränderlichen Kraft verrichtete mechanische Arbeit doch gleich Null, weil im Sinne der Kraft s. z. s. ebensoviel negativer als positiver Weg zurückgelegt ist. In diesem Sinne ist auch die Behauptung unanfechtbar, dass die Projektion der Gesammtoberfläche eines jeden Körpers, also auch einer Kugel auf eine beliebige Ebene gleich Null ist. Dasselbe gilt selbstredend nicht von einem Theile der Oberfläche, z. B. von der gekrümmten Oberfläche einer Halbkugel.

Dieser Satz ist nützlich bei der Bestimmung des Druckes einer Flüssigkeit auf eine gekrümmte Fläche, von der in der Mechanik der flüssigen Körper gehandelt wird.

§ 97.

Satz von den mechanischen Arbeiten beliebig vieler Kräfte.

(Gesetz von den mechanischen Arbeiten.)

Die Masse m werde auf irgend welche Weise auf einer beliebigen Bahn von A nach B fortbewegt (Fig. 107). P sei eine Kraft, die sich an der Bewegung betheiligt. (Dass diese Kraft nicht die Bewegung überhaupt bewirken kann, geht schon

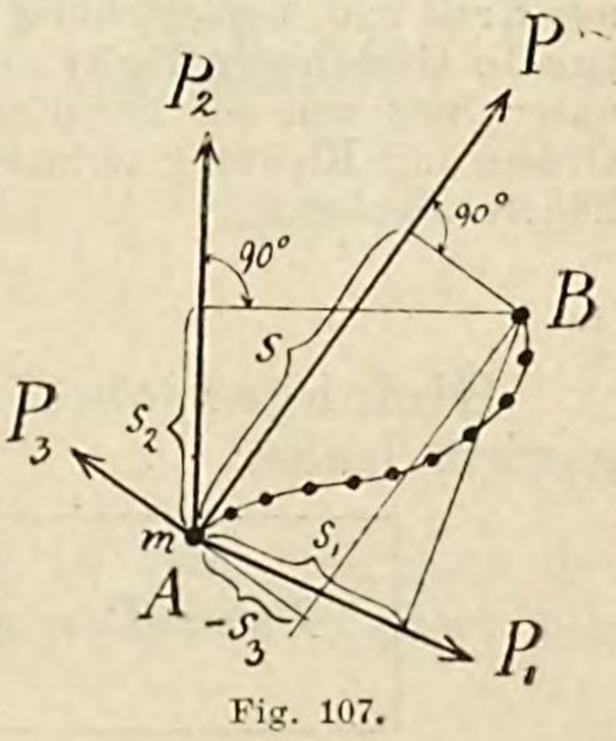


Fig. 107.

aus der Figur hervor, denn P hat eine ganz andere Richtung als die krummlinige Bahn AB.) Dann kann deren mechanische Arbeit $P \cdot s$ in bekannter Weise gefunden werden.

Sieht man nun unsere Kraft als die Mittelkraft (Resultante) aus den Kräften $P_1 P_2 P_3 \ldots$ an, so sind $s_1, s_2, -s_3 \ldots$ als Wege und die Produkte $P_1 s_1$, $P_2 s_2$, $-P_3 s_3 \ldots$ als mechanische Arbeiten der Komponenten während der Bewegung von A nach B anzusehen, wenn die Wege $s_1, s_2, -s_3 \ldots$ wie bekannt, dadurch gewonnen wurden, dass man von B aus auf die Kraftrichtungen Lothe fällte und die betreffenden Wege vom Ausgangspunkte A bis zu den Fusspunkten dieser Lothe rechnet. Oder mit anderen Worten, wenn $s_1, s_2 \ldots$ die Projektionen des wirklichen Weges auf die Kraftrichtungen sind.

Da nun die Komponenten zusammengenommen dieselbe Wirkung hervorbringen müssen als ihre Resultante, d. h. als die durchaus gleichwerthige Kraft, so gilt ohne weiteres der Satz:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 \pm \ldots = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \quad \ldots \; 173$$

vermittelst dessen z. B. v ermittelt werden kann, wenn die übrigen Grössen bekannt sind.

In Worten heisst der Satz: Die algebraische Summe der mechanischen Arbeiten der Komponenten ist gleich der mechanischen Arbeit der Resultanten oder gleich der durch diese erzeugten lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$. (Unter c ist die Anfangsgeschwindigkeit in A zu verstehen; aber v ist nicht unter allen Umständen die in B wirklich vorhandene Endgeschwindigkeit, sondern diejenige gedachte Endgeschwindigkeit, die durch P allein oder durch deren Komponenten P_1 P_2 P_3 . . . hervorgebracht würde.) (Siehe auch die Beweisführung bei Ritter, Techn. Mech. 1892, S. 60.)

§ 98.

Satz von den virtuellen Geschwindigkeiten.

Sind die Wege $ss_1 s_2 \ldots$ sehr klein, vielleicht nur (mögliche) gedachte Verschiebungen, in der Richtung der betreffenden Kräfte, so nennt man jetzt die Produkte aus Kraft und Verschiebung virtuelle Arbeiten und die Verschiebungen selbst virtuelle Geschwindigkeiten. Auch für diese augenblicklichen Verschiebungen gilt unser Satz von der Erhaltung der Kraft selbst dann, wenn die Kräfte beständig ihre Grösse und Richtung verändern. (Näheres über diesen sehr fruchtbaren Satz bringt die höhere Mechanik.)

§ 99.

Gleichgewichtsbedingungen. Die Bedingungen für das Gleichgewicht lauten:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 \pm \ldots = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = 0 \quad \ldots \; 174$$

oder in Worten:

Soll Gleichgewicht stattfinden, so muss gleich Null sein:

die mechanische Arbeit der Resultanten,

oder:

die algebr. Summe der mechan. Arbeiten der Komponenten,

oder:

die durch die Kräfte bewirkte Zunahme an lebendiger Kraft.

Bildliche (graphische) Darstellung der mechanischen Arbeit.

Die mechanische Arbeit lässt sich stets als eine ebene Fläche darstellen.

§ 100.

1. Arbeit einer konstanten Kraft.

Ist die Kraft P konstant und s der Weg im Sinne der Kraft, so ist die mechanische Arbeit:

$$A = P \cdot s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 175$$

durch ein Rechteck dargestellt (Fig. 108).

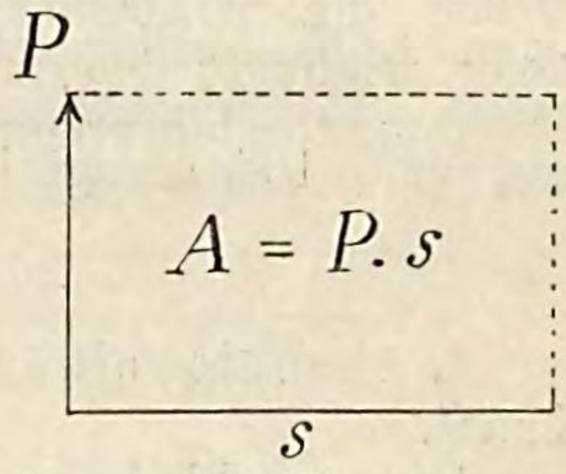


Fig. 108.

§ 101.

2. Arbeit einer gleichförmig veränderlichen Kraft.

Nimmt die Kraft gleichförmig ab oder zu, so ist die mechanische Arbeit:

$$A = \left(\frac{P+Q}{2}\right) \cdot s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 176$$

durch ein Trapez (Fig. 109) dargestellt, das s als Grundlinie, und den Anfangs- bezw. Endwerth der Kraft P bezw. Q zu parallelen Seiten hat.

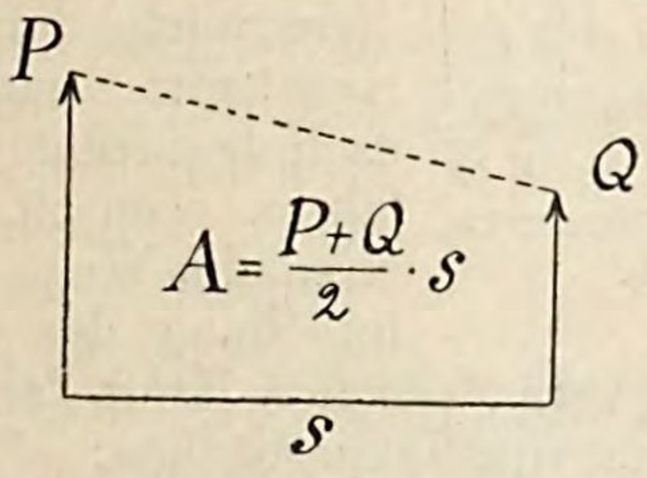


Fig. 109.

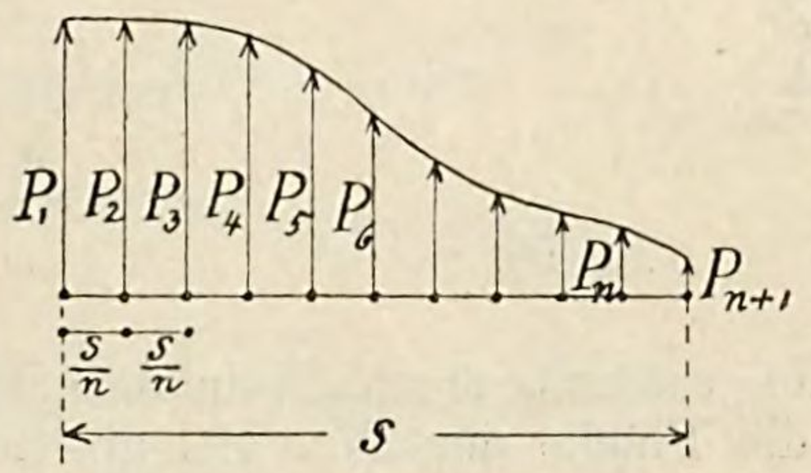


Fig. 110.

§ 102.

3. Arbeit einer veränderlichen Kraft.

Nimmt die Kraft ungleichförmig ab oder zu, so lässt sich nach der sogen. Simpson'schen Regel angenähert die der Arbeit entsprechende Fläche (Fig. 110) berechnen:

$$A = \left\{P_1 + P_{n+1} + 2(P_3 + P_5 + P_7 \ldots) + 4(P_2 + P_4 + \ldots P_n)\right\} \frac{1}{3 \cdot n} \cdot s \quad 177$$

$$A = P_m \cdot s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178$$

Die Anwendung der Regel erfordert, dass n eine gerade ganze Zahl ist; gewöhnlich nimmt man $n = 10$. P_m ist der Mittelwerth der veränderlichen Kraft und bestimmt durch die Gleichung:

$$P_m = \left\{P_1 + P_{n+1} + 2(P_3 + P_5 + P_7 \ldots) + 4(P_2 + P_4 + \ldots P_n)\right\} \frac{1}{3 \cdot n} \quad . \quad 179$$

P_1 und P_{n+1} bedeuten die Längen der Grenzparallelen. Dann ist nicht zu übersehen, dass in der ersten runden Klammer mit dem Faktor 2 die Längen mit ungeraden, in der anderen Klammer mit dem Faktor 4 die Längen mit geraden Zahlen aufzunehmen sind.

Anwendung der letzten Regel wird bei Bestimmung der mechanischen Arbeit der Kolbenmaschinen (z. B. der Dampfmaschinen) mittelst des sogen. Indikatordiagrammes gemacht. (Näheres nachzusehen in des Verfassers „Maschinenwissenschaften“ unter Indikator.) Man sehe auch das, was im § 104 gesagt ist.

§ 103.

4. Arbeit einer nach **Grösse** und **Richtung** veränderlichen Kraft.

Die verschiedenen Werthe der veränderlichen Kraft seien (in Fig. 111) angenähert der Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Pfeile $P_1\, P_2\, P_3 \ldots P_7$. Der Angriffspunkt beschreibe die krumme Linie $A_1\, A_2\, A_3 \ldots A_7$. Diese Punkte seien einander so nahe gewählt, dass man annehmen darf, die Stücke $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3 \ldots$ seien gerade Linien und die Kräfte bleiben konstant und gleichgerichtet, während ihr Angriffspunkt diese Stücke durchläuft. Konstruirt man nun nach dem früheren Verfahren (durch Projiciren) die Wege $s_1\, s_2 \ldots$ im Sinne der Kräfte, so ist die gesammte mechanische Arbeit der veränderlichen Kraft dargestellt durch die Fläche der Fig. 112 als Summe von Trapezflächen:

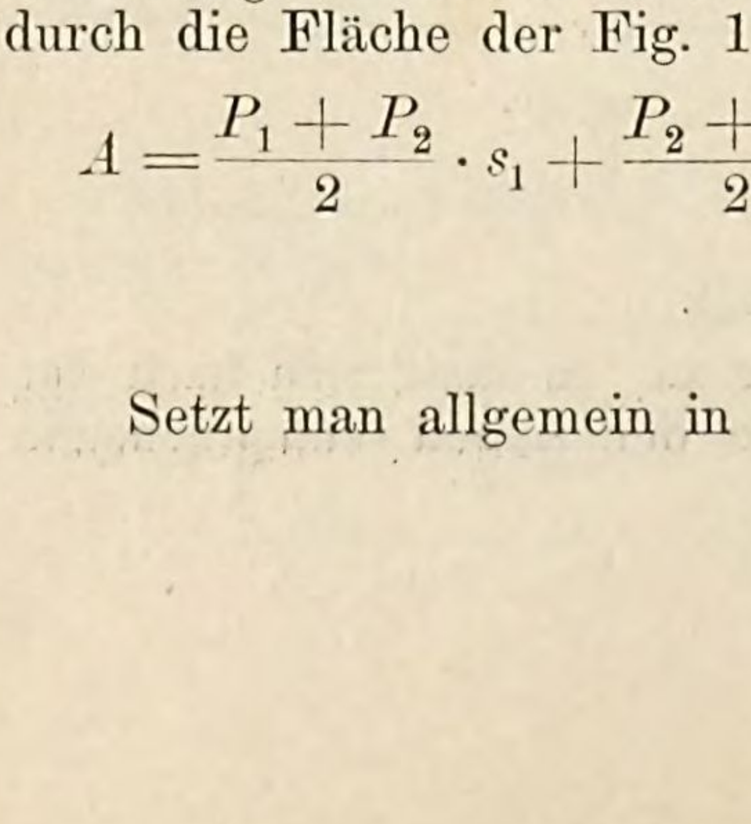


Fig. 111.

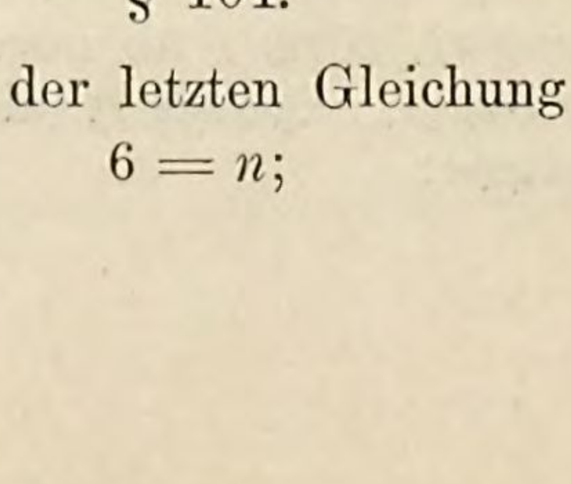


Fig. 112.

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot s_1 + \frac{P_2 + P_3}{2} \cdot s_2 + \frac{P_3 + P_4}{2} \cdot s_3 + \ldots \frac{P_6 + P_7}{2} \cdot s_6.$$

§ 104.

Setzt man allgemein in der letzten Gleichung (Fig. 112):

$$6 = n;$$

ferner:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots \frac{s}{n},$$

so ergiebt sich allgemein als Arbeit, bezw. Summe aller Trapezflächen:

$$\boxed{A = P_m \cdot s = \left\{ \frac{P_1 + P_{n+1}}{2} + P_2 + P_3 + \ldots P_n \right\} \frac{s}{n}} \quad . \quad 180$$

Diese Formel kann an Stelle der verwickelteren Simpson'schen Formel gesetzt werden, denn sie giebt in den meisten Fällen auch schon brauchbare Annäherungswerthe für die Fläche des Indikatordiagrammes.

§ 105.

Zahlen-Beispiele.

Beispiel 50: Bei den Krupp'schen Riesenkanonen (§ 50), deren Seelenlänge $s = 12{,}7$ m beträgt, verlässt das 920 kg schwere Geschoss das Rohr mit $v = 550$ m Geschwindigkeit.

Es soll berechnet werden:

a. die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ der Kugel an der Rohrmündung,

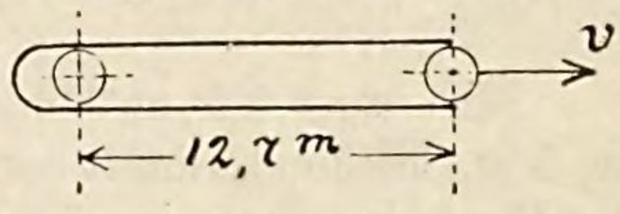


Fig. 113.

b) die mittlere beschleunigende Kraft P der Pulvergase,

c) die zerstörende Druck-Wirkung W des Geschosses.

Nach der allgemeinen Formel:

$$P \cdot s = \frac{mv^2}{2} = W w$$

oder:

$$P \cdot 12{,}7 = \frac{920 \cdot 550^2}{2 \cdot 9{,}81} = \sim 14\,200\,000 \text{ mkg.}$$

Danach:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{etwa } 14\,200\,000 \text{ mkg},$$

$$P = \frac{14\,200\,000}{12{,}7} = 1\,118\,000 \text{ kg.}$$

Würde die gesammte lebendige Kraft auf einem Wege $w = 0{,}5$ m verwirkt, so würde der mittlere am Ziele zum Durchschlagen der festen Wand (Panzerplatte) ausgeübte Druck W betragen:

$$W = \frac{14\,200\,000}{w} = 28\,400\,000 \text{ kg.}$$

Der Anfangsdruck ist erheblich grösser als dieser Mittelwerth.

Beispiel 51: Bei der oben (§ 85) erwähnten Pulverramme sei:

P die unbekannte Kraft der Pulvergase,

$s = \frac{1}{4} m$ die Länge des Weges im Mörser, längs welches die Pulvergase wirken,

v die unbekannte Geschwindigkeit, mit welcher der Bär die Mündung verlässt,

$W = G = 200$ kg das Gewicht des Bären,

$w =$ 5 m die Höhe, bis auf welche der Bär emporgeschleudert wird, so ist wieder allgemein:

$$Ps = \frac{mv^2}{2} = W \cdot w,$$

$$Ps = \frac{Gv^2}{2 \cdot g} = G \cdot w,$$

$$P \cdot \frac{1}{4} = \frac{200 \cdot v^2}{2 \cdot 9{,}81} = 200 \cdot 5,$$

folglich:

$$P = 4 \cdot 200 \cdot 5 = 4000 \text{ kg},$$

$$v = \sqrt{\frac{200 \cdot 5 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{200}} = \sim 9{,}9 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad 181$$

Mit $v = 9{,}9$ m Geschwindigkeit wird der Bär emporgeschleudert. In 5 m Höhe kommt er zur Ruhe und wird hier gefangen. Nach dem Auslösen beginnt er mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ zu fallen und erreicht die Mündung des Mörsers mit der Ausgangsgeschwindigkeit $v = 9{,}9$ m.

Die dieser Geschwindigkeit entsprechende lebendige Kraft wird nun beim Einschlagen in den Mörser dazu verwendet:

1. die Luft im Mörser zusammenzudrücken und dabei die zur Entzündung der Pulverladung erforderliche Wärme zu erzeugen,

2. den Pfahl einzutreiben, d. h. den Widerstand W_1, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegenstellt, überwinden zu helfen. Ich sage zu helfen, weil die hauptsächlichste Wirkung bei der Pulverramme in dem Rückschlage besteht, den die Pulvergase dem Mörser nach unten hin, also dem Kopfe des Pfahles, mittheilen.

Bei der gewöhnlichen Ramme dagegen wird das Eintreiben des Pfahles nur durch das Aufschlagen des Bären auf den Kopf des Pfahles bewirkt.

Wollte man für eine solche gewöhnliche Ramme die Kraft W_1, die durch den Schlag auf den Kopf des Pfahles bewirkt wird, ermitteln, so hätte man zunächst den Weg w_1 zu beobachten (messen), um welchen der Pfahl beim letzten Schlage eindringt.

Wäre z. B.

$$w_1 = \frac{1}{100} \text{ m},$$

gefunden, so würde sich ergeben:

$$W_1 \cdot w_1 = W \cdot w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 182$$

$$W_1 = \frac{W \cdot w}{w_1} = \frac{200 \cdot 5}{\frac{1}{100}} = 100\,000 \text{ kg}.$$

Mit 100 000 kg also würde die bewegte Masse auf den Pfahl einwirken, während das ruhende Gewicht des Bären nur einen Druck:

$$W = G = 200 \text{ kg},$$

auf den Pfahl ausüben könnte.

Uebrigens wird nur ein Theil $\left(\frac{2}{3}\right)$ jener Wirkung W_1 nützlich, das heisst, zum Eintreiben des Pfahles verwendet. (Siehe unten Lehre vom Stosse.)

Um genügende Sicherheit zu haben, belastet man den Pfahl etwa nur mit $\frac{1}{10}$ des obigen Werthes, also höchstens mit:

$$\frac{1}{10} \cdot 100\,000 = 10\,000 \text{ kg}.$$

Beispiel 52: Ein 100 000 kg schwerer Schnellzug habe die Geschwindigkeit: $v = 15$ m. Es soll der mittlere Druck W berechnet werden, welchen der Schnellzug ausüben würde, wenn er beim plötzlichen Zusammenstosse längs eines Weges $w = 5$ m seine Geschwindigkeit ganz verlöre und auf sonstige Widerstände (Reibung) keine Rücksicht genommen wird.

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= W \cdot w \\ W &= \frac{\frac{mv^2}{2}}{w} = \frac{100\,000 \cdot 15^2}{9{,}81 \cdot 2 \cdot 5} \\ W &= 230\,000 \text{ kg}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 183$$

Stiessen zwei Eisenbahnzüge unter sonst gleichen Verhältnissen aufeinander, so würde die Druckwirkung sogar doppelt so gross sein. So erklärt sich die entsetzliche Verwüstung, die durch derartige Zusammenstösse angerichtet wird, selbst wenn wir annehmen, dass wegen nicht weiter berücksichtigter Einflüsse der Druck an der Stossstelle nur einen Bruchtheil des obigen theoretischen Werthes ausmacht.

Beispiel 53: Der Hirschler Teich oberhalb des Burgstätter Grubenrevieres bei Clausthal enthält über 600 Millionen Liter (kg) Wasser. Angenommen, bei einem plötzlichen Dammbruche würde die Hälfte dieser Wassermenge entfesselt und fiele 100 m hinunter dem Innerste Thale zu, so würde ohne Rücksicht auf Nebenwiderstände diese bewegte Wassermasse ein Arbeitsvermögen:

$$Gh = \frac{600\,000\,000}{2} \cdot 100 = 30\,000\,000\,000 \text{ mkg}$$

in sich aufgespeichert enthalten und, wenn letzteres innerhalb 600 Sek. (= 10 Min.) auf Zerstörung verwirkt würde, hierbei:

$$N = \frac{30\,000\,000\,000}{600 \cdot 75} = 666\,666 \text{ Pferdekräfte} \quad \ldots\ldots \quad 184$$

äussern.

Beispiel 54: Die Leistung eines Arbeiters. Bei 8 stündiger Arbeitszeit (Schicht) innerhalb 24 Stunden kann ein Arbeiter auf den Griff einer Kurbel im Mittel die Kraft:

$$P = 10 \text{ kg}$$

übertragen und denselben mit einer mittleren Geschwindigkeit:

$$v = 0{,}8 \text{ m in } 1 \text{ Sek.}$$

im Kreise herumführen.

Seine Arbeitsleistung beträgt demnach (während 8 stündiger Schicht) in 1 Sekunde:

$$E = 10 \cdot 0{,}8 = 8 \text{ mkg};$$

in Pferdekräften ausgedrückt:

$$N = \frac{E}{75} = \frac{8}{75} = \frac{1}{9{,}4} \text{ Pf.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 185$$

also ungefähr $\frac{1}{10}$ Pferdekraft. Im Akkord rechnet man $\frac{1}{7}$ Pferdekraft.

Die tägliche Leistung (während 8 Stunden in 24 Tagesstunden) würde betragen:

$$A = (8 \cdot 60 \cdot 60) \cdot 8 = 230400 \text{ mkg.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 186$$

Beispiel 55: Die Leistung einer Wasserkraft. Die Niagara-Wasserfälle sollen rund eine Gefällhöhe von . . $H = 50$ m haben und nach Schätzung eine Wassermenge von fast $Q = 100$ Mill. Tonnen in einer Stunde führen.

Danach würde die Leistung dieser natürlichen Wasserkraft etwa betragen:

$$N = \frac{100000000000 \cdot 50}{60 \cdot 60 \cdot 75} = 18 \text{ Millionen} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187$$

Pferdekräfte. (William Siemens giebt 17 Millionen, andere Schriftsteller noch andere Werthe.)

Dagegen beträgt die Leistung sämmtlicher Dampfmaschinen der Erde auch nur etwa 20 Millionen Pferdekräfte. Beiläufig sei hier noch erwähnt, dass das grösste künstliche Gefälle $H = 600$ m mit mehr denn 5000 Pferdekräften der Harz in seinem sogen. Dammgraben und dessen Fortsetzung besitzt. (Näheres hierüber bringen des Verfassers „Bergwerke etc.“ 1883, S. 95 und „Maschinenwissenschaften“ unter den Kraftmaschinen.)

Beispiel 56: Kraftverhältnisse auf der schiefen Ebene. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 114) mit dem Neigungswinkel:

$$a = 60^0$$

soll eine Last:

$$G = 1000 \text{ kg}$$

gleichförmig emporgehoben werden.

a) Welche Kraft P in der Richtung der schiefen Ebene,

b) welche Kraft H in horizontaler Richtung ist hierzu erforderlich, wenn auf Reibung keine Rücksicht genommen wird?

Soll während des Weges $AB = s$ Gleichgewicht zwischen den Kräften herrschen, so muss nach Gleichung 174, § 99:

a) $$\left.\begin{aligned} Ps - Gh &= 0 \\ P = G\frac{h}{s} &= G \cdot \sin a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 188$$

$$= 1000 \cdot 0{,}866 = 866 \text{ kg}$$

sein (Zug im Seile beim Fördern in tonnlägigen Schächten); ferner:

b) $$\left.\begin{aligned} H \cdot AC - Gh &= 0 \\ H = G\frac{h}{AC} &= G \cdot \operatorname{tg} a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 189$$

$$= 1000 \cdot 1{,}732 = 1732 \text{ kg.}$$

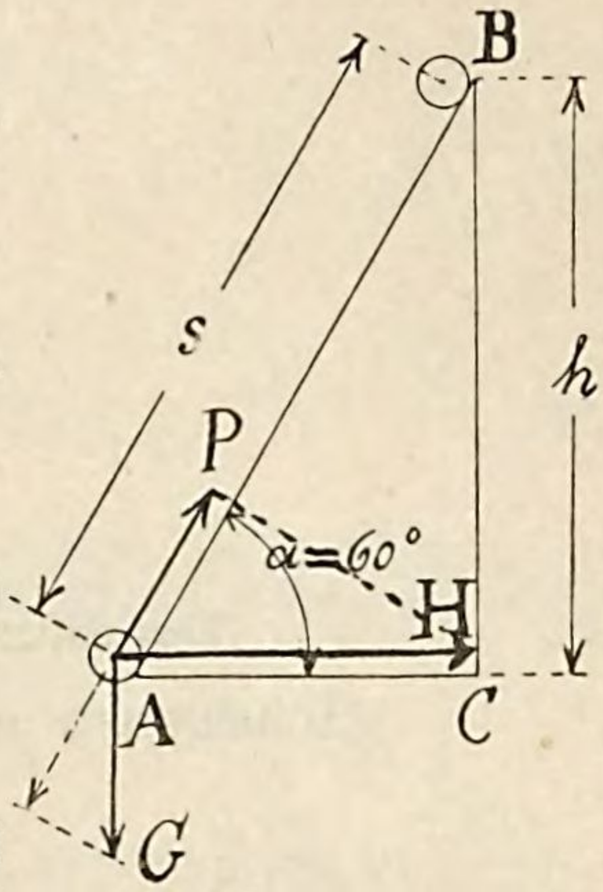


Fig. 114.

(Genauere Angaben mit Rücksicht auf Reibung sind weiter hinten unter der Theorie der Schraube gegeben.)

Man vergleiche unsere Ermittelungen hier mit denen in § 81, Gleichung 148.

Beispiel 57: Kraftverhältnisse am Keile. Der Keil kann als schiefe Ebene aufgefasst werden. Es verhält sich demnach nach dem letzten Beispiele die Kraft H auf dem Rücken des Keiles zur Kraft (oder zu dem zu überwindenden Widerstande) G senkrecht zur Länge l des Keiles (Fig. 115):

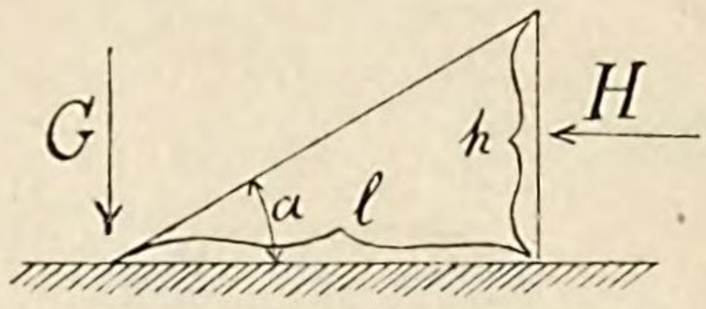


Fig. 115.

$$\frac{H}{G} = \operatorname{tg} a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 190$$

Dasselbe gilt für den gleichschenkligen Keil (Fig. 116), denn:

$$\left.\begin{aligned} 2H \cdot l &= G \cdot 2h \\ \frac{H}{G} &= \frac{h}{l} = \operatorname{tg} a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191$$

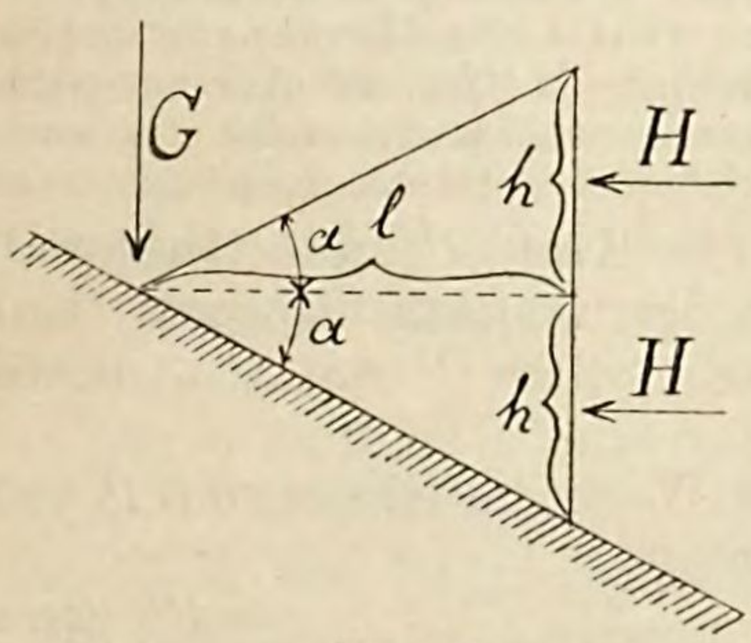


Fig. 116.

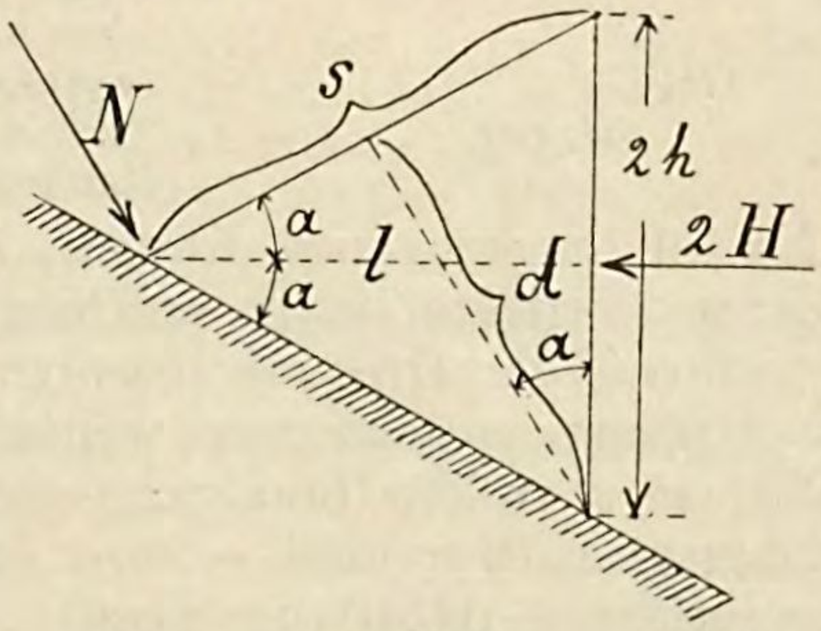


Fig. 117.

Ist der Widerstand N senkrecht zur Keilbahn gerichtet (Fig. 117), so folgt nach dem Satze von den mechanischen Arbeiten:

$$\left.\begin{aligned} 2H \cdot l &= N \cdot d \\ &= N \cdot 2h \cdot \cos a \\ \frac{H}{N} &= \frac{h}{l} \cdot \cos a \\ &= \frac{h}{s} \\ &= \sin a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 192$$

D.

Der Satz von den statischen Momenten.

(Hebelgesetz des Archimedes 287—212 v. Chr. Geb.)

§ 106.

Der im Voranstehenden behandelte Satz von den mechanischen Arbeiten gilt auch für Drehbewegungen, wenn nur jederzeit Kraft und zurückgelegter Weg in demselben Sinne genommen werden, und soll uns durch das folgende Beispiel auf den Satz von den statischen Momenten hinüberleiten.

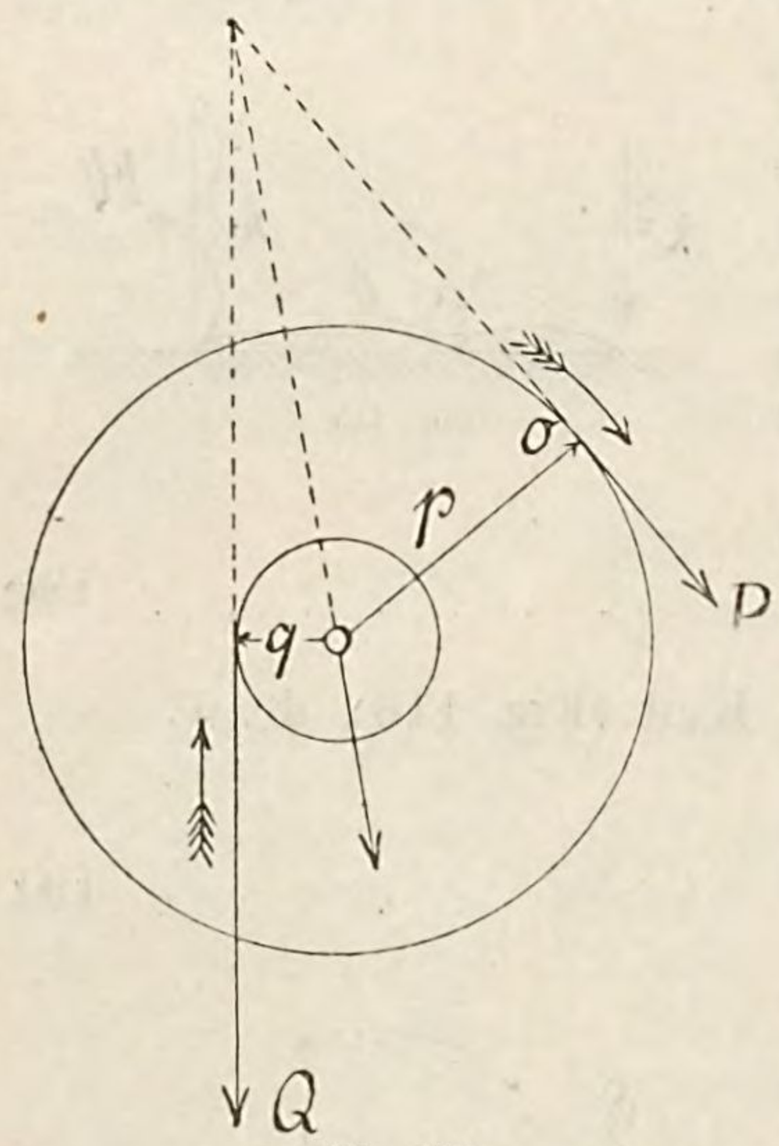


Fig. 118.

Beispiel 58: Welche Last Q kann ein Arbeiter mittelst eines sogen. Kurbel-Haspels gleichförmig heben, wenn:
die Kraft des Arbeiters im Punkte
O (Kurbelgriff) . . . . . $P = 20\,\text{kg}$,
die Länge des Kurbel-Radius . $p = 50\,\text{cm}$,
der Halbmesser des Rundbaumes,
auf dem sich das Seil aufwickelt,
an welchem die Last Q hängt $q = 10\,\text{cm}$.

Dieses Beispiel greift zwar über den Rahmen unseres „Zweiten Abschnittes (Mechanik des materiellen Punktes)“ hinaus, zeigt jedoch aufs beste den innigen Zusammenhang zwischen dem Satze von den mechanischen Arbeiten und dem von den statischen Momenten und bringt zugleich einen für die Technik überaus wichtigen Fall zur Sprache, so dass ich mich schon aus dem letzten Grunde nicht bedachte, es hierher zu setzen.

Es soll angenommen werden, dass die Kraft P stets tangential zu dem Kreise gerichtet ist, in welchem sich der Kraftangriffspunkt (Kurbelgriff) während der Drehung bewegt. Auch sollen P und Q in derselben Ebene wirksam angenommen werden.

Für einen vollen Rundgang sind die Wege im Sinne von P und Q beziehungsweise $2p\pi$ und $-2q\pi$; danach ist:
die mechanische Arbeit der Kraft . . . . . $= P \cdot 2p\pi$,
die mechanische Arbeit der Last . . . . . $= -Q \cdot 2q\pi$,
also für das Gleichgewicht (d. h. für die gleichförmige Bewegung, die in der Praxis meist angestrebt wird):

$$P \cdot 2p\pi - Q \cdot 2q\pi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 193$$

$$\text{I.} \quad P \cdot p - Q \cdot q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 194$$

$$\text{II.} \quad P \cdot p = Q \cdot q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 195$$

$$\text{III.} \quad \frac{Q}{P} = \frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 196$$

Hieraus ergiebt sich die gesuchte Last:

$$Q = \frac{p}{q} \cdot P = \frac{50}{10} \cdot 20 = 100 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 197$$

Diese für den Techniker sehr wichtige Gleichung drückt das Verhältniss aus zwischen den Kräften, die an dem Seilkorbe (der Seiltrommel) einer Fördermaschine und an vielen anderen Vorkehrungen auftreten.

Es heissen:

C der Drehpunkt oder die Drehachse,

p d. i. die Senkrechte, gefällt von C auf die Kraftrichtung, der Hebelarm der Kraft P in Bezug auf die Drehachse C,

$P \cdot p$ d. i. das Vielfache aus Kraft und Hebelarm, das statische Moment der Kraft, ebenso

$Q \cdot q$ das statische Moment der Last.

Man schreibe kurzweg:

$$\mathfrak{M} = P \cdot p = Q \cdot q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 198$$

Statisches Moment = Kraft × Hebelarm,

und denkt dann in der Praxis stets an eine bestimmte Drehachse, um welche die Drehung vor sich geht.

Dass die Theorie diese Forderung nicht stellt, wird später (§ 163) hervorgehoben werden, wo von den Kräftepaaren die Rede ist.

§ 107.

Die Momenten-Einheit.

Wählen wir wieder als Krafteinheit . . . . . 1 kg,
als Einheit des Hebelarmes . . . . . 1 m,
so ist die Momenten-Einheit . . . . . 1 kgm,

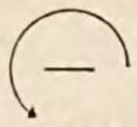
d. i. dasjenige statische Moment, welches erforderlich ist, um 1 kg an dem Hebelarme 1 m zu überwinden. Diese Einheit darf nicht mit der in § 88 verwechselt werden. Uebrigens wurde auf die nahe Verwandtschaft zwischen Arbeit und Moment bereits durch die Ableitung hingewiesen.

Das statische Moment ist als Mass der Drehwirkung einer Kraft anzusehen.

An einem statischen Momente ist ausser der Grösse noch die Drehrichtung zu unterscheiden.

Es soll in der Folge ein Moment

positiv (oder rechtsdrehend) genannt werden, das im Sinne des Uhrzeigers dreht, ; dagegen

negativ (oder linksdrehend), wenn es entgegengesetzten Drehsinn,  , hat.

Im obigen Beispiele würde demnach das Moment $P \cdot p$ positiv, dagegen das Moment $Q \cdot q$ negativ zu nennen sein, worauf wir schon durch Anwendung des Satzes von den mechanischen Arbeiten folgerichtig hingelenkt wurden.

Später unter Kräftepaaren wird auch auf die bildliche Darstellung der Momente hingewiesen.

§ 108.

Die Gleichungen 194, 195, 196 sind von grössester Wichtigkeit für die Mechanik. Sie drücken in der einfachsten Form das zuerst von Archimedes erkannte und nach ihm benannte Hebelgesetz aus und lassen sich, wie folgt, in Worte kleiden:

Zwei Kräfte P und Q, die beziehungsweise an den Hebelarmen p und q um die Achse C zu drehen suchen, halten sich im Gleichgewichte:

I. wenn die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf die Achse Null ist, oder auch:

II. wenn ihre statischen Momente einander gleich sind, aber entgegengesetzten Drehsinn haben, oder:

III. wenn die Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie ihre Hebelarme.

§ 109.

Das obige Zahlenbeispiel zeigt deutlich, dass ein Arbeiter durch seine Kraft ($P = 20$ kg) eine weit grössere Last ($Q = 100 \text{ kg} = 5 \cdot P$) überwinden kann.

Jedoch an mechanischer Arbeit wird hierbei durchaus nichts gewonnen. Denn die 5 mal grössere Last Q legt dafür auch nur einen Weg $2q\pi$ zurück, der 5 mal kleiner ist als der Weg $2p\pi$, da nach dem Zahlenbeispiele:

$$q = 10 \text{ cm},$$

$$p = 50 \text{ cm},$$

also:

$$q = \frac{1}{5} p \quad \text{ist.}$$

Diese wichtige Beziehung, die für alle, selbst die verwickeltesten Vorrichtungen und Maschinen gilt, an denen durch Kräfte Bewegungen hervorgebracht werden, lässt sich ausdrücken:

Jeder Kraft-Gewinn wird durch einen gleich grossen Weg- oder Geschwindigkeits-Verlust aufgewogen.

Ausserdem ist selbst in den günstigsten Fällen die erzielte nützliche mechanische Arbeit immer noch kleiner als die aufgewendete mechanische Arbeit, weil durch letztere noch alle bei der Bewegung auftretenden Reibungswiderstände (siehe Reibung) und Stösse (siehe Stoss) überwunden werden müssen. (Unmöglichkeit eines „Perpetuum mobile“. Siehe S. 1.)

§ 110.

Fasst man P als Mittelkraft aus . . . . . $P_1\ P_2 \ldots$
mit den Hebelarmen . . . $p_1\ p_2 \ldots$,
ferner Q als Mittelkraft aus $Q_1\ Q_2 \ldots$
mit den Hebelarmen . . . $q_1\ q_2 \ldots$
auf. so ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} P\,p &= P_1\,p_1 + P_2\,p_2 \ldots \\ Q\,q &= Q_1\,q_1 + Q_2\,q_2 \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 199$$

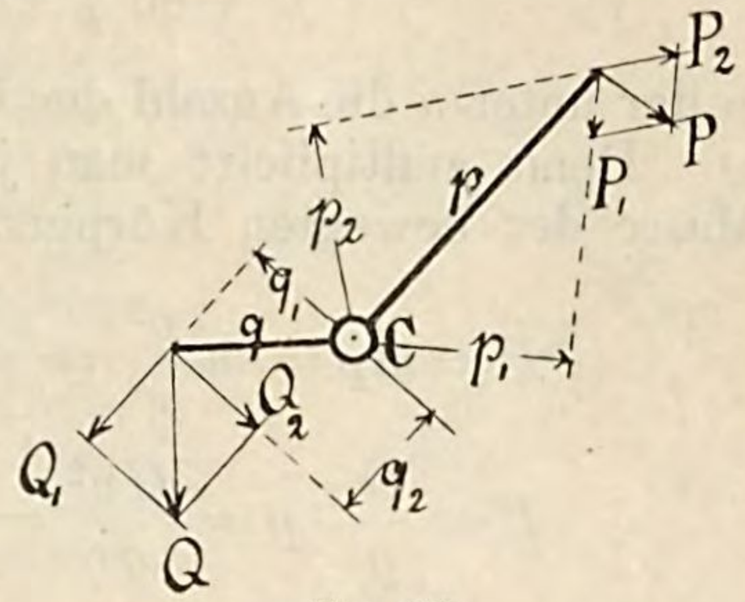


Fig. 119.

Es lassen sich somit die Archimedischen Hebelgesetze auf eine beliebige Anzahl von Kräften, die um C drehen, anwenden, und es würde der Gleichgewichtszustand ausgedrückt sein durch die Beziehung:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 \ldots - (Q_1 q_1 + Q_2 q_2 \ldots) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 200$$

oder in Worten:

Wirken mehrere Kräfte auf Drehung um die Achse C, so findet Gleichgewicht statt, wenn die algebraische Summe aller statischen Momente in Bezug auf die Achse Null ist.

Beispiele über Anwendung des Hebels in der Technik werden später (§ 228) gegeben.

E.

Der Satz von den Centralkräften.

§ 111.

Einleitende Bemerkungen. Nicht nur vermittelst der Geschwindigkeits-Veränderung einer geradlinigen, sondern auch aus der Richtungs-Veränderung einer krummlinigen Bewegung bestimmt man die Grösse und die Richtung einer Kraft.

Ist bei der krummlinigen Bewegung die Resultirende aller vorhandenen Kräfte stets nach demselben Punkte (Centrum) gerichtet, so heisst im allgemeinen die Kraft Centralkraft, die Bewegung Centralbewegung.

Bemerkenswerth ist, dass bei allen Centralbewegungen die Kräfte nicht allein abhängen von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Entfernung der bewegten Masse vom Mittelpunkte.

a.

Centripetalkraft. Centrifugalkraft.

§ 112.

Die Grösse der nach dem Mittelpunkt der Krümmung gerichteten Kraft ergiebt sich leicht aus der früher (§ 53) abgeleiteten Huygens'schen Gleichung 85 der krummlinigen Bewegung:

$$p = \frac{v^2}{r} = r \cdot w^2 = r\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 = 0{,}01097\, r \cdot n^2 = \text{etwa}\ \frac{1}{100}\, r \cdot n^2 \quad . \quad . \quad 201$$

in der unter n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute verstanden wird.

Denn multiplicirt man jede der Seiten der Gleichung mit m, der Masse des bewegten Körpers, so ist der gesuchte Werth:

$$\left.\begin{aligned} P &= mp = m\,\frac{v^2}{r} = mrw^2 \\ P &= \frac{G}{g} \cdot p = \frac{Gv^2}{gr} = \frac{G}{g}\, rw^2 = 0{,}00112 \cdot Grn^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 202$$

Diese Kraft P, die beständig nach dem Mittelpunkte hin gerichtet sein muss, wenn die krummlinige Bahn überhaupt zu stande kommen soll, heisst deshalb auch die Centripetalkraft (Centrum; petere erstreben).

Jedoch die träge Masse m widersteht dieser Ablenkung aus der geradlinigen Bewegung in die krummlinige mit einer (nach dem Gesetze der Wechselwirkung) gleich grossen, entgegengesetzt gerichteten, also nach aussen wirkenden Kraft, der sogen. Centrifugalkraft (fugare fliehen) oder Fliehkraft.

Führt man in obige Gleichung ein: $v^2 = 2gh$, so erhält man:

$$P = \frac{G}{g} \cdot \frac{2gh}{r} = G\,\frac{2h}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 203$$

und damit die eigenthümliche Beziehung, dass sich die Centripetalkraft P jederzeit zum Gewichte G des Körpers verhält, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe (Gleichung 23) zum Radius.

Die Centripetalkraft ist als derjenige Zug oder Druck aufzufassen, der erforderlich ist, um die Masse m aus der geradlinigen Bahn herauszudrängen.

Die Centrifugalkraft dagegen ist der Widerstand der trägen Masse gegen die Ablenkung aus der geraden Linie.

Kurz:

Krummlinige Bewegung erfordert Centripetalkraft und erzeugt Centrifugalkraft.

So tritt die Kraft in der Wissenschaft und Kunst (Technik) unter verschiedenen Namen auf:

Als Anziehung (allgemeine Gravitation § 137) zwingt sie die Planeten, um die Sonne zu kreisen, als Schienendruck zwängt sie den Eisenbahnzug in die Kurve hinein, als Spannung in den Armen und Kränzen der Räder sucht sie zu verhindern, dass die Masse sich von der Drehachse entfernt.

Deshalb sind sehr rasch laufende Schwungräder, Schleifsteine, Mühlensteine keineswegs ungefährlich für die Umgebung; sie werden oft durch die Centrifugalkraft auseinandergerissen und ihre mit der lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2}$ begabten Theile mit verheerender Gewalt wie Geschosse fortgeschleudert. Siehe weiter unten „Centrifugalspannung in gedrehten Körpern“.

§ 113.

Hörte plötzlich die Centripetalkraft auf, würde z. B. in Fig. 120 der Faden zerschnitten, mittelst dessen die Masse m mit der Geschwindigkeit v im Kreise vom Halbmesser r herumgeschleudert wird, so würde in demselben Augenblicke auch die Centrifugalkraft verschwinden und die Masse sich in der Richtung der Tangente mit der augenblicklichen Geschwindigkeit v geradlinig fortbewegen, wie der mittelst der Schleuder ins Kreisen versetzte Stein im Augenblicke des Oeffnens der Schleuder. Wie der Stein die geöffnete Schleuder, so verlassen auch die Schmutztheilchen den

Umfang eines auf durchnässtem Wege schnell dahinrollenden Rades, wenn die Adhäsion des Schmutztheilchens am Radumfange geringer ist als die Centrifugalkraft der in die krumme Bahn gezwängten Masse. Fast so wie jene Schmutztheilchen von dem Randumfange, so wurden die Planeten bei ihrer Geburt von der Sonne abgeschleudert, so würden die Erdbewohner von der Oberfläche der Erdkugel fortgeworfen, wenn plötzlich die Erdanziehung (Erdschwere) unter ein gewisses Maass sich minderte oder die Umdrehungs-Geschwindigkeit v der Erde sich entsprechend vergrösserte (siehe das Zahlenbeispiel 60). Auch in tangentialer Richtung werden die glühenden Stahltheilchen fortgeschleudert, welche der schnell gedrehte Schleifstein von dem auf seinen Umfang gedrückten stählernen Werkzeuge losreisst.

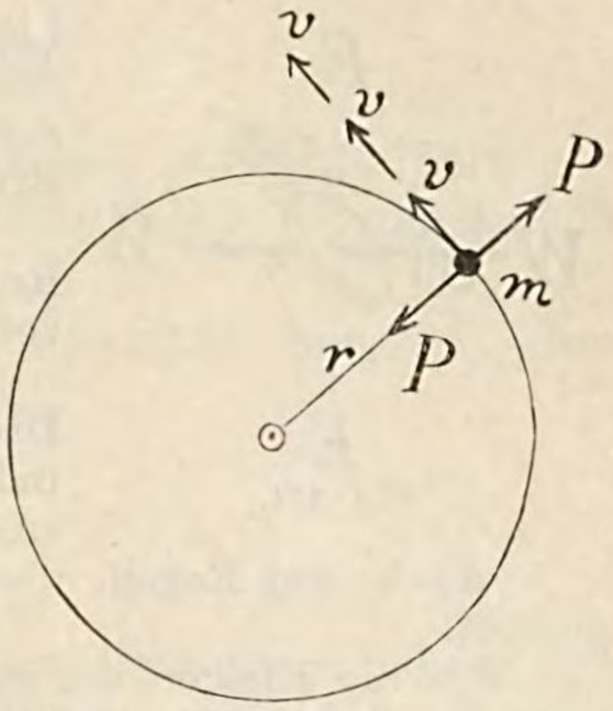


Fig. 120.

Wenn wir unsere halbgefüllte Kaffeetasse mit der Hand in möglichst kleinen Kreisen schnell herumschwenken oder bei ruhender Tasse die Flüssigkeit mittelst des Löffels in Drehung versetzen, so steigt die Flüssigkeit vor unseren Augen an dem Rande der Tasse in die Höhe, weil dem Streben der in die Kreisbewegung gezwängten Flüssigkeit nach aussen durch die Wand der Tasse ein Damm entgegengestellt ist. Die Fliehkraft ist hier verwendet zum Heben der Flüssigkeit um die Höhe h (Fig 121). So deutet ein alltäglicher Vorgang im Principe die Wirkung der sogen. Centrifugalpumpen, Centrifugalventilatoren, des Umdrehungsgeschwindigkeitsmessers von O. Braun (Z. d. V. d. Ing. 1893, S. 593) an. Durchlöcherten wir die Wandung unseres Gefässes, würde die Flüssigkeit durch diese Löcher nach aussen fliehen.

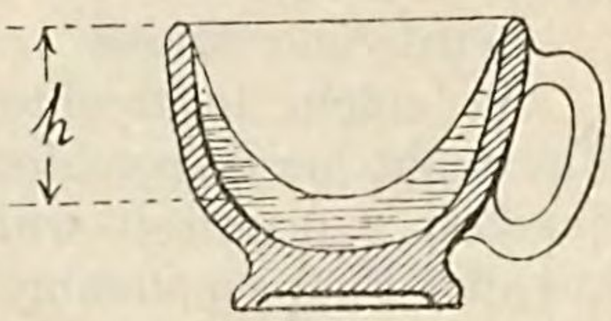


Fig. 121.

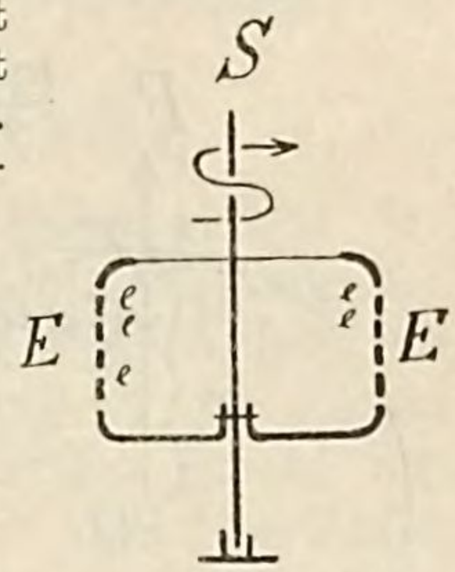


Fig. 122.

So trennt man mit bestem Erfolge durch vollkommener eingerichtete, technische Vorrichtungen, denen man wohl den Namen Centrifugen gegeben hat, Flüssigkeiten von festen Stoffen, welche letzteren in dem um eine lothrechte Achse S mit sehr grosser Geschwindigkeit ($n = 1000$ bis 2000) gedrehten Gefässe E zurückbleiben, wenn die Löcher e am Umfange desselben klein genug sind.

Hierher gehören die Zuckercentrifugen, um den Zuckersaft abzutrennen; die sogen. Oelschleudern, um das Oel aus der zum Putzen der Maschinen gebrauchten sogen. Putzwolle zu schleudern. Auch zum Ausschleudern des Honigs aus den Waben, der Butterkügelchen aus der Milch, zum Trocknen der Wäsche und in sehr vielen anderen Fällen erzeugt und benutzt man in der angedeuteten Weise die Fliehkraft. Auch die Schleudermühle oder der Desintegrator von Carr und der Dismembrator von Kämp und Nagel, Weisbach-Hermann Band III, 3, 80, gehört hierher.

Sehr überraschend wirkt die Centrifugalkraft bei den sogen. Lappen-Polirscheiben Fig. 123, die der Verfasser in der Fabrik von Schäffer Budenberg in Buckau zum Poliren derjenigen Gegenstände angewendet sah, die bereits durch Schmirgel- und Holzscheiben vorpolirt waren, und nach dem Feinpoliren mittelst caput mortuum auf den erwähnten Lappenpolirscheiben, zuletzt im elektrolytischen Nickelbade vernickelt werden sollten. Die Lappenpolirscheibe ist eine aus einer grossen Zahl kreisrund geschnittener Baumwollappen zusammengesetzte, durch eine Welle in Drehung versetzte Scheibe. Bei 2000 Umdrehungen der Scheibe in 1 Minute werden die sonst sehr weichen, nachgiebigen Lappen so steif, dass man den zu polirenden Gegenstand ziemlich stark gegen den Umfang der Scheibe pressen kann, ohne die Lappen umzubiegen.

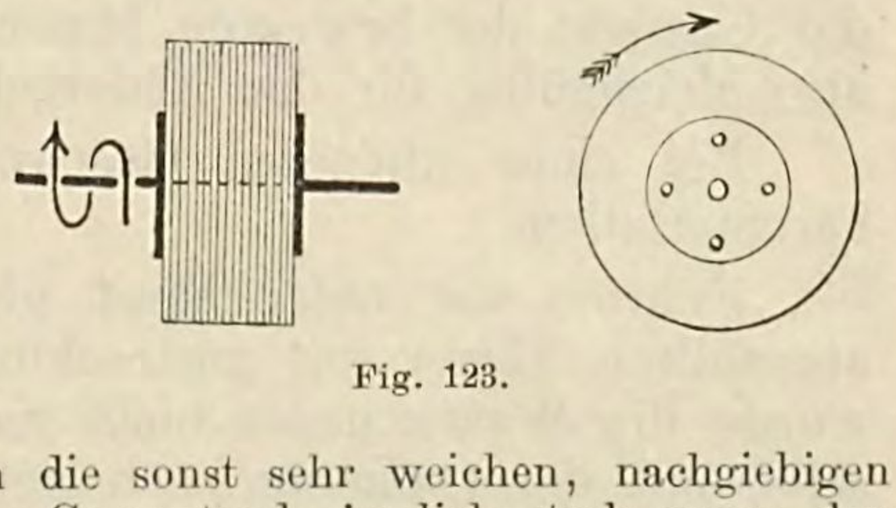


Fig. 123.

Auch spielt die Centrifugalkraft eine wichtige Rolle bei den Geschwindigkeitsmessern (Tachometern, Fig. 124) zum ununterbrochenen Anzeigen der Umdrehungszahlen

rotirender Wellen, wie sie von Schäffer & Budenberg in Buckau für $n = 100$ bis 2000 Umdrehungen in 1 Minute zum Preise von 130 bis 150 Mark geliefert werden.

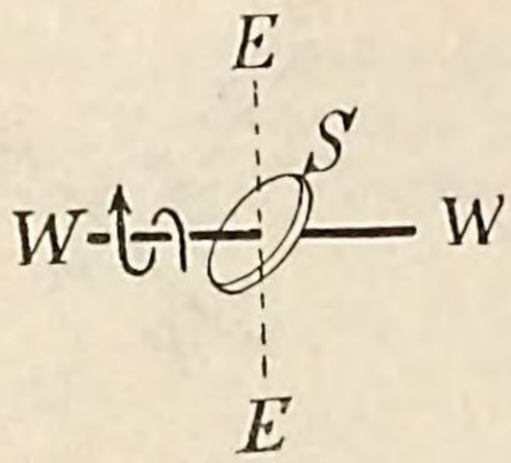


Fig. 124.

Der wichtigste regulirende Bestandtheil ist ein in schräger Lage zur Welle W angebrachter drehbarer Schwungring S, der bei wachsender Umdrehungszahl der Welle der senkrecht zur Welle gerichteten Lage EE zustrebt. Die Bewegung des Ringes wird durch ein Hebelwerk auf einen Zeiger übertragen.

Einen auf demselben Principe beruhenden Schwungring-Regulator sah der Verfasser auf der 1867er Pariser Ausstellung von Albaret ausgestellt.

(Bei anderen Geschwindigkeitsmessern werden durch Drehung einer Kupferscheibe Foucault'sche elektrische Ströme induzirt, die auf einen Hufeisenmagneten einwirken. Hierbei spielt die Centrifugalkraft keine Rolle.)

Auch zum Regeln des Ganges der Maschinen hat man die Centrifugalkraft ausgenutzt.

Wie die Kleider der rasch im Kreise sich drehenden Ballettänzerin, so hebt sie auch die Kugeln des (§ 121 behandelten) Schwungkugel-Regulators, den Watt erfand und benutzte, um den Zufluss der Kraftquelle (des Dampfes, des Wassers) zur Maschine (Dampfmaschine, Wasserrad) zu regeln.

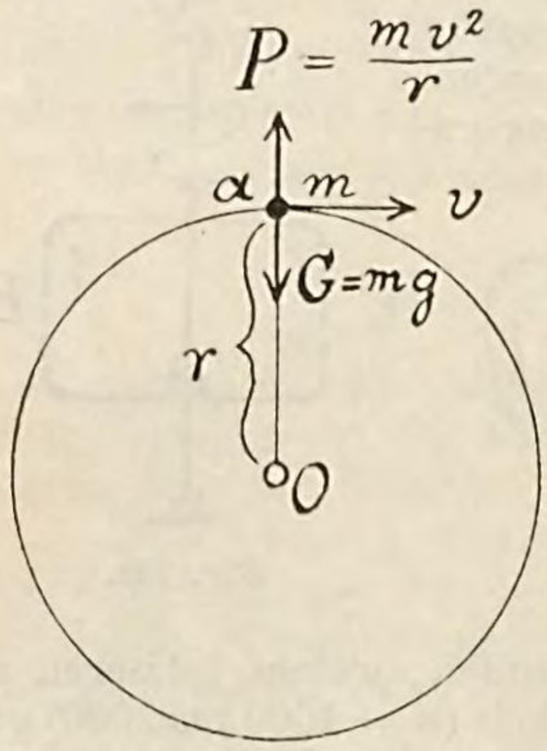


Fig. 125.

§ 114.

Beispiel 59: An dem Ende eines Fadens von der Länge . . . . . $r = 2$ m, wird eine Masse m vom Gewichte . $G = 3$ kg in einem lothrechten Kreise K um O als Mittelpunkt herumgeschleudert. Es soll die Geschwindigkeit v ermittelt werden, bei welcher im Scheitel a die Fadenspannung Null wird, also die Masse m den Scheitel schwebend durchläuft.

Der Bedingung entsprechend muss das erdwärtsgerichtete Gewicht G gleich der aufwärts (nach aussen) gerichteten Fliehkraft P sein.

$$\left.\begin{aligned} G &= P \\ mg &= \frac{m v^2}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 204$$

also:

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 2} \sim 4{,}5 \text{ m}$$

wenn die Erdbeschleunigung rund $g = 9{,}81$ m gesetzt wird. Uebrigens ist das Gewicht der bewegten Masse ganz aus der Rechnung herausgefallen, also gleichgültig für das Endergebniss.

Bei einer kleineren Geschwindigkeit als 4,5 m würde die Masse herunterfallen.

Führten wir unter sonst gleichen Verhältnissen einen mit Wasser angefüllten Eimer mit gestrecktem Arme in unserem Kreise herum, so würde die Wassermasse nicht aus dem Eimer herausfliessen, wenn derselbe mit der Oeffnung nach unten durch den Scheitel a mit einer Geschwindigkeit:

$$v > 4{,}5 \text{ m}$$

geführt wird.

Beispiel 60: Wäre der Halbmesser des Kreises gleich dem Halbmesser des Erdäquators, also . . . . . $r = 6370000$ m, so würde:

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 6370000} = 7905 \text{ m}$$

sein müssen, wenn die Masse sich schwebend an der Erdoberfläche erhalten, also keinen Druck auf die Unterlage ausüben sollte. (Siehe auch das Beispiel 34.)

Die wirkliche Umfangsgeschwindigkeit am Aequator beträgt (Beispiel 8) 463,8 m; die Erde müsste sich demnach:

$$\frac{7905}{463{,}8} \sim 17 \text{ mal}$$

schneller um ihre Achse drehen, wenn die Aequatorbewohner eben den Boden nicht mehr unter den Füssen fühlen, sondern schweben sollten. Bei noch grösserer Geschwindigkeit würden die Bewohner, die leichten und die schweren, von der Erdoberfläche abgeschleudert, gleichsam wie die obenerwähnten Schmutztheilchen vom Umfange des Wagenrades.

Gewichtsverminderung durch die Erddrehung.

Aus dem gewählten Beispiele geht noch deutlich hervor, dass der Druck eines Körpers auf seine Unterlage, also das durch Wägung bestimmte Gewicht, durch die Drehung der Erde um ihre Achse am meisten am Aequator vermindert wird, überhaupt abhängig ist von seinem Abstande von der Erdachse bezw. von der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Wir werden auf diese Abhängigkeit des Gewichtes eines Körpers von der geographischen Breite φ später (§ 145) näher eingehen.

§ 115.

Centrifugaler Druck.

Die Gleichung 202:

$$P = \frac{mv^2}{r} = \text{etwa } \frac{1}{1000} G \cdot r \cdot n^2$$

lehrt zugleich, mit welchem ungeheuer grossen Drucke bei genügend grosser Umdrehungsgeschwindigkeit die Masse nach aussen hin getrieben wird.

Beispiel 61: Beträgt der Halbmesser . . . . . $r = 1$ m,
das Gewicht der kreisenden Masse . . . . . $G = 1$ kg,
die Anzahl der Umläufe in 1 Minute . . . . . $n = 2000$,
so würde sich ergeben:

$$P = \frac{1}{1000} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2000^2 = 4000 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205$$

d. h. unsere Masse, welche in Folge der Erdschwere nur mit 1 kg auf ihre Unterlage drückt, wenn sie ruht, würde einen Druck von 4000 kg nach aussen hin ausüben, wenn man sie, wie oben angegeben, ins Kreisen versetzte. Wir besitzen somit in diesem Fliehbestreben in Umdrehung versetzter Massen ein ausgezeichnetes Mittel, solche Vorgänge zu be-

schleunigen, bei denen die Schwerkraft eine Rolle spielt (Trennung durch Bodensatzbildung, in der Aufbereitung, Chemie u. s. w.). Die Beschleunigung der Erdschwere ist begrenzt, die der Centralbewegung könnten wir beliebig vergrössern, wenn nicht doch schliesslich unsere künstlichen Hülfsmittel, besonders auch die Festigkeit der Materialien uns eine Grenze setzten. (Siehe: Centrifugalspannung in gedrehten Körpern.)

§ 116.

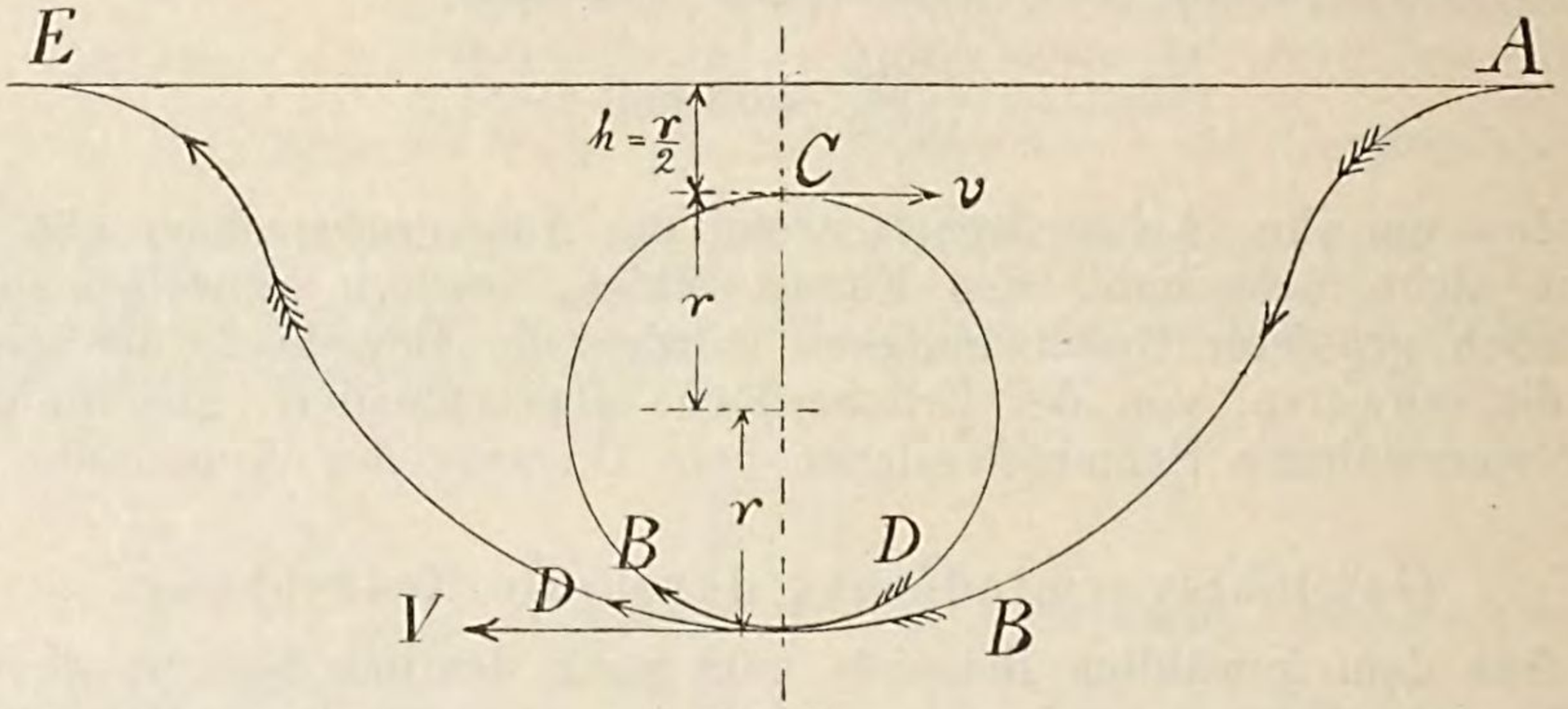


Fig. 126.

Centrifugal-Eisenbahn (Fig. 126). Soll ein Wagen, welcher auf der gekrümmten Schienenbahn $ABCDE$ dahinrollt, im Scheitelpunkte C nicht herunterfallen, so muss, ebenso wie im obigen Zahlenbeispiele, die Geschwindigkeit hier mindestens:

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{2g \cdot \frac{r}{2}} = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 206$$

sein. Aus dem letzten Ausdrucke geht noch hervor, dass der senkrechte Abstand des Ausgangspunktes A vom Scheitel C mindestens gleich dem halben Halbmesser der Kreisbahn sein, kurz der Gleichung:

$$h > \frac{r}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 207$$

entsprochen werden muss, wenn der Wagen im Punkte C mit der erforderlichen, den Absturz verhütenden Geschwindigkeit ankommen soll. Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte B würde dann beiläufig sein:

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g \cdot 2{,}5 \cdot r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208$$

Das Centrifugal- oder konische Pendel.

§ 117.

Einleitende Bemerkungen. Eine kreisende Bewegung kann auch sehr leicht auf folgende Weise herbeigeführt werden. Man hebt die Kugel eines in der Gleichgewichtslage lothrecht herabhängenden Lothes bei

beständig straff gespanntem Faden in irgend eine Ebene heraus und wirft sie gleichsam senkrecht zu dieser Ebene fort. Sie beschreibt dann einen wagerechten Kreis um die ursprüngliche Gleichgewichtslage (Fig. 127).

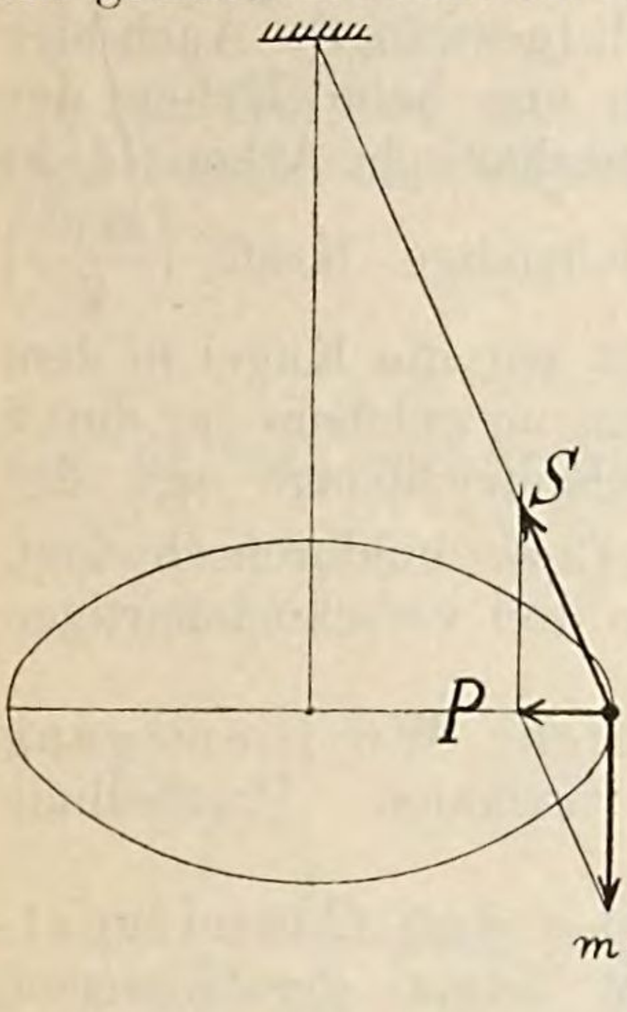


Fig. 127.

Wäre die Kugel ganz frei, so würde sie durch die Erdbeschleunigung g allein beeinflusst, eine Parabel (Wurflinie, Fig. 128), wie wir solche früher behandelten (Beispiel 30), beschreiben. Durch die Fadenspannung S wird gleichsam das Fallbestreben $m \cdot g$ in die nach der Mitte der Krümmung hin gerichtete Centripetalkraft:

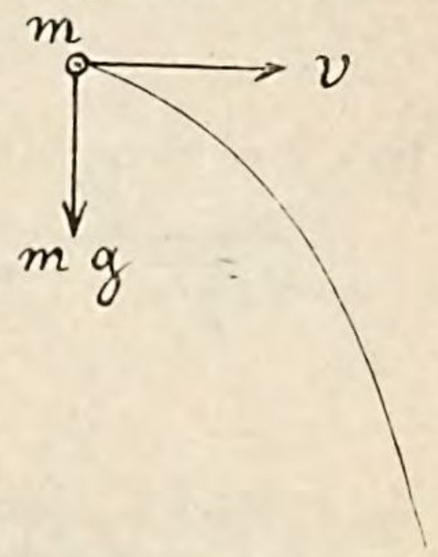


Fig. 128.

$$P = m \cdot p = \frac{mv^2}{r} = m \cdot rw^2$$

verwandelt. Bestimmter ausgedrückt: Es setzen sich nach Fig. 127 S und $G = mg$ zur Resultanten $P = mp$ zusammen. P in entgegengesetzter Richtung, d. h. als Centrifugalkraft, eingeführt (Fig. 131), würde nach dem Satze von den drei Kräften (§ 74) S und G das Gleichgewicht halten.

Das erdwärts gerichtete Fallen wird nicht vernichtet, sondern durch die Fadenspannung umgewandelt in ein gleichwerthiges beständiges Fallen nach dem Mittelpunkte M der Bewegung. Man könnte diese Wahrheit ausdrücken durch die Worte: Die Kugel fällt nicht zur Erde, aber sie kreist. Diese Vorrichtung ist ein Centrifugalpendel und nähert sich um so mehr dem gedachten mathematischen Pendel, je leichter der Faden ist und je mehr die Masse m sich dem materiellen Punkte nähert. Stellen wir uns den Vorgang in der geschilderten Weise vor, so giebt er eine lehrreiche Bestätigung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie: In der Natur findet keine Vernichtung, sondern nur eine gleichwerthige Umwandlung statt (was wir schon § 86 u. ff. eingehend behandelt haben).

Die von uns beim Aufheben und Werfen aufgewendete mechanische Arbeit (§ 86) finden wir jederzeit als in der bewegten Kugel aufgespeichertes Arbeitsvermögen $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ wieder vor, welches sie auch wieder herausgeben würde, wenn wir sie an irgend einer Stelle der Bahn aufhielten (Fig. 129).

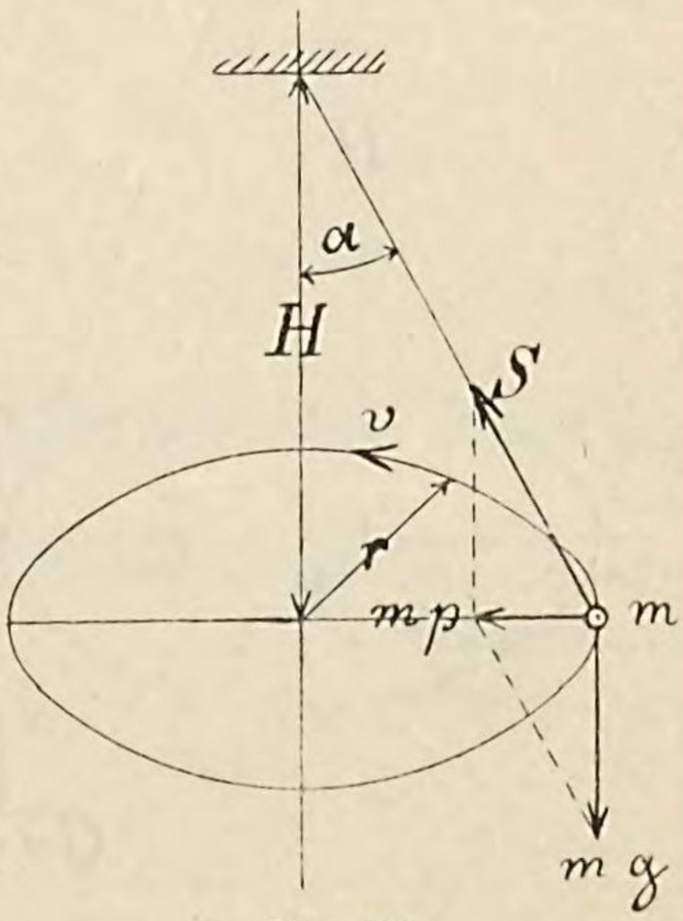


Fig. 129.

Hätten wir die aus der Gleichgewichtslage gehobene Kugel bei gespanntem Faden nur freigegeben, nicht seitlich fortgeworfen, so würde dieselbe in einem lothrecht stehenden Bogen als sogen. Schwingungspendel (Fig. 129), welches später (§ 132) behandelt wird, um die lothrechte Gleichgewichtslage hin- und her-

schwingen (fallen und steigen). Die gerade erdwärts gerichtete Freifall-Linie ist hier durch die Fadenspannung in einen lothrecht gerichteten Kreisbogen verwandelt (gezwängt). Auch hier würden wir die von uns beim Heben der Kugel aufgewendete mechanische Arbeit $(G \cdot h)$ als gleichwerthige, lebendige Kraft $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ wiedergewinnen, wenn wir die Kugel in dem Augenblicke aufhielten, in welchem sie durch die lothrechte Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ hindurchschwingt.

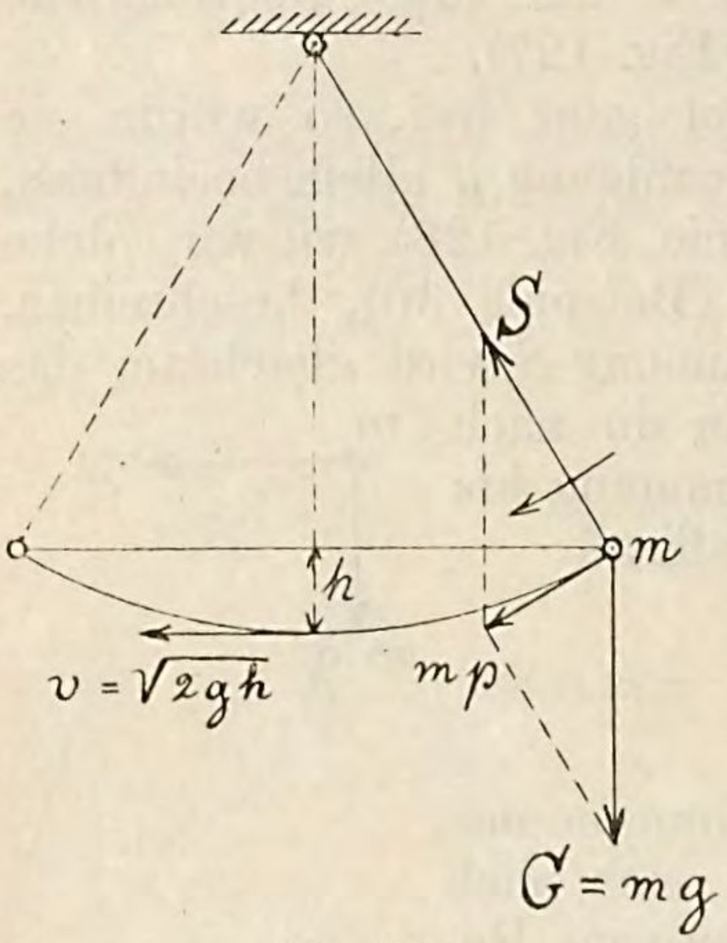


Fig. 130.

So lassen sich die drei verschiedenartigen Bewegungen:

1. die gewöhnliche Wurfbewegung mit ihrer vertikalen Parabellinie (Fig. 128),
2. die Bewegung des Centrifugalpendels mit seiner geschlossenen, horizontalen Kreisbahn (Fig. 129), und
3. die hin- und hergehende Bewegung des gewöhnlichen Schwingungspendels mit seinem vertikalen Kreisbogen (Fig. 130) doch verwandtschaftlich nebeneinander stellen.

§ 118.

Gehen wir nun etwas näher auf die Bewegung zunächst des Centrifugalpendels ein.

Die Spannung des Fadens lässt sich auch als Mittelkraft aus dem Gewichte der Kugel mg und der Centrifugalkraft auffassen und ist dann nach der Fig. 131 ausgedrückt durch die Gleichung:

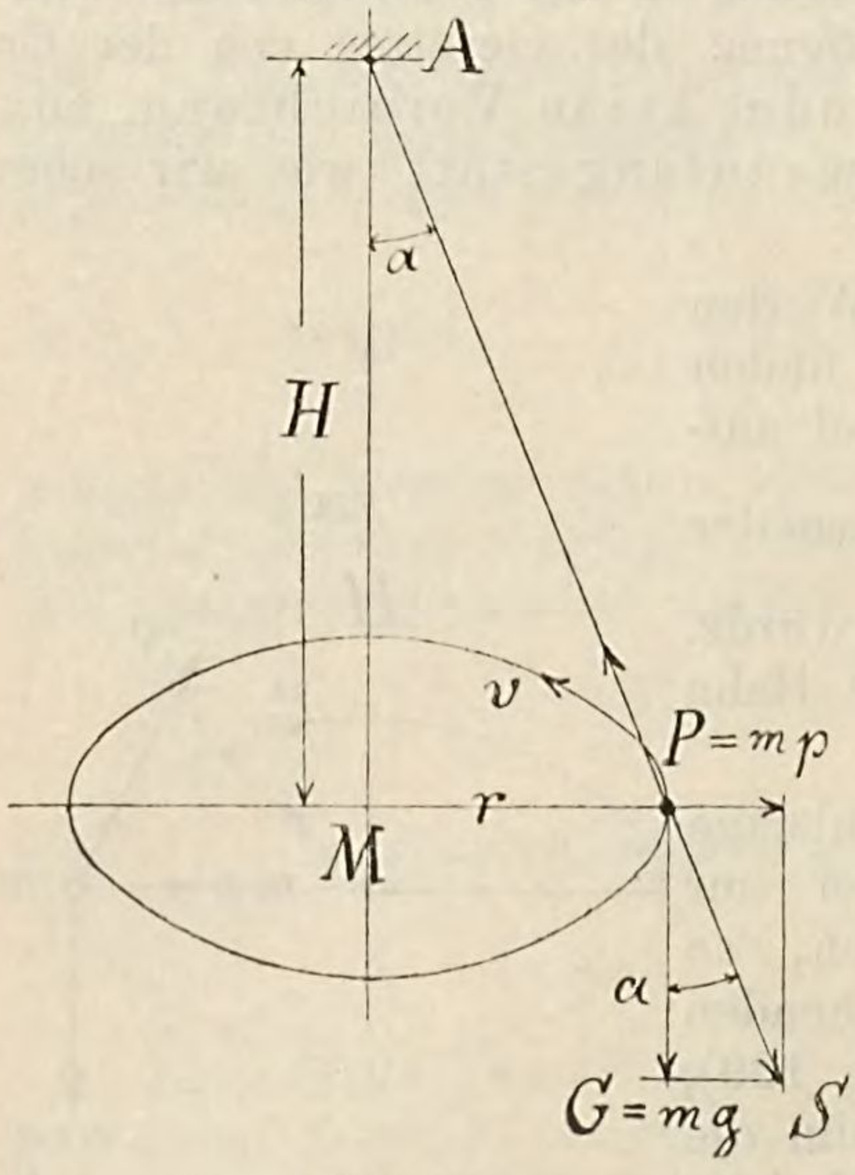


Fig. 131.

$$S = \sqrt{(mg)^2 + (mrw^2)^2} \quad . \quad . \quad 209$$

die Richtung des Fadens ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} a = \frac{mrw^2}{mg} = \frac{rw^2}{g} \quad . \quad . \quad . \quad 210$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{rw^2}{g}$$

$$\cos a = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{\sin a}{r}$$

$$\cos a = \frac{g}{w^2 l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 211$$

wenn man mit l die Länge des Fadens bezeichnet.

§ 119.

Die Umlaufszeit, also die Zeit in Sekunden, welche die Kugel auf einen Umschwung verbraucht, ist auch hier (wie in § 54):

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{r}{p}},$$

oder, da nach der Aehnlichkeit der Dreiecke sich verhält:

$$\frac{r}{H} = \frac{p}{g}$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Umlaufszeit des Pendels, ausser von g, nur abhängt von H, dem senkrechten Abstande der Schwingungsebene der Pendelkugel vom Aufhängepunkte A und nicht etwa von der Masse der Kugel oder (wie beim Schwingungspendel) von der Länge des Fadens.

Alle Centrifugalpendel, welche dieselbe Umlaufszeit t haben, oder, was daraus folgt, dieselbe Anzahl von Umdrehungen n in einer Minute ausführen, kreisen in demselben Vertikalabstande unter dem Aufhängepunkte.

Mit anderen Worten würde dieser wichtige Satz lauten: Alle Centrifugalpendel der nebenstehenden Figur, deren Kugeln in demselben Vertikalabstande vom Aufhängepunkte kreisen, haben dieselbe Umlaufsdauer oder Umlaufszahl. Dagegen verhalten sich die Umlaufsgeschwindigkeiten $v_1 v_2 \ldots$ wie die Halbmesser $r_1 r_2 \ldots$ ihrer Kreisbahnen.

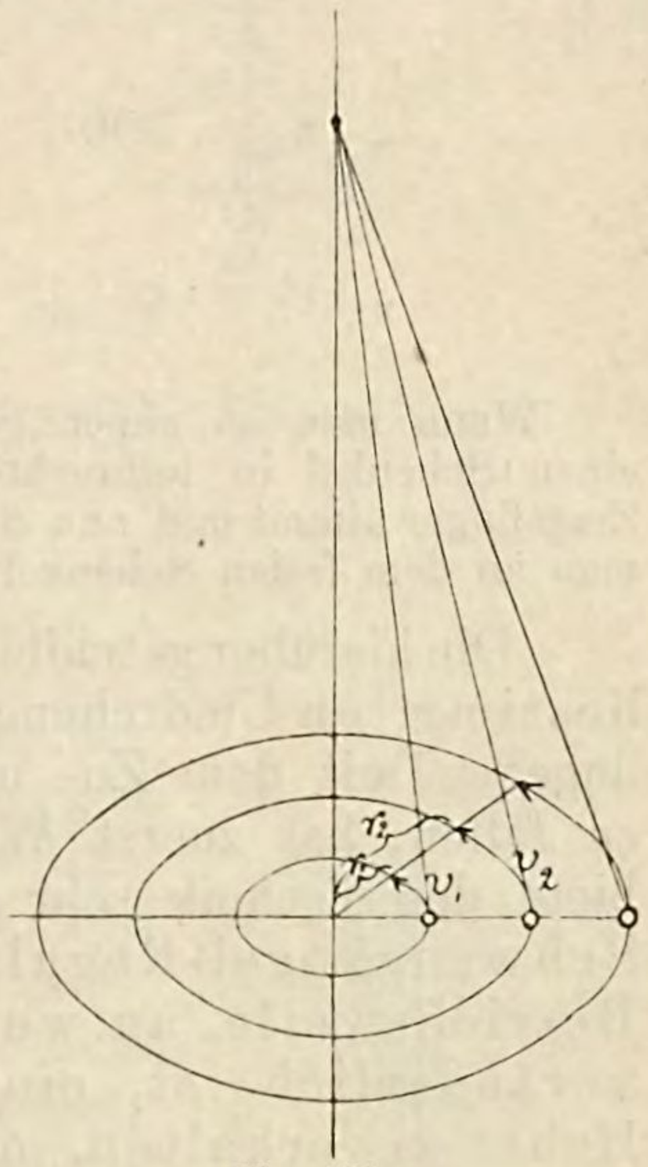


Fig. 132.

§ 120.

Einen für das Folgende wichtigen Zusammenhang zwischen H und n gewinnt man leicht noch auf folgende Weise:

Ist n die Umdrehungszahl des Pendels in 1 Minute = 60 Sekunden,
1 „ „ „ „ „ t Sekunden,

so verhält sich:

$$\frac{n}{1} = \frac{60}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 212$$

Dann ist:

$$t^2 = \frac{60^2}{n^2}$$

$$2^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{H}{g} = \frac{60^2}{n^2}$$

$$H = \frac{60^2 \cdot g}{4\pi^2 \cdot n^2} = \left(\frac{30}{n}\right)^2 = \frac{900}{n^2} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad 213$$

Nach der letzten Gleichung und nach Fig. 133 ist:

für $n = 30$ . . . . . $H = \frac{900}{30^2} = 1$ m,

„ $n_1 = 42{,}5$ . . . . . $H = \frac{900}{(42{,}5)^2} = \frac{1}{2}$ m,

„ $n_2 = 52$ . . . . . $H = \frac{900}{52^2} = \frac{1}{3}$ m,

„ $n_3 = 60$ (Sekundenpendel) . $H = \frac{900}{60^2} = \frac{1}{4}$ m,

„ $n_4 = 300$ . . . . . $H = \frac{900}{300^2} = \frac{1}{100}$ m,

„ $n_5 = \infty$ . . . . . $H = \frac{900}{\infty} = 0.$

Wenn man an einem gewöhnlichen Zirkel das Charnier möglichst lockert, den einen Schenkel in lothrechter Stellung (das Charnier oben) zwischen Daumen und Zeigefinger nimmt und nun den Zirkel um diesen Schenkel schnell dreht, so beobachtet man an dem freien Schenkel im wesentlichen das Verhalten des Centrifugalpendels.

Die hierüber geschilderten Eigenschaften des Centrifugalpendels bei einer bestimmten Umdrehungszahl n in einem bestimmten Abstande H zu kreisen, dagegen mit dem Zu- und Abnehmen der Umlaufszeit n zu steigen und zu fallen, hat zuerst Watt zur Herstellung einer für verschiedene Gebiete der Technik sehr nützlichen Vorrichtung ausgewerthet, welche als Schwungkugel-Regulator bekannt ist. Dieselbe bezweckt, einer Betriebswelle, an welcher die Triebkraft oder der Widerstand veränderlich ist, eine gleichbleibende Umdrehungszahl möglichst zu erhalten, oder auch eine Welle vor gefahrbringenden, zu hohen Umdrehungszahlen zu bewahren; wie z. B. bei den Grobschleifereien, bei welchen die Gefahr des Zerberstens der Schleifsteine näher rückt, wenn die Umdrehungszahl dieser Steine über 140 in einer Minute hinauskommt. (Siehe „Centrifugalspannung in gedrehten Körpern“.)

§ 121.

Schwungkugel-Regulator (siehe auch § 292 u. ff.). Der Faden des Centrifugalpendels ist ersetzt durch zwei feste Stangen (Fig. 133), welche mittelst eines Gelenkes mit wagerecht liegendem Drehbolzen s so mit einer lothrecht stehenden, drehbaren Achse SS verbunden wurden, dass die Pendelstangen wohl gezwungen sind, an der Umdrehung der

Achse theilzunehmen, aber dabei frei um den Gelenkbolzen s auf- und niederschwingen, also die verschiedenen, in der Figur angedeuteten Lagen annehmen können. So werden die Pendelstangen die tiefste Lage annehmen, wenn die Achse ruht ($n = 0$), dagegen mehr und mehr die Achse fliehen, wenn diese nacheinander, bezw. $n = 30$, $n_1 = 42{,}5$, $n_2 = 52$, $n_3 = 60$, $n_4 = 300$, $n_5 = \infty$ Umläufe in 1 Minute ausführt. Es zeigt sich hierbei, dass der Ausschlag und das damit verbundene Steigen der Pendel durchaus nicht in gleichem Verhältnisse mit den Umlaufszahlen wächst. Z. B. erfolgt ein grosser Ausschlag und dementsprechend eine Steighöhe von $\frac{1}{2}$ m bei der Steigerung der Umdrehungszahl von 0 auf 42,5. Dagegen ist schon bei 300 Umläufen in 1 Minute die Pendelkugel so hoch gestiegen, dass ihr bei fortgesetzter Steigerung der Umdrehungszahl von $n = 300$ bis $n = \infty$ nur noch eine Steighöhe von 1 cm bleibt.

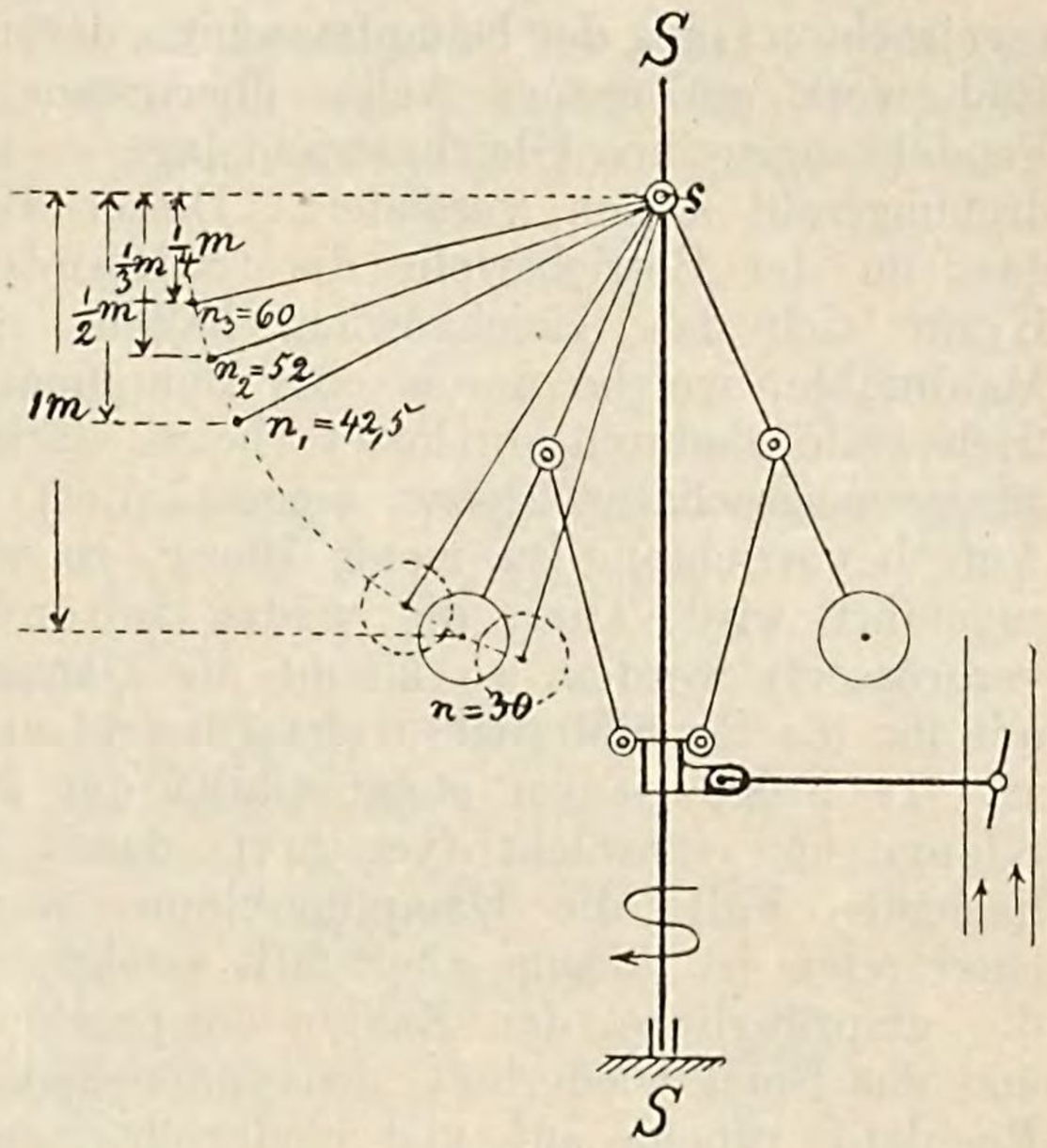


Fig. 133.

§ 122.

Porter's Regulator. Durch Vergrösserung der Masse m sowie durch Verlängerung der Pendelstangen wird nichts gewonnen. Wollte man bei grossen Umdrehungszahlen das Fliehen der Pendelkugeln von der Achse und das damit verbundene Aufsteigen derselben einschränken, so müsste man schon mit denselben eine Masse m_1 verbinden, welche, in Form einer die Drehachse umschliessenden, auf dieser verschiebbaren Hülse b, nicht durch die Fliehkraft nach aussen bewegt werden kann, wohl aber von den steigenden Pendeln mit in die Höhe genommen werden muss (Porter's Regulator, Fig. 134).

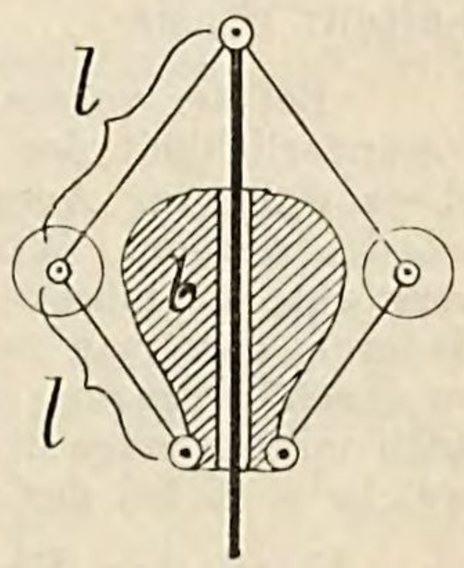


Fig. 134.

§ 123.

Watt übertrug nun bei seinem Regulator die Bewegung der Hülse durch ein Hebelwerk, das sogen. Stellzeug*), auf die in dem Dampfzuleitungsrohre angebrachte, den Dampfzufluss zur Dampfmaschine regelnde

*) Welches in der Figur so einfach als thunlich dargestellt ist.

sogen. Drosselklappe, derart, dass die Klappe beim Steigen der Pendel mehr geschlossen, dagegen beim Fallen derselben mehr geöffnet wurde.

Statischer Regulator. Stasie. Es sei die Figur gültig für den regelrechten Gang der Dampfmaschine, deren Bewegung durch ein passendes Räderwerk auf unsere Achse übertragen wird. Alsdann behaupten die Pendelstangen ihre Gleichgewichtslage so lange, bis die regelrechte Umdrehungszahl n sich verändert. Dieser Beharrungszustand setzt voraus, dass an der Betriebswelle die treibenden und die widerstehenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Sobald jedoch z. B. bei einer Mahlmühle, welche durch eine Dampfmaschine betrieben wird, die Betriebswelle dadurch entlastet (bezw. stärker belastet) wird, dass Mahlgänge ausgeschaltet (bezw. eingeschaltet) werden, oder aber durch die Aufgebevorrichtung zu wenig (bezw. zu viel) Getreide den Mahlgängen zugeführt wird, kurz, die widerstehenden Kräfte vermindert (bezw. vergrössert) werden, so nimmt die Dampfmaschine (Kraftmaschine) und mit ihr die Regulatorachse einen beschleunigten (bezw. verzögerten) Gang an. In Folge dessen steigt (fällt) der Regulator, schliesst (öffnet) die Klappe und schwächt (verstärkt) damit die Kraftquelle, also im vorliegenden Falle die Dampfmaschine, bis der regelrechte Gang wieder eingetreten ist. Dann aber fällt (steigt) der Regulator auch wieder in die ursprüngliche, der Zahl n entsprechende Gleichgewichtslage zurück, und das Spiel wiederholt sich von neuem. Auf diese Weise müsste der Regulator ruhelos auf- und niederschwingen.

Bei den neueren Dampfmaschinen lässt man nach Corliss den Regulator nicht auf eine Drosselklappe, sondern viel zweckmässiger auf die sogen. Expansion wirken (Praecisionsmaschinen).

Man nennt einen solchen Regulator, der immer wieder in die ursprüngliche, der regelrechten Umdrehungszahl n entsprechende Gleichgewichtslage zurückkehrt, einen statischen Regulator, und dieses Verhalten: Stasie.

Bei der voranstehenden Betrachtung war angenommen, dass der Regulator eine Veränderlichkeit der widerstehenden Kräfte auszugleichen hatte. Derselbe kann ebensowohl zur Ausgleichung einer Veränderlichkeit der treibenden Kräfte verwendet werden. Würde z. B. bei einer Windmühle die Kraftquelle, d. i. der Wind, verstärkt, so müsste man entsprechend die Betriebswelle stärker belasten, vielleicht dadurch, dass man mit Hülfe unseres Regulators die Mahlsteine einander näherte und so durch Erzeugung eines feineren Mehles den Widerstand vergrösserte. Man könnte auch mittelst einer Bremse den Kraftüberschuss töten. Doch ist die erstere Einrichtung, welche z. B. bei der Clausthaler Windmühle anzutreffen ist, vortheilhafter.

Dass der Regulator auch da mit Nutzen angewandt werden kann, wo das Wasser als Kraftquelle dient, ist klar.

§ 124.

Astatischer (nicht statischer) Regulator. Sollen die Kugeln in derjenigen Lage, in welcher sie angekommen waren und welche sie einnehmen mussten, um den normalen Gang der Maschine herbeizuführen, nun auch verharren, was zum Fortbestehen des normalen Ganges ja offenbar erforderlich ist, mit anderen Worten, sollen sie ein nicht statisches, d. h. astatisches Verhalten zeigen, so müssen sie gezwungen werden,

in einer solchen Bahnlinie auf- und niederzuschwingen, zu welcher die Mittelkraft aus den auf sie einwirkenden Kräften mg und myw^2 senkrecht steht. Mit w soll die der regelrechten Umdrehungszahl n entsprechende Winkelgeschwindigkeit bezeichnet werden.

Steht aber die Mittelkraft P stets senkrecht zur Bahn der Kugeln, so ist ihre mechanische Arbeit während einer Verschiebung der Kugeln, z. B. von A nach B gleich Null (siehe auch Fig. 101, § 94). Daraus folgt, dass auch die mechanische Arbeit der Seitenkräfte gleich Null sein muss.

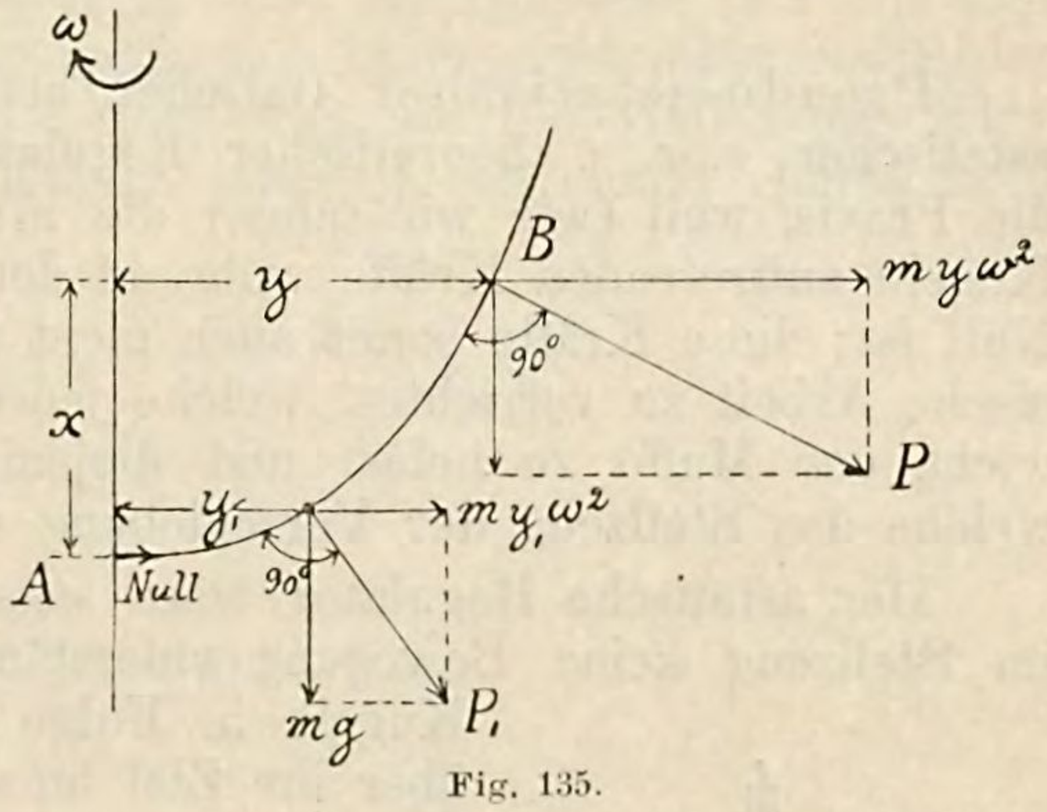


Fig. 135.

Auf Grund dieser Bedingung lässt sich das Krümmungsgesetz der fraglichen Bahnlinie AB für eine bestimmte Umlaufszahl n bezw. Winkelgeschwindigkeit w finden. x und y seien die Abstände des beliebigen Punktes B in Bezug auf den Anfangspunkt A, dann sind die während des Weges AB auf die Masse der Kugel m wirkenden Kräfte:

der Mittelwerth der Centrifugalkraft . . . $\dfrac{0 + myw^2}{2}$

(da diese von Null im Punkte A bis myw^2 im Punkte B gleichförmig mit y zunimmt) und

das Gewicht . . . . . mg.

Es ergiebt sich demnach als Bedingungsgleichung für die Bewegung von A nach B:

Die algebraische Summe der mechan. Arbeiten der Seitenkräfte = Null

$$+\frac{myw^2}{2} \cdot y - mg \cdot x = 0$$

$$y = \sqrt{2\,\frac{g}{w^2} \cdot x} \quad . \quad . \quad 214$$

Diese Gleichung ist die der Parabel.

Beim astatischen Regulator müssten demnach die Kugeln längs einer Parabellinie schwingen (Fig. 136) und würden während der regelrechten Winkelgeschwindigkeit (bezw. Umdrehungszahl n) auf jeder Stelle der Linie AB im Gleichgewicht verharren.

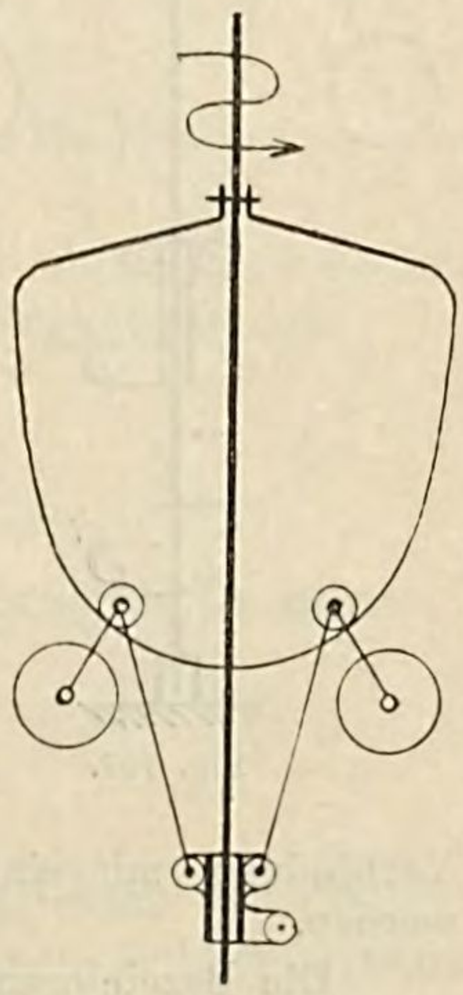


Fig. 136.

Erweiterung des Ergebnisses. Bei der Drehung um die Achse beschreibt die Parabellinie AB die Fläche eines Rotationsparaboloides. An welcher Stelle dieser Fläche sich, während der regelrechten Winkelgeschwindigkeit w (bezw. Umdrehungszahl n), die Kugeln auch befinden, sie würden weder steigen noch fallen, vielmehr an ihrem Orte verharren.

Wäre die Paraboloidfläche die Oberfläche einer

mit der Winkelgeschwindigkeit w in Drehung versetzten Flüssigkeit, so würde ebensowohl jedes frei in der Oberfläche bewegliche Flüssigkeitstheilchen doch im Gleichgewichte sich befinden. Daraus folgern wir, dass die Oberfläche der Flüssigkeit in einem um seine Achse gedrehten Gefässe eine Paraboloidfläche bildet, deren Krümmung sich nach obiger Gleichung bestimmen lässt.

§ 125.

Pseudo-astatischer (falscher astatischer) Regulator. Ein rein astatischer, s. z. s. theoretischer Regulator ist durchaus unbrauchbar für die Praxis, weil (wie wir sahen) die mechanische Arbeit der an den Kugeln auftretenden Kräfte während der Verschiebung der Kugeln gleich Null ist; diese Kräfte somit auch nicht im Stande sind, diejenige mechanische Arbeit zu verrichten, welche jederzeit erforderlich ist, um das Gewicht der Muffe zu heben und diejenigen Widerstände zu überwinden, welche das Stellzeug der Verschiebung entgegenstellt.

Der astatische Regulator wäre sogar auch dann unbrauchbar, wenn im Stellzeug keine Bewegungswiderstände vorhanden wären, weil die Kugeln in Folge ihres Trägheitsvermögens immer über ihr Ziel hinausschiessen würden.

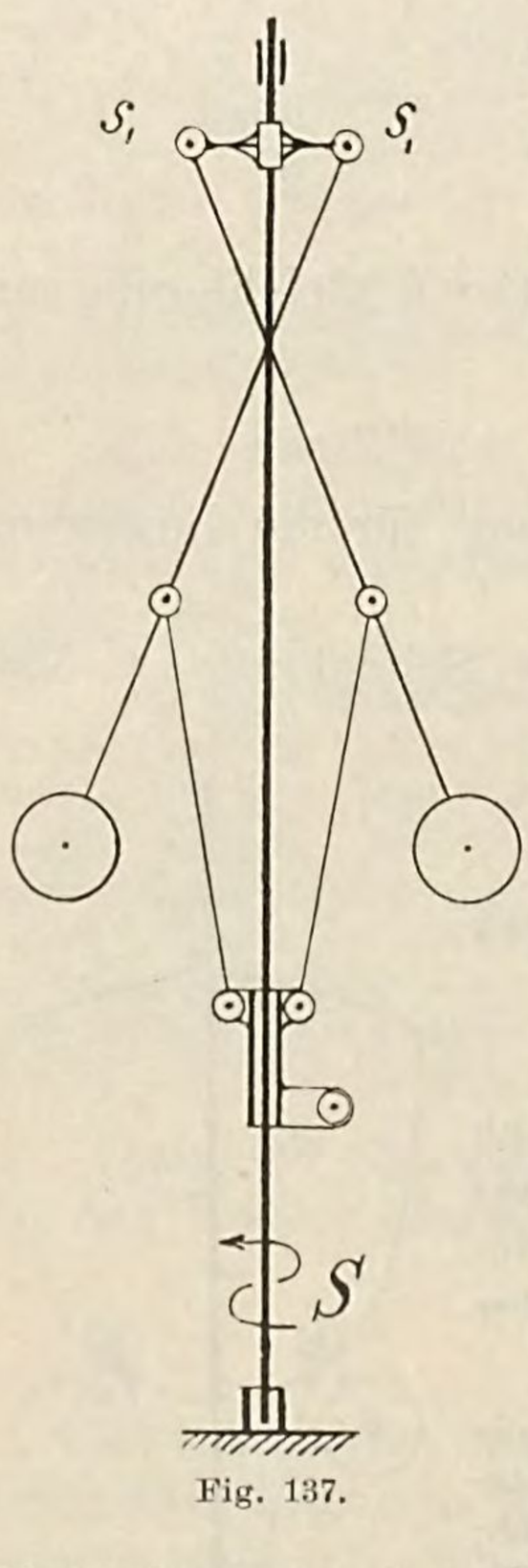


Fig. 137.

Ein brauchbarer Regulator muss sich deshalb doch mehr dem Watt'schen statischen Regulator nähern, muss aber eine genügende Empfindlichkeit besitzen; d. h. er muss den Widerstand im Stellzeug schnell überwinden und innerhalb geringer Geschwindigkeitsveränderungen (bis 5 %) eine grosse Verstellung der Drosselklappe oder des Regulirschiebers herbeiführen.

Von jener Parabel-Bahn genügt ein kleiner Theil. Dieser kann durch einen Kreisbogen ersetzt werden. Der Mittelpunkt des Ersatzkreisbogens (Krümmungskreisbogens) liegt nicht wie bei dem Watt'schen rein statischen Regulator auf der Regulator-Achse SS, sondern jenseits derselben, vielleicht bei s_1.

In den Punkten $s_1 s_1$ müsste man dann die Pendelstangen drehbar um Gelenkbolzen aufhängen.

Ein solcher statisch-astatischer, sogen. pseudo-astatischer Regulator vom Civilingenieur Kley in Bonn wird um so vollkommener reguliren, je geringer die Widerstände im Stellzeuge sind. Die Pendelstangen müssen in der Nähe der Achse SS gegabelt sein.

Nach Mueller jun. Z. 1889, S. 945 („Die Erfolge schnelllaufender Dampfm.") kann der alte Watt'sche Regulator in Verbindung mit einer Steuerung von sehr geringem Widerstande nicht übertroffen werden.

Die Bezeichnungen „Stasie" und „Pseudo-astasie" hat zuerst Reuleaux, Zeitschr. ds. V. deutsch. Ing. 1887, S. 89, Anm. 1, eingeführt.

Bei genauerer Untersuchung muss auch auf das Gewicht der Hülse b und der Stangen, sowie auf die Bewegungswiderstände des Stellzeuges Rücksicht genommen werden (§ 292).

Von den gebräuchlichen Regulatoren sind unten noch einige Vorbilder skizzirt.

§ 126.

Der Pröll'sche Regulator (Fig. 138) unterscheidet sich von dem Kley'schen dadurch, dass eine Kreuzung der Arme nicht mehr stattfindet, und in Folge dessen seine ganze Länge etwa auf die Hälfte des Kley-schen zurückgeführt wird. Die Kugeln bewegen sich auch nahezu in je einem Kreise um die Punkte s_1.

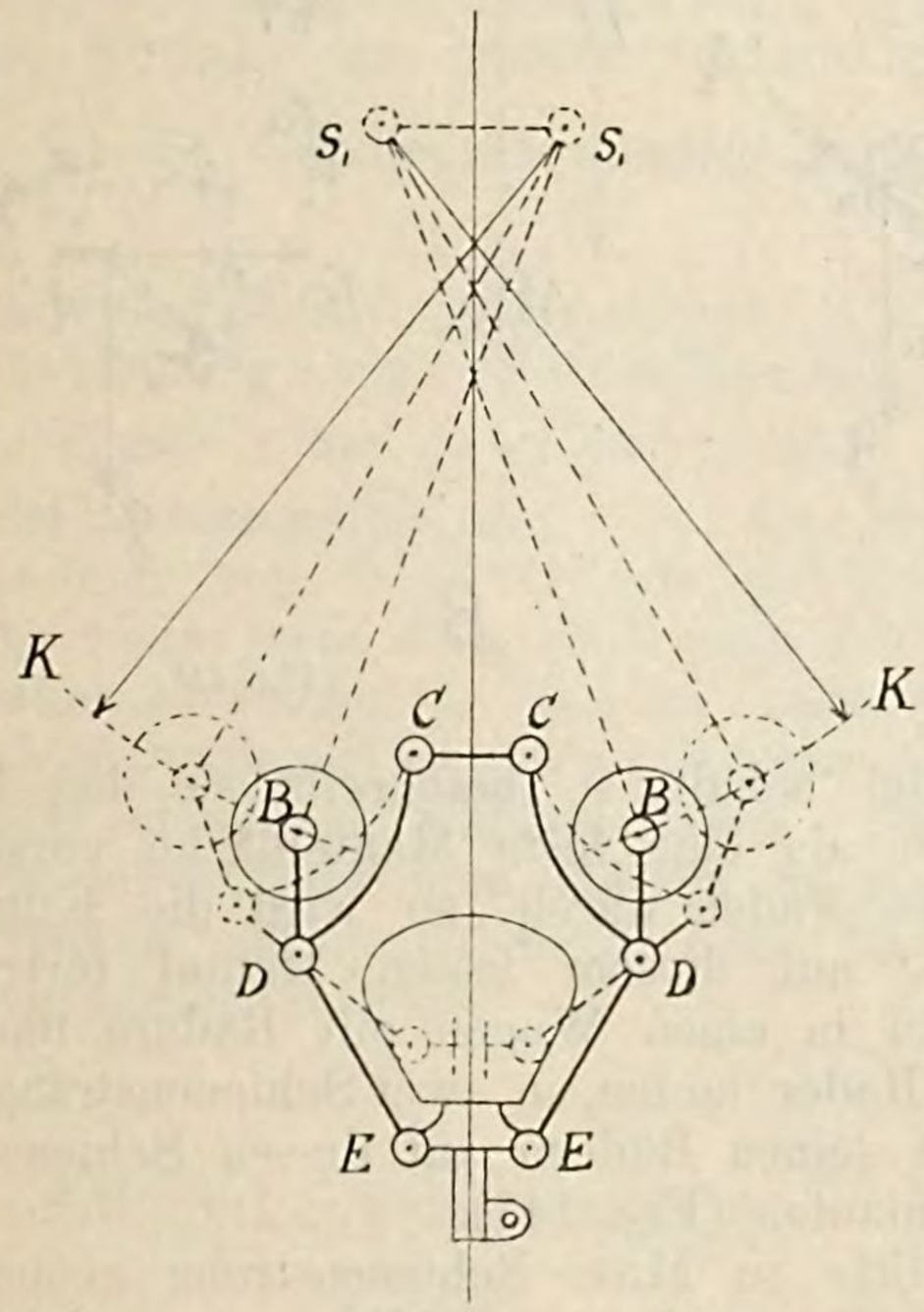


Fig. 138.

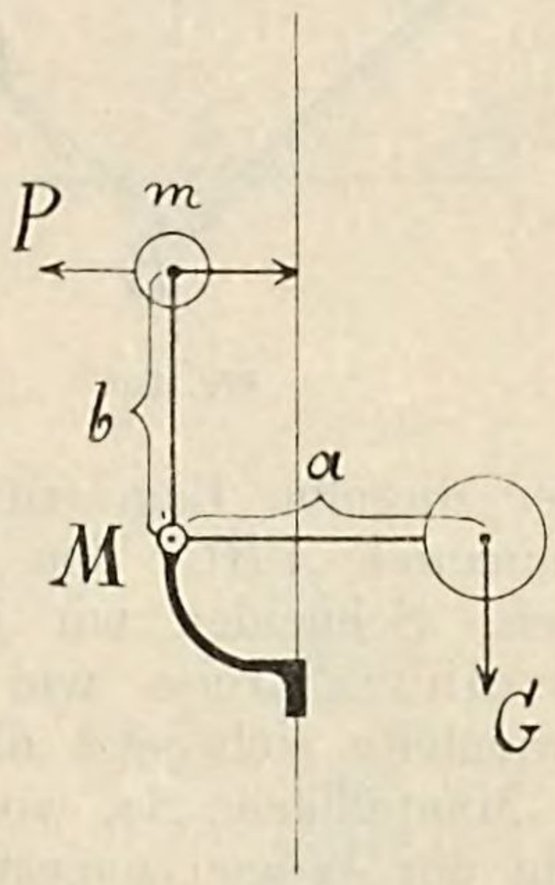


Fig. 139.

Die Fig. 139 stellt einen der beiden Winkelhebel des Buss'schen Regulators dar. Das statische Moment für M als Drehachse ist:

$$Ga - Pb = 0.$$

Die Ueberhöhung h des äusseren Schienenstranges in einer Eisenbahnkurve.

§ 127.

Um beim Befahren von Eisenbahnkurven das Entgleisen der Wagen und auch den Druck der Radflantschen auf den äusseren Schienenstrang zu verhüten, wird dieser höher gelegt.

Es ist die erforderliche Ueberhöhung h zu berechnen, wenn die Eisenbahnkrümmung vom Halbmesser . . . . . $r = 400$ m*)
mit einer Geschwindigkeit . . . . . $v = 18$ m in 1 Sekunde**)
befahren werden soll.

Man denke sich in der Fig. 129 unterhalb der Kugel m eine Linie AB (Fig. 140) senkrecht zu dem Faden Sm in der Ebene SMm gezogen und nehme an, dass diese Linie, von der kreisenden Kugel mitgenommen

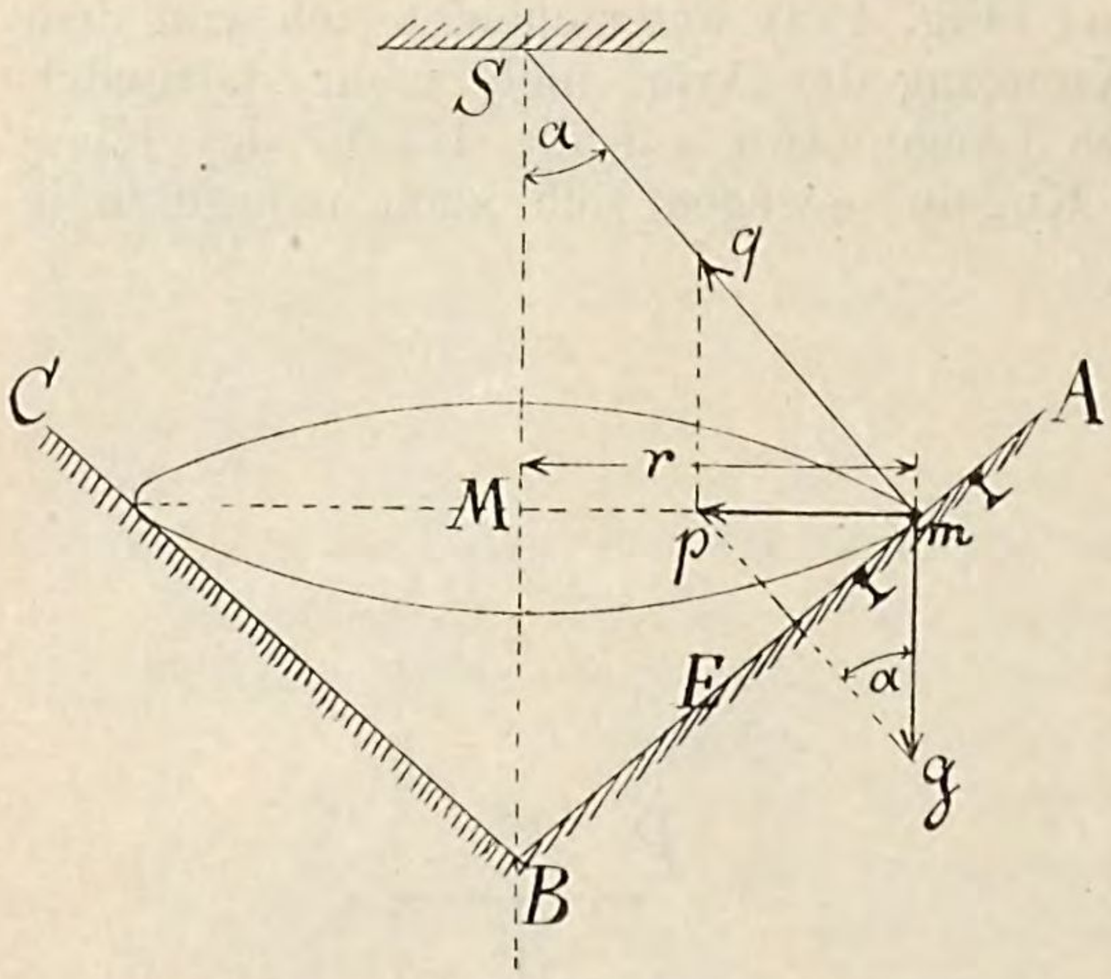


Fig. 140.

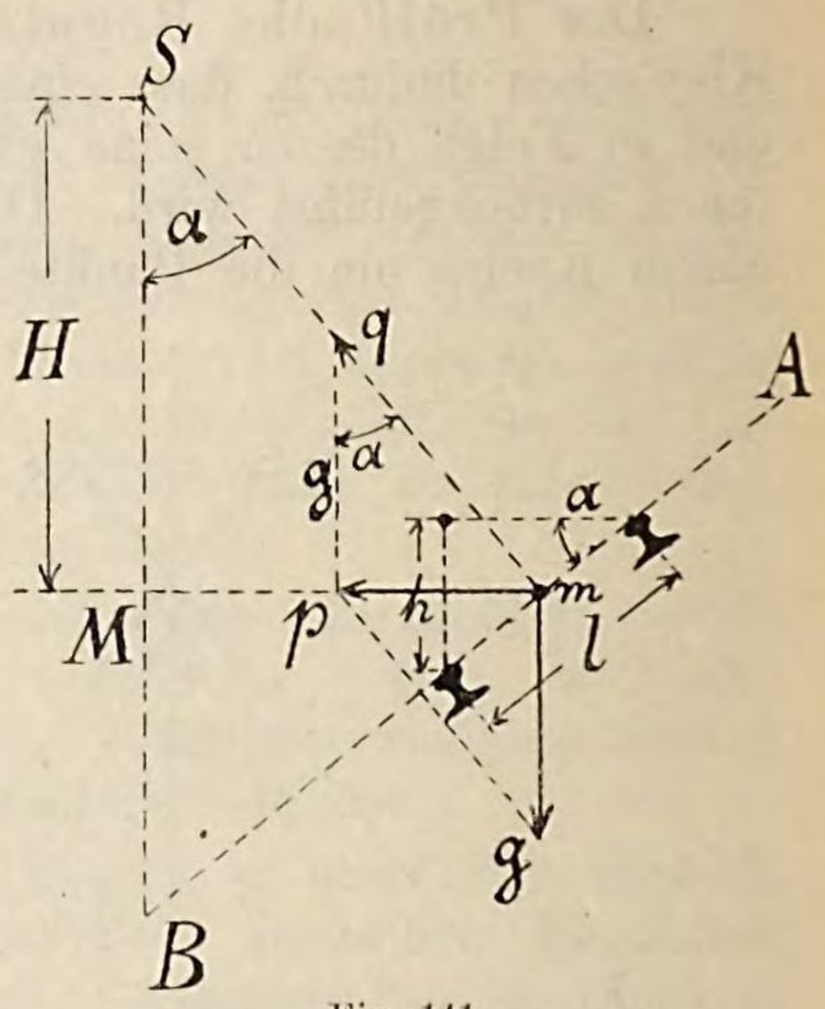


Fig. 141.

immer dieselbe Lage zum Pendel behält, so beschreibt sie den Hohlkegelmantel ABC, den wir uns als eine feste Mantelfläche vorstellen wollen. Schneiden wir jetzt den Faden durch, so wird die Kugel in demselben Kreise wie vorher auf diesem festen Mantel fortrollen. Verwandelte sich jetzt die Kugel in einen Wagen mit Rädern und die feste Mantelfläche da, wo diese Räder laufen, in zwei Schienenstränge, so würde der Wagen ungestört mit seinen Rädern auf diesen Schienen im Kreise vom Halbmesser r herumlaufen (Fig. 141).

Ist l die Spurweite (von Mitte zu Mitte Schienenstrang gemessen), a der Winkel, welchen l mit der Wagerechten einschliesst, so ergiebt sich für die erforderliche Ueberhöhung:

$$h = l \sin a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 215$$

a lässt sich bestimmen aus dem Dreiecke qpm, in welchem:

$$\operatorname{tg} a = \frac{p}{g} = \frac{v^2}{rg} = \frac{18^2}{400 \cdot 9{,}81} = 0{,}083 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 216$$

$$a = 4^0\,45'.$$

---

*) Kleinster Halbmesser auf freier Bahn für Hauptbahnen . . . $r = 180$ m,
Nebenbahnen . . . $r = 100$ m.

**) Fahrgeschwindigkeit bei Hauptbahnen höchstens 75—90 km in 1 Stunde (oder 20—25 m in 1 Sekunde) wenn $\begin{cases} \text{Neigung} \leqq \frac{1}{200} \\ r = 1000 \text{ m}, \end{cases}$
„ bei Nebenbahnen höchstens 30 km in 1 Stunde (oder 8 m in 1 Sek.).

Wird also eine Normalspur-Bahn mit der Spurweite:

$$l = 1{,}435 \text{ m}$$

angenommen, so ist:

$$h = 1{,}435 \cdot \sin(4^0\,45')$$

$$h = 0{,}119 \text{ m} = 119 \text{ mm}.$$

Dieser Werth entspricht gut dem in dem Handbuche für Bauingenieur-Mechanik von Rankine (Deutsch, Kreuter) S. 748 gegebenen Beispiele. Siehe auch Hütte 1887, S. 686. Es ist rathsam, $h < 170$ mm zu nehmen.

Für Schmalspur-Bahnen würde $l = 1{,}0$ m bis 0,75 m zu setzen sein.

Durch Hebung der äusseren und gleichzeitiger Senkung der inneren Schiene um je $\frac{h}{2}$ ist die Gesammtüberhöhung herzustellen.

Aus der Formel geht hervor:
die Ueberhöhung h muss um so grösser sein,

je kleiner r und je grösser v ist.

Selbstverständlich darf v von dem der Ermittelung von h zu Grunde gelegten Werthe weder nach oben noch nach unten wesentlich abweichen*). Bei zu geringer Fahrgeschwindigkeit in unserer Krümmung würde h schädlichen Einfluss haben. Der Wagen würde nach dem inneren Strange hin rutschen und gegen diesen einen Radflantschendruck ausüben.

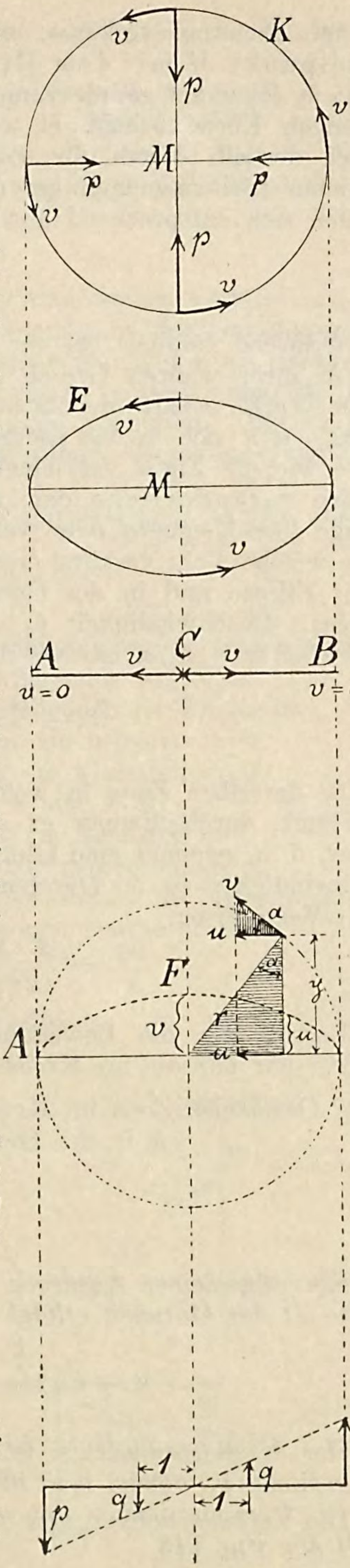


Fig. 142.

Fig. 143.

Fig. 144.

b.

Schwingungsbewegungen.

§ 128.

Dieselbe in wagerechter Ebene gedachte Kreisbahn K (Fig. 142), in welcher sich die Masse m des Centrifugalpendels (§ 118) den Huygens'schen Gleichungen 80 und 93:

$$p = \frac{v^2}{r},$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{q}}$$

entsprechend bewegt, erscheint dem seitwärts stehenden Beobachter in Bezug auf

*) Die Fahrgeschwindigkeit auf den einzelnen Punkten der Strecke wird durch den Geschwindigkeitsmesser (Finkbein & Schäfer) gemessen.

die eine Richtung verkürzt, und in Folge dessen als Ellipse E, deren Mittelpunkt M mit dem Mittelpunkte M des Kreises zusammenfällt; ja sogar als gerade Linie, wenn derselbe sein Auge in einen Punkt derjenigen Ebene bringt, in welcher die Bewegung vor sich geht. Es müssen deshalb sowohl für solche elliptischen als auch geradlinigen Bewegungen (Schwingungen um den Mittelpunkt) die Huygens'schen Gleichungen sich entsprechend anwenden lassen.

§ 129.

Während nämlich bei der Kreisbewegung die Geschwindigkeit v sich in ihrer wahren Grösse zeigt und an jeder Stelle der Bahn denselben Werth behält, demnach als eine vollkommen gleichförmige erscheint, stellt sich in den anderen Fällen die Geschwindigkeit in derselben Weise wie die Figur verkleinert, an den verschiedenen Stellen der Bahn als eine veränderliche dar; die Bewegung erscheint als eine ungleichförmige (beschleunigte oder verzögerte). Nur an denjenigen Stellen der Bahn, welche nicht verkürzt erscheinen, zeigt die Bewegung in dem Kreise, in der Ellipse und in der Geraden vollständige Uebereinstimmung. Die mittlere Geschwindigkeit v_e in der Ellipse folgt, da der Umfang der Ellipse $= (r + r_1)\,\pi$ ist, aus der Gleichung:

$$\frac{v_e}{v} = \frac{(r + r_1)\pi}{2r\pi} = \frac{r + r_1}{2r} \quad \ldots\ldots\ldots 217$$

In derselben Zeit, in welcher der Punkt die volle Kreisbahn $2r\pi$ durchläuft, durchschwingt er scheinbar hin und zurück den Kreisdurchmesser, d. h. zweimal eine Länge $2r$; demnach verhält sich die mittlere Geschwindigkeit v_m im Durchmesser zur Geschwindigkeit v im Kreise, wie diese Wege, also:

$$\frac{v_m}{v} = \frac{2 \cdot 2r}{2r\pi} = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366 \quad \ldots\ldots\ldots 218$$

Lassen wir die Bewegung in der Ellipse ausser Acht und vergleichen wir nur die im Kreise und in der Geraden miteinander:

Die Geschwindigkeit im Kreise ist überall $= v$,
„ „ u in der Geraden dagegen $= v$ im Mittelpunkte C
$=$ Null in A und B.

§ 130.

Ein allgemeiner Ausdruck für die Veränderliche u in irgend einem Punkte D der Geraden erfolgt aus der Figur 143:

$$u = v \cdot \cos a = v\,\frac{y}{r} = y\left(\frac{v}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots 219$$

Der Klammerausdruck ist eine Konstante, demnach u proportional der Ordinate y, welche man in dem betreffenden Punkte errichtet.

Die Veränderlichkeit von u wird dargestellt durch die krumme Linie AFB der Fig. 143.

Die Beschleunigung im Kreise ist überall $= p$ nach dem Mittelpunkte gerichtet,
die Beschleunigung in der Geraden dagegen $= p$ in A und B,
$=$ Null in C
die Beschleunigung in der Entfernung 1 ist $= q$ sowohl für die Kreisbewegung, als auch für die Schwingungsbewegung in der Geraden.

§ 131.

Eine bildliche Darstellung von der veränderlichen Grösse der Beschleunigung p bei der Schwingungsbewegung in der Geraden erhält man leicht, wenn man in A und B die Beschleunigungen p als Senkrechte zur Linie AB bezw. nach oben und nach unten anträgt, und die Endpunkte dieser Senkrechten durch eine Gerade verbindet. In der Entfernung 1 von C ergiebt sich die hier auftretende Beschleunigung q als Senkrechte (Fig. 144).

Die Schwingungsdauer für einen Hin- und Hergang ist wie oben:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{q}},$$

also nur abhängig von der Schwingungsbeschleunigung q; dagegen unabhängig von der Amplitude r und der schwingenden Masse m.

Besonders bemerkenswerth im Vorausgehenden ist Folgendes:
In der Mitte C ist die Geschwindigkeit am grössten $= v$
die Beschleunigung am kleinsten $= 0$
Dagegen an den Enden der Bahn in A und B ist
die Geschwindigkeit am kleinsten $= 0$
aber die Beschleunigung am grössesten $= p$.

Ganz ähnliche Bewegungsvorgänge (bei denen die Beschleunigung proportional der Entfernung von dem Schwingungsmittelpunkte ist) finden statt bei dem im Folgenden besprochenen:

Schwingungspendel.

§ 132.

Schwingungen, ähnlich denen der voranbesprochenen Art, führt eine Masse m aus, wenn man sie an einem Faden aufhängt, aus ihrer lothrechten Gleichgewichtslage bei straffgehaltenem Faden seitlich heraushebt und dann freigiebt. Sie fällt, angetrieben durch die Kraft mg, ist aber durch die Festigkeit des Fadens gezwungen, auf dem Kreisbogen AB um ihre Gleichgewichtslage C_1 hin und herzuschwingen.

Solche Vorrichtung entspricht um so mehr einem mathematischen Schwingungspendel, je mehr der Faden als gewichtslos und die Masse als materieller Punkt angesehen werden kann.

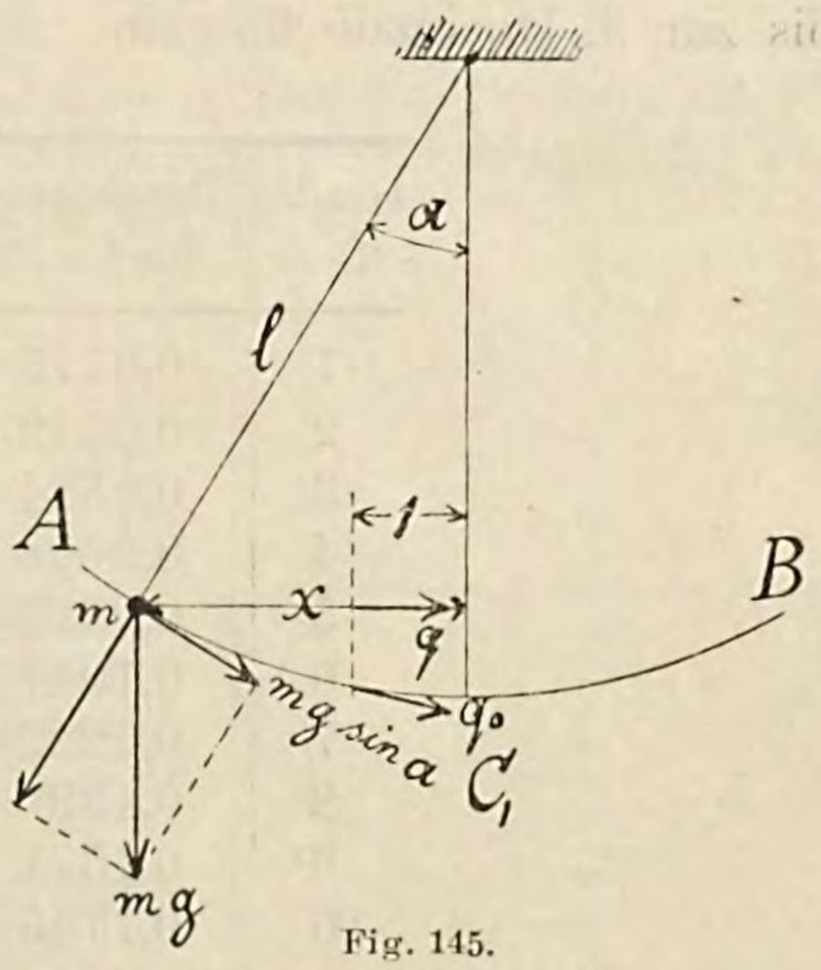


Fig. 145.

Für den Elongationswinkel a ist die in die Bewegungsrichtung fallende Kraft:

$$mg \cdot \sin a = \left(mg \cdot \frac{1}{l}\right) x$$

bezw. die Beschleunigung:

$$g \cdot \sin a = \left(\frac{g}{l}\right) x. \qquad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 220$$

Es ist also auch hier die Beschleunigung proportional x, dem Abstande von der Gleichgewichtslage C_1 und wäre in der Entfernungs-Einheit:

$$q_0 = \frac{g}{l} \cdot 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 221$$

Während jedoch hier die Schwingungsbewegung in einem Kreisbogen erfolgt, fand sie oben in einer Geraden statt, welche als Sehne jenes Kreisbogens angesehen werden kann.

Ist die Pendelschwingung so klein, dass der Bogen mit der Sehne zusammenfallend, bezw. $q_0 = q$ (Fig. 145), angesehen werden kann, so gilt auch hier obige Gleichung:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{q}},$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ (Doppelschwingung)} \qquad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 222$$

und:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ (einfache Schwingung)}$$

für das einfache mathematische Schwingungspendel. Wie aus hierunterstehender Tabelle hervorgeht, stimmen die Länge des Bogens und der Sehne noch für den Winkel

$$2a = 10^0$$

bis zur 3. Decimale überein. a heisst der Elongationswinkel.

Grade $2 \cdot a$	Bogenlänge für $l = 1$	Sehnenlänge für $l = 1$	Bogenhöhe h für $l = 1$
1	0,0175	0,0175	0,0000
2	0,0349	0,0349	0,0002
3	0,0524	0,0524	0,0003
4	0,0698	0,0698	0,0006
5	0,0873	0,0873	0,0010
6	0,1047	0,1047	0,0014
7	0,1222	0,1221	0,0019
8	0,1396	0,1395	0,0024
9	0,1571	0,1569	0,0031
10	0,1745	0,1743	0,0038

§ 133.

Die früher (§ 119) für das Centrifugalpendel abgeleitete Gleichung und die für das Schwingungspendel (Gleichung 222) gefundene stimmen überein für:

$$H = l.$$

Das heisst in Worten: In derjenigen Zeit, in welcher das Centrifugalpendel der nebenstehenden Figur einen vollen Umlauf ausführt, schwingt das Schwingungspendel einmal hin und zurück. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass die Gleichung für das Centrifugalpendel mathematisch genau ist, während die für das Schwingungspendel als eine angenäherte, nur für sehr kleine Schwingungen gilt.

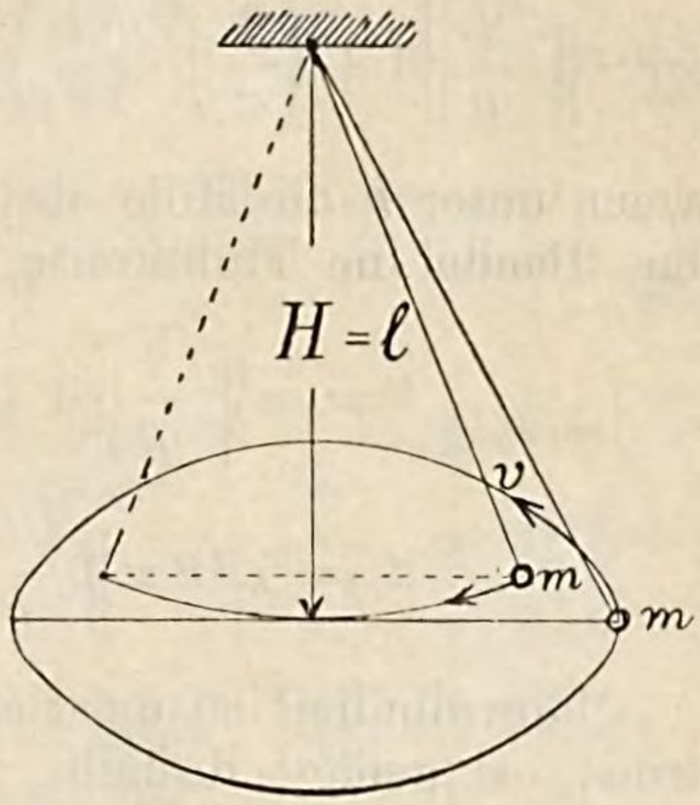


Fig. 146.

§ 134.

Für beide Pendel gelten folgende Sätze:

1. Die Schwingungsdauer t ist nur abhängig von l bezw. H und von der Erdacceleration g des Beobachtungsortes; nicht aber von der Schwingungsweite.
2. t ist unabhängig von dem Gewichte und der Substanz der Pendelkugel. Daraus schliessen wir, dass alle Körper gleich schnell fallen, da die Pendelbewegung eine Folge des Fallbestrebens ist.
3. Nach der Gleichung:

$$g = \frac{\pi^2}{t^2} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 223$$

lässt sich die Erdacceleration bestimmen, wenn man l und t durch direkte Beobachtung ermittelt hat.

l, die Länge des mathematischen, also gedachten Pendels ist für ein ausgeführtes Pendel durch Umhängen (Reversionspendel von Bohnenberger und Kater) zu bestimmen (§ 287).

4. Die Länge:

$$l = \frac{g}{\pi^2} t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224$$

muss ein Pendel haben, welches an einem Orte, für welchen die Beschleunigung g ist, t Sek. auf eine Schwingung verwenden soll.

Die Länge des Sekundenpendels ist für $g = 9{,}81$ m

$$L = \frac{9{,}81}{(3{,}14)^2} = 0{,}994 \text{ m} \quad . \quad . \quad 225$$

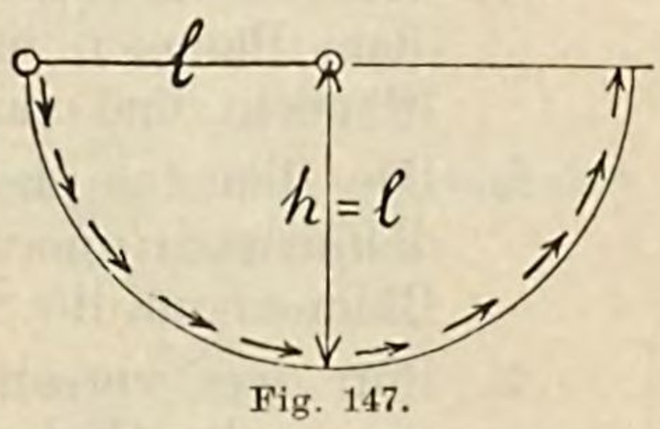


Fig. 147.

Die Schwingungsdauer für grössere Oscillationen ist:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2l}\right)^1+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2l}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2l}\right)^3+\ldots\right] \quad 226$$

wenn unter h die Höhe des Schwingungsbogens verstanden wird. Schwingt das Pendel im Halbkreise, so ist $h = l$:

$$\left.\begin{aligned} t &= \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{8}+\frac{9}{256}+\frac{225}{18432}+\ldots\right] \\ t &= 1{,}18\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 227$$

Gewöhnlich ist der Schwingungsbogen erheblich kleiner als der Halbkreis, es genügt deshalb, wenn die ersten beiden Glieder berücksichtigt und die übrigen Glieder vernachlässigt werden, also gerechnet wird nach der Formel:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{h}{8l}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 228$$

Z. B. würde nach unserer obigen kleinen Tabelle für:

$$2a = 10^0$$
$$h = 0{,}0038\,l,$$

also die Schwingungsdauer:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{0{,}0038}{8}\right]=1{,}000475\cdot\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \quad 229$$

sein. (Das physische Pendel ist im § 287 behandelt.)

IV.

Kepler's Gesetze.

§ 135.

Auch die drei Gesetze, welche Kepler (1571—1630) bereits vor Huygens (1629—1695) nach zwanzigjährigem, unermüdlichem Forschen auf empirischem Wege, ohne Differentialrechnung und ohne analytische Geometrie entdeckt hatte, und die nach ihm benannt die Grundlage der theoretischen Astronomie bilden, beziehen sich auf krummlinige Bewegungen, nämlich auf die Bewegungen der Planeten um die Sonne. Sie heissen:

1. Die von dem Fahrstrahle (d. i. von der Verbindungslinie zwischen dem Planeten und der Sonne) in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen sind einander gleich.
2. Die Planeten bewegen sich (nicht in Kreisbahnen, wie man bis dahin nach Copernikus [1473—1543] annahm, sondern) in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche in dem einen Brennpunkte steht.
3. Für zwei verschiedene Planeten verhalten sich die zweiten Potenzen der Umlaufszeiten (t^2, t^2_1), wie die dritten Potenzen ihrer

mittleren Entfernungen (r^3, $r^3{}_1$), von der Sonne. Dieses dritte Gesetz ist ausgedrückt durch die mathematische Beziehung:

$$\frac{t^2}{t_1{}^2} = \frac{r^3}{r_1{}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 230$$

oder:

$$t = t_1 \sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 231$$

Diese excentrischen Bewegungen erfolgen nach einem ganz anderen Gesetze, wie die oben besprochenen Centralbewegungen.

§ 136.

Sind für einen Planeten, z. B. die Erde, $t_1 = 1$ Jahr und $r_1 = 20\,000\,000$ Meilen gegeben, so lässt sich vermittelst der letzten Gleichung für jeden anderen Planeten, z. B. den Jupiter, die Umlaufszeit t ermitteln, wenn dessen mittlere Entfernung r von der Sonne bekannt ist.

In der nebenstehenden Figur sind für unsere Planeten die mittleren Entfernungen von der Sonne in Millionen Meilen angegeben.

Ein Meisterstück der Astronomie muss hier zur Sprache gebracht werden: Leverrier berechnete 1846 aus den Störungen (plötzlichen Bewegungsveränderungen) des Uranus den bis dahin noch völlig unbekannten Neptun so genau, dass Gall, durch diese Rechnungen geleitet, den genannten Planeten an dem genau festgestellten Orte aufsuchte und entdeckte.

Beispiel 62: Mit Hülfe unserer Gleichung ergiebt sich:

Die Umlaufszeit des Jupiter:

$$t = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{104\,000\,000}{20\,000\,000}\right)^3} = 12 \text{ Jahre},$$

die Umlaufszeit des Neptun:

$$t = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{600\,000\,000}{20\,000\,000}\right)^3} = 164 \text{ Jahre},$$

die Umlaufszeit des Merkur:

$$t = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{8\,000\,000}{20\,000\,000}\right)^3} = \sim \frac{1}{4} \text{ Jahr}.$$

Die elliptischen Planetenbahnen sind angenäherte Kreisbahnen.

Bezeichnen wir mit v und v_1 die mittleren Umlaufsgeschwindigkeiten zweier Planeten um die Sonne und setzen beziehungsweise:

$$\left.\begin{aligned} 2r\pi &= vt, \\ 2r_1\pi &= v_1 t_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 232$$

Fig. 148.

so folgt mit Rücksicht auf das dritte Kepler-Gesetz:

$$\left(\frac{2r\pi}{2r_1\pi}\cdot\frac{v_1}{v}\right)^2=\left(\frac{r}{r_1}\right)^3,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{v}{v_1}\right)^2&=\frac{r_1}{r},\\ v&=v_1\sqrt{\frac{r_1}{r}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad 233$$

Die vorletzte Gleichung sagt in Worten:

Die Quadrate der Umlaufsgeschwindigkeit der Planeten verhalten sich umgekehrt wie die mittleren Entfernungen von der Sonne.

Beispiel 63: Mit Hülfe der letzten Gleichung lässt sich die mittlere Umlaufsgeschwindigkeit der einzelnen Planeten berechnen. Wenn für die Erde $v_1 = 4$ Meilen angenommen wird, so ist:

Für den Jupiter: $v=4\sqrt{\frac{20}{104}}=1{,}8$ Meilen.

„ „ Neptun: $v=4\sqrt{\frac{20}{600}}=0{,}73$ Meilen.

„ „ Merkur: $v=4\sqrt{\frac{20}{8}}=6{,}3$ Meilen.

V.

Das Kepler-Huygens'sche

oder

Newton'sche Gravitationsgesetz.

§ 137.

Die durch Beobachtung gefundenen Gesetze von Kepler und Huygens sind die Grundlage des Newton'schen Gesetzes.

Aus jenen Gesetzen, insbesondere aus dem dritten Kepler'schen Gesetze leitete der scharfsinnige Newton das nach ihm benannte, für alle Zeiten berühmte Gesetz der allgemeinen Schwere, oder das sogen. Gravitationsgesetz, durch richtig gezogene Schlussfolgerungen ab.

In seinem Briefe an Halley 1686 gestand Newton selbst zu, dass er sein Gesetz aus den Kepler'schen Gesetzen abgeleitet habe. Deshalb hat sich der Verfasser nicht weiter bedacht, das Gesetz, das meist allein Newton zugeschrieben wird, auch das „Kepler-Huygens'sche" zu nennen.

Nach Kepler ist (Gleich. 233):

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2=\frac{r}{r_1},$$

nach Huygens (Gleich. 80):

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = \frac{p_1 r_1}{p \cdot r}.$$

Hiernach folgt:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{p_1 r_1}{p \cdot r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 234$$

oder:

$$p = (p_1 {r_1}^2) \cdot \frac{1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 235$$

In dieser Gleichung, die schon als Ausdruck des Newton'schen Gesetzes angesehen werden könnte, bedeuten r und r_1 die mittleren Bahnhalbmesser zweier Planeten, p und p_1 ihre nach dem Anziehungsmittelpunkte, der Sonne, hingerichteten Beschleunigungen. Multipliciren wir zunächst beide Seiten der Gleichung mit m, der Masse des Planeten, auf den sich p und r beziehen, so folgt:

$$mp = (p_1 {r_1}^2) \cdot \frac{m}{r^2}$$

oder, wenn man auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit S, der Sonnenmasse multiplicirt:

$$mp = \left(\frac{p_1 {r_1}^2}{S}\right) \frac{m \cdot S}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 236$$

Der Klammerausdruck hat für alle Planeten denselben Werth. Es soll dafür eingeführt werden:

$$k = \frac{p_1 {r_1}^2}{S} = \frac{p_2 {r_2}^2}{S} = \frac{p_3 {r_3}^2}{S} \quad \ldots \quad 237$$

dann erfolgt, da noch $mp = P$ ist:

$$mp = P = k \frac{mS}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad 238$$

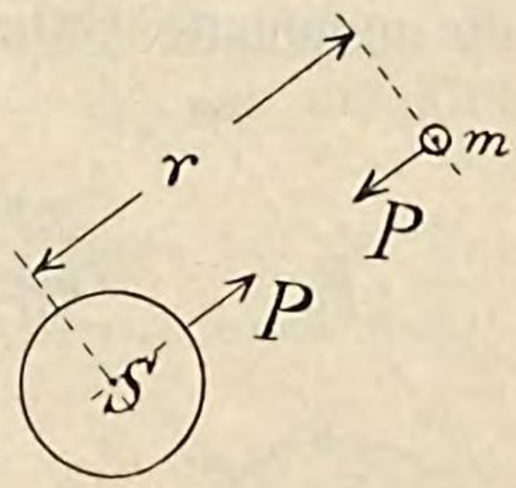


Fig. 149.

So schloss Newton, dass die Anziehungskraft P zwischen einem Planeten und der Sonne eine wechselseitige sei und sich umgekehrt verhalte wie das Quadrat der Entfernung r beider voneinander.

Newton prüfte nun sein Gesetz an den Bewegungsvorgängen anderer Himmelskörper, so der Kometen, ferner an den Bewegungen der Monde um ihre Planeten und fand es überall bestätigt. Hiernach glaubte er sich zu dem Schlusse berechtigt, dass sein Gesetz überhaupt das allgemeine Gesetz sei, nach welchem zwei Massen m und M aufeinander einwirken.

Das Newton'sche sogen. Gravitationsgesetz oder das Gesetz der allgemeinen Schwere hat dann die allgemeine Fassung:

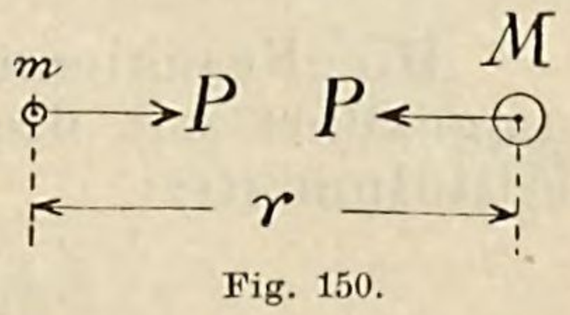


Fig. 150.

$$\boxed{P = k \frac{m \cdot M}{r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 239$$

und heisst in Worten:

Zwei Massen m und M, deren Mittelpunkte sich in der Entfernung r voneinander befinden, scheinen sich gegenseitig anzuziehen mit einer Kraft P, die sich verhält wie das Produkt aus den beiden Massen, aber umgekehrt wie das Quadrat ihrer Entfernungen.

In der Gleichung bedeutet k die Gravitationseinheit, d. i. diejenige Kraft, mit der sich zwei Masseneinheiten:

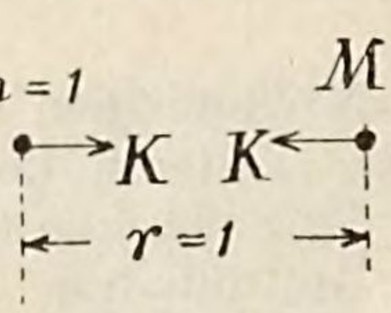


Fig. 151.

$m = 1, \quad M = 1$ in der Entfernung: $r = 1$

anziehen; denn hierfür ist:

$$P = k \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 240$$

Abhängigkeit der Erdbeschleunigung g oder des Gewichtes G von der Entfernung R vom Erdmittelpunkte.

§ 138.

Auf einen ausserhalb gelegenen Körper m wirkt die Erde so, als ob die gesammte Erdmasse E in dem Erdmittelpunkte vereinigt wäre. Aehnliches gilt für alle Himmelskörper. Dann ist nach dem Newton'schen Gesetze für die Masse an der Erdoberfläche, d. i. in der Entfernung des Erdradius r:

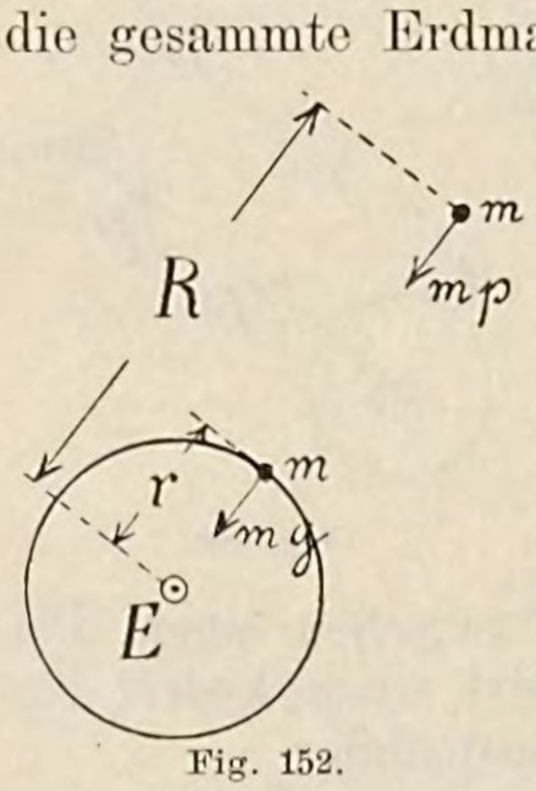


Fig. 152.

$$m \cdot g = k \frac{mE}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 241$$

dagegen in der Entfernung R vom Erdmittelpunkte:

$$m \cdot p = k \frac{mE}{R^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242$$

folglich verhält sich:

$$\boxed{\frac{m \cdot p}{m \cdot g} = \frac{p}{g} = \frac{r^2}{R^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 243$$

In Worten:

Die Beschleunigungen, bezw. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen von dem Erdmittelpunkte.

§ 139.

Beispiel 64: Auf dem Gipfel des höchsten Berges, dessen Erhebung über dem Meeresspiegel zu 8000 m angenommen werde, würde die Erdbeschleunigung betragen:

$$p = \frac{6\,370\,000^2}{6\,378\,000^2}\, g$$

$$= 0{,}9975 \cdot g = 0{,}9975 \cdot 9{,}81 = 9{,}7854 \text{ m} \quad . \quad 244$$

also nur rund $9{,}81 - 9{,}7854 = 0{,}025$ m $= 25$ mm geringer sein als am Meeresspiegel.

Für gewöhnliche Fälle ist demnach bei Gewichtsbestimmungen auf die Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkte keine Rücksicht zu nehmen; dagegen bei genauen Bestimmungen ist eine „Reduktion des Gewichtes auf den Meeresspiegel“ mit Hülfe obiger Formel vorzunehmen. Später werden wir sehen, dass unter anderem auch die geographische Lage (§ 145), und der Auftrieb (Mech. d. flüssigen Körper) zu berücksichtigen sind.

§ 140.

Beispiel 65: Bestimmung der Erdbeschleunigung p in einer Entfernung von der Erde gleich der Mondentfernung. Die Entfernung des Mondes von dem Erdmittelpunkte ist:

$$R = 60 \text{ Erdradius;}$$

folglich:

$$p = \frac{r^2}{(60 \cdot r)^2}\, g = \frac{1}{3600} \cdot 9{,}81 = 0{,}0027 \text{ m} = 2{,}7 \text{ mm} \quad . \quad 245$$

Hätte der Mond nicht eine Eigenbewegung auf seiner Bahn um die Erde, so würde er mit der Anfangsbeschleunigung $p = 2{,}7$ mm unmittelbar der Erde zufallen. (Siehe auch Gleich. 100.)

Nach Kepler würde bei gegenseitiger Annäherung des Mondes und der Erde der erstere $\frac{53}{54}$ des Weges, dagegen die Erde ihrer grösseren Masse wegen nur $\frac{1}{54}$ des Weges zurücklegen.

§ 141.

Beispiel 66: Bestimmung der Sonnenbeschleunigung g_s. Mit Hülfe der Newton'schen Formel lässt sich auch die Beschleunigung des freien Falles für irgend einen anderen bekannten kugelförmigen Weltkörper, z. B. für die Sonne finden:

Ist die Masse der Sonne . . . . . $= S$,
der Halbmesser der Sonnenkugel . . . . . $= R$,

so gilt für einen an der Sonnenoberfläche befindlichen Körper von der Masse m:

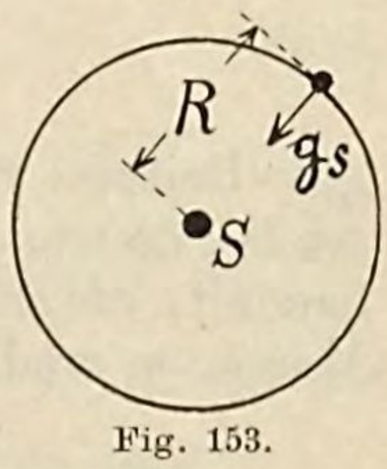


Fig. 153.

$$m \cdot g_s = k \frac{mS}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 246$$

wenn mit g_s die Sonnenbeschleunigung bezeichnet wird.

Für dieselbe Masse m an der Erdoberfläche ist nach Gl. 241:

$$m \cdot g = k \frac{mE}{r^2}.$$

Durch Division ergiebt sich:

$$\frac{g_s}{g} = \frac{S}{E} \cdot \frac{r^2}{R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 247$$

Nun ist aber: . . . . . $S = 320\,000 \cdot E$,

$R = 108 \cdot r$;

folglich:

$$\left.\begin{aligned} g_s &= \frac{320\,000\ E}{E} \cdot \left(\frac{r}{108\,r}\right)^2 g \\ g_s &= 27{,}4 \cdot g = 27{,}4 \cdot 9{,}81 = \text{rund } 269 \text{ m.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 248$$

Die Beschleunigung an der Sonnenoberfläche ist danach etwa 27 mal grösser als an der Erdoberfläche. Demnach würde bei der Wägung mittelst einer Federwage derselbe Körper an der Sonnenoberfläche ein 27 mal grösseres Gewicht als an der Erdoberfläche zeigen.

§ 142.

Beispiel 67: Die Mondbeschleunigung g_m folgt nach der Gleichung:

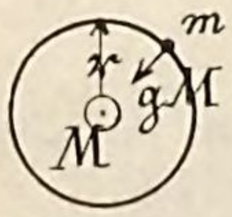


Fig. 154.

$$\frac{g_m}{g} = \frac{M}{E}\,\frac{r^2}{R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 249$$

oder da . . . . . $M = \frac{1}{80}\,E$,

$R = 0{,}273 \cdot r$,

$$g_m = \frac{1}{5{,}96} \cdot g = 0{,}16 \cdot g \quad \ldots \ldots \ldots \quad 250$$

Es verhalten sich danach die Beschleunigungen an der Oberfläche des

Mondes, der Erde, der Sonne

oder:

	g_m	:	g	:	g_s
wie	1,6 m	:	9,81 m	:	269 m.

§ 143.

Beispiel 68: Bestimmung der Erdmasse. Man hat durch zahlreiche, genau angestellte Versuche (von denen die Physik eingehend handelt) die Kraft K unmittelbar gemessen, mit der sich zwei bekannte Massen m und M in der Entfernung ϱ anziehen, dann ist in der Gleichung:

$$K = k\,\frac{m \cdot M}{\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 251$$

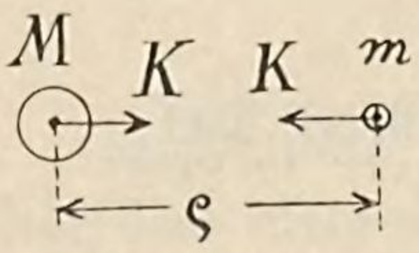


Fig. 155.

nur die Grösse k unbekannt. Bezeichnet man nun mit G das ermittelte Gewicht der Masse m in der Entfernung r vom Erdmittelpunkte; ferner mit E die gesuchte Erdmasse, so ist ebenfalls nach Newton's Gesetz (Gleichung 241, Fig. 152):

$$mg = G = k\frac{m \cdot E}{r^2};$$

durch Division der beiden Gleichungen folgt:

oder:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K}{G} &= \frac{M}{E}\frac{r^2}{\varrho^2} \\ E &= \frac{G}{K}M\frac{r^2}{\varrho^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 252$$

Durch Einsetzung der bekannten Werthe der rechten Seite der Gleichung fand man als Erdmasse:

$$E = 6\,100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ kg};$$

darnach würde wiegen 1 Kubikmeter Erdmasse etwa:

$$\frac{Erdgewicht}{Erdvolumen} = \frac{E}{V} = 5600 \text{ kg} \quad \ldots\ldots \quad 253$$

oder das specifische Gewicht des Erdkörpers im Mittel betragen in Bezug auf Wasser

$$s = 5{,}6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 254$$

Genauere Angaben bringt die Physik.

§ 144.

Beispiel 69: Bestimmung der Gravitationseinheit k aus der Gleichung:

$$mg = G = k\,\frac{mE}{r^2}$$

folgt:

$$\left.\begin{aligned} g &= k\,\frac{E}{r^2} \\ k &= \frac{r^2}{E}\,g = \frac{6\,370\,000^2 \cdot 9{,}81}{E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 255$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} k &= 0{,}000\,000\,000\,65256 \text{ kg} \\ k &= 0{,}000\,65256 \text{ Milligramm} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 256$$

Mit dieser ungemein geringen Kraft ziehen sich demnach zwei Massen von je 1 kg, die sich in der Entfernung von 1 m befinden, gegenseitig an.

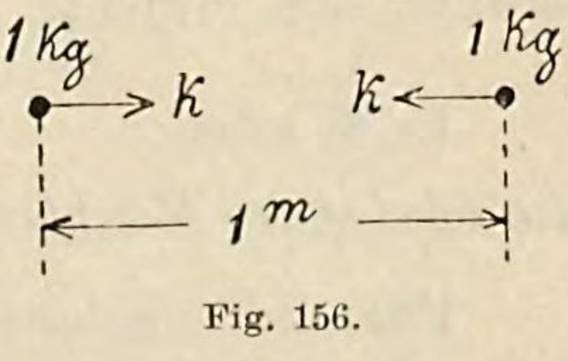


Fig. 156.

VI.

Aenderung des Gewichtes G, bezw. der Erdbeschleunigung g mit der geographischen Breite φ, in Folge der Drehung der Erde um ihre Achse.

Einleitende Bemerkungen. Dieser Absatz VI bildet den Schlussstein unseres „Zweiten Abschnittes“ und greift zugleich noch einmal tief in den

ersten Absatz dieses Abschnittes ein, indem er nun Genaueres über eine der Grössen der dort eingeführten wichtigsten Grundgleichungen der Technik:

$$G = mg$$

bringt.

§ 145.

Angenommen die Erde drehte sich nicht um ihre Achse, so würde am Aequator im Meeresspiegel für einen Körper von der Masse m das wahre Gewicht $= m \cdot p$ sein, wenn p die Erdbeschleunigung an dieser Stelle ist. mp ist die Anziehungskraft, mit welcher die Erde den Körper nach dem Erdmittelpunkte zieht. Mit dieser Kraft würde er auf seine Unterlage drücken (d. h. dieses Gewicht würde er zeigen), wenn die

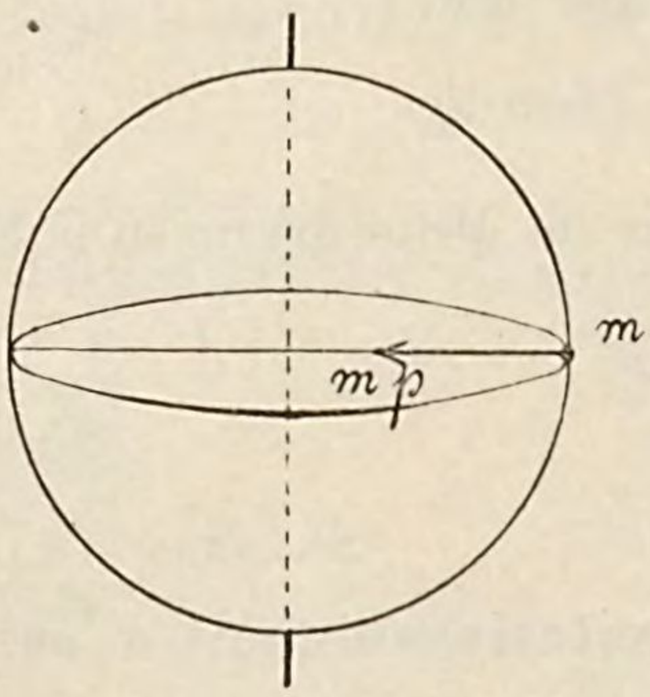


Fig. 157.

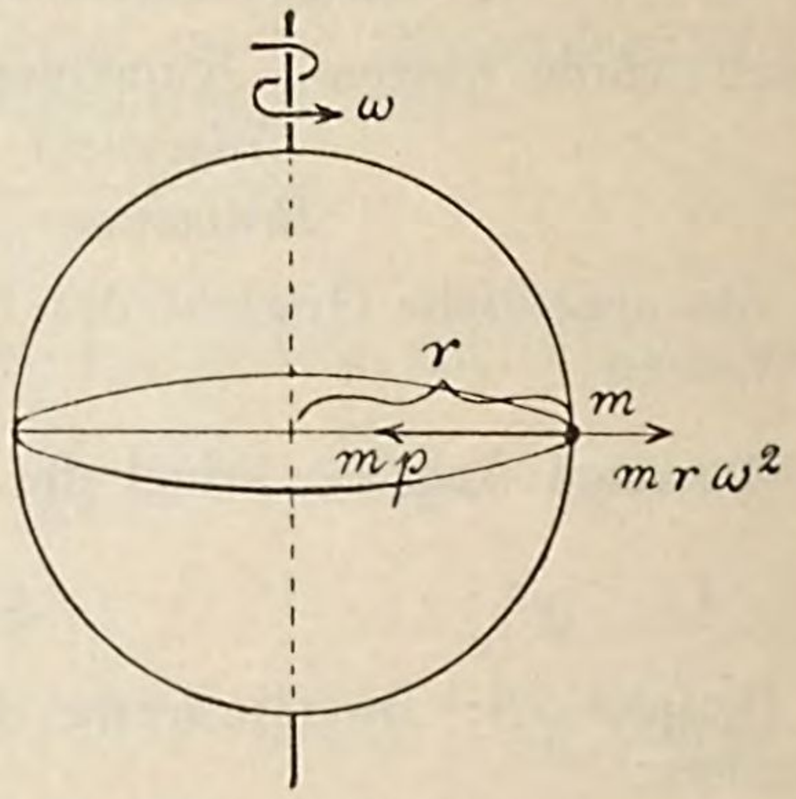


Fig. 158.

Erde eben sich nicht drehte. Derselbe Druck mp würde auch überall am Meeresspiegel herrschen, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre. Nun dreht sich aber die Erde um ihre Achse mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit w. Es wird also die dieser Drehung entsprechende Centrifugalkraft . . . . . mrw^2
den Körper vom Mittelpunkte der Erde zu entfernen suchen. Was wir thatsächlich als Gewicht beobachten und messen, ist demnach ein Scheingewicht, nämlich:

$$mg_0 = mp - mrw^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 257$$

woraus sich ergiebt:

$$g_0 = p - rw^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 258$$

In Worten:

die scheinbare Beschleunig. = wahre Beschleunig. — Centrifugalbeschleunig.

Für die scheinbare Beschleunigung am Aequator ist durch Pendelversuche ermittelt:

$g_0 = 9{,}7806$ m im luftleeren Raume am Meeresspiegel . . 259

Beispiel 70: Durch Berechnung lässt sich die Centrifugalbeschleunigung finden:

Für den Erdhalbmesser $r =$ . . . . . 6 370 000 m,

und die Zeit einer vollen Erd-Umdrehung $T = 23$ St. 56 Min. 4 Sek. $= 86164$ Sek. ist $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}00007292$ m 260

$rw^2 = 6370000 \cdot 0{,}00007292^2 = 0{,}0338$ m 261

(oder nach Gl. 259) $= \frac{0{,}0338}{9{,}7806} g_0 = \frac{1}{289} g_0$ 262

Die wahre Beschleunigung (bei stillstehend gedachter Erde) am Aequator im Meeresspiegel würde demnach nach Gleichung 258 sein:

$$\left.\begin{aligned} p &= g_0 + rw^2 \\ &= 9{,}7806 + 0{,}0338 = 9{,}8144 \text{ m.} \end{aligned}\right\} \quad . . . . . 263$$

Die wahre Beschleunigung ist sonach noch nicht ganz:

$$0{,}034 \text{ m} = 34 \text{ mm} = \frac{1}{289} g_0 \quad . . . . . 264$$

grösser als die scheinbare, also durch Versuche unmittelbar beobachtete Beschleunigung.

Gehen wir nun vom Aequator aus nach einem anderen Orte der Erdoberfläche (des Meeresspiegels), welcher die geographische Breite φ haben mag. Hier wirken auf unsere Masse m wieder zwei Kräfte, nämlich:

das wahre Gewicht wie oben . . . . . mp,

wenn wir zunächst die Erde als vollkommene Kugel ansehen;

und die senkrecht zur Erdachse (Drehachse) gerichtete

Centrifugalkraft . . . . . myw^2

Die Mittelkraft aus beiden ist der Grösse und Richtung nach das scheinbare Gewicht mg_φ der Masse, also dasjenige Gewicht welches wir bei unseren ausgeführten Wägungen beobachten.

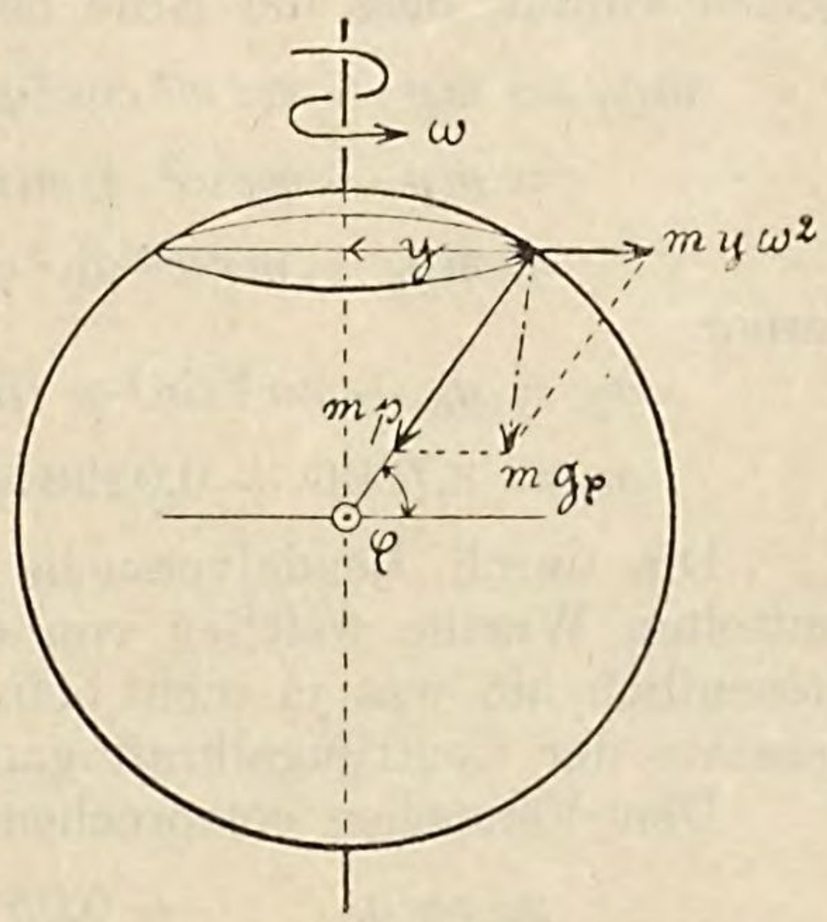


Fig. 159.

Die Figur zeigt, dass mg_φ (zwar grösser ist als mg_0, aber doch auch hier noch) kleiner als das wahre Gewicht mp und zudem in Folge der Erddrehung nicht genau nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist. Nur an den Polen (für $\varphi = 90^0$) würde das beobachtete Gewicht $mg_{90} = mp$ sein, weil hier für $y = o$ der Einfluss der Centrifugalkraft Null ist, und auch ebenso wie am Aequator, genau nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sein.

Hiermit sind wir zunächst zu dem allgemeinen Ergebnisse gekommen, dass durch Achsendrehung der Erde in allen Breiten $\varphi > 0$, $\varphi < 90^0$ nicht allein das Fallbestreben vermindert, sondern auch die Fallrichtung verändert wird.

Eine Beziehung zwischen g_φ und g_0 erhält man noch auf folgende Weise:

Man zerlege nach Fig. 160 die Centrifugalkraft:

$$my w^2 = mr \cos\varphi\, w^2$$

in die radialgerichtete Komponente:

$$= mr w^2 \cos^2\varphi$$

und in die tangentialgerichtete Komponente:

$$= mr w^2 \cos\varphi \sin\varphi,$$

so folgt zunächst, dass erstere die Grössenveränderung, letztere die Richtungsveränderung des Gewichtes hervorruft und die Abplattung der Erde bewirkt hat.

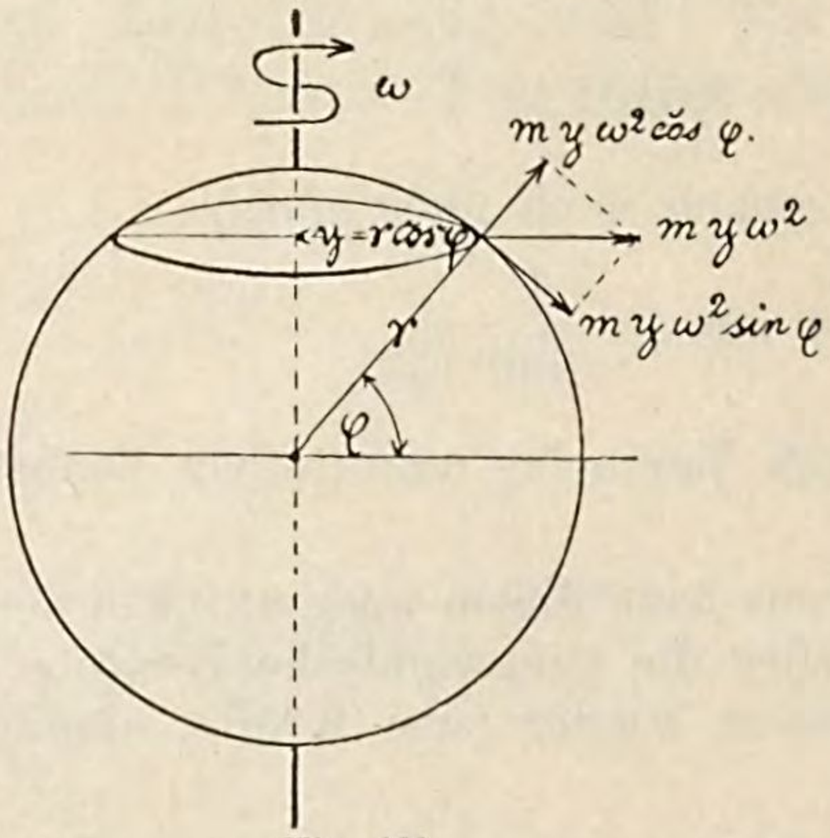


Fig. 160.

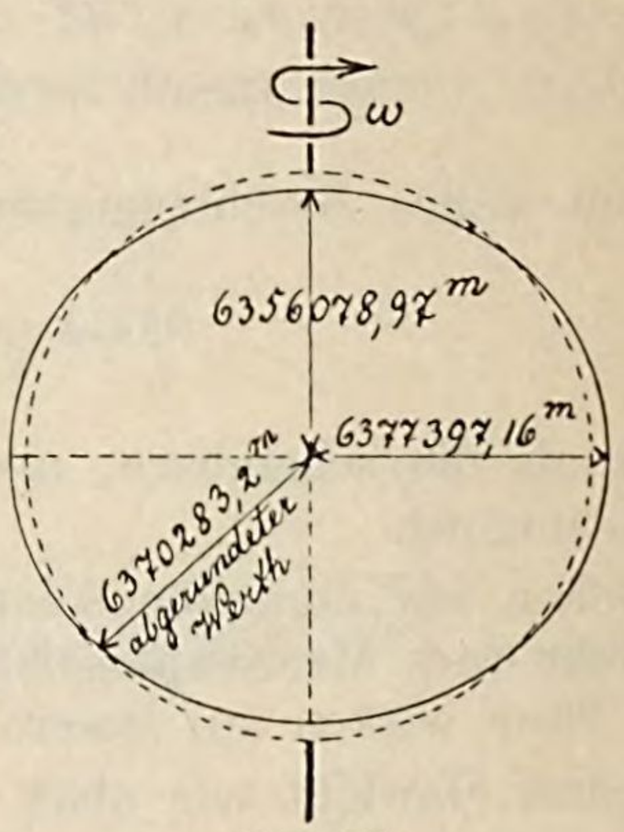


Fig. 161.

Die in der Figur 161 eingeschriebenen Zahlen sind die von Bessel in Toisen angegebenen, von Prediger in Meter umgerechneten Werthe und etwas abweichend von den Enke'schen.

Sehen wir zunächst von dem tangentialgerichteten Antheile ab und setzen voraus, dass die Erde eine vollkommene Kugel ist, so gilt:

$$\begin{aligned} mg_\varphi &= mp - mrw^2\cos^2\varphi = mp - mrw^2(1 - \sin^2\varphi), \\ &= mp - mrw^2 + mrw^2\sin^2\varphi, \text{ (oder nach Gl. 257)}, \\ &= mg_0 + mrw^2\sin^2\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 265 \end{aligned}$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} g_\varphi &= g_0 + rw^2\sin^2\varphi \text{ (oder nach Gl. 261)} \\ g_\varphi &= 9{,}7806 + 0{,}0338\sin^2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 266$$

Die durch Pendelversuche in den verschiedenen Breitengraden ermittelten Werthe weichen von den durch die letzte Formel berechneten wesentlich ab, was ja nicht befremden kann, da wir die tangentiale Komponente der Centrifugalkraft ganz vernachlässigt haben.

Den Versuchen entsprechende Werthe giebt die verbesserte Formel:

$$\left.\begin{aligned} g_\varphi &= g_0 + 0{,}0506\sin^2\varphi, \\ g_\varphi &= 9{,}7806 + 0{,}0506\sin^2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 267$$

Biot fand mit Rücksicht auf lokale Verhältnisse und Unregelmässigkeiten der Gestalt der Erde die Beschleunigung unter dem 45. Breitengrade im mittleren Europa zu:

und:
$$\left.\begin{aligned} g_{45} &= 9{,}80579 \text{ m} \\ g\varphi &= g_{45}\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 268$$

Beispiel 71: Für Clausthal ist $\varphi = 51^0\,50'$, demnach müsste die hier auf den Meeresspiegel reducirte Fallbeschleunigung im luftleeren Raume sein:

$$\left.\begin{aligned} g = g_{51.50} &= 9{,}7806 + 0{,}0506 \sin^2(51^0\,50') \\ &= 9{,}7806 + 0{,}03128 \\ &= 9{,}8119 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 269$$

Für die Stadt Aachen ist (nach Ritter, Techn. Mech. 1892, S. 152):

$$\begin{aligned} g &= 9{,}7806 + 0{,}0506 \sin^2(50^0\,46'\,34'') \\ &= 9{,}811 \text{ m}. \end{aligned}$$

Für Berlin ist die Beschleunigung der Schwere in 1 Sekunde ebenfalls:

genauer fand Bessel:
$$\left.\begin{aligned} g &= 9{,}81 \text{ m}, \\ g &= 9{,}8125 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 270$$

Beispiel 72: Für die Höhe der Schienenoberkante des Bahnhofes zu Clausthal $h = 535$ m über dem Meeresspiegel (bezw. über Normal-Null) würde sein:

$$\left.\begin{aligned} g_h &= (g_0 + 0{,}0506 \cdot \sin^2\varphi)\left(\frac{r}{h+r}\right)^2, \\ g_h &= (9{,}7806 + 0{,}03128)\left(\frac{6\,370\,000}{6\,370\,535}\right)^2, \\ g_h &= 9{,}8120 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 271$$

Wir dürfen demnach für die meisten Rechnungen genau genug annehmen:

$$g = 9{,}81 \text{ m},$$

was bisher bereits geschah.

ZWEITER HAUPTTHEIL.

MECHANIK DER KÖRPER.

Erster Abschnitt.

Mechanik der geometrischen Körper.

Phoronomie, Kinematik.

§ 146.

Einleitende Bemerkungen. „Geometrischer Körper“ heisst jeder von Flächen begrenzte Raum. Ein materieller Körper dagegen ist ein von Flächen begrenzter, mit Stoff angefüllter Raum, oder mit anderen Worten, eine Summe von (unveränderlich zusammenhängenden) materiellen Punkten.

Die „Mechanik der geometrischen Körper“ oder „die geometrische Bewegungslehre“ kümmert sich nur um die Ortsveränderung von körperlichen Gebilden im Raume, dagegen nicht um Stoff und Zeit, womit die Mechanik der materiellen Körper sich auch zu befassen hat, die im zweiten Abschnitte dieses zweiten Haupttheiles behandelt wird.

Zu der geometrischen Bewegungslehre oder Phoronomie rechnet man auch die sog. Kinematik. Erstere beschäftigt sich mit allen Bewegungen ohne Ausnahme, z. B. auch mit den Bewegungen der Himmelskörper, hingegen die Kinematik (Ampère), oder Getriebe- auch Zwanglauflehre (Reuleaux), nur mit den gezwungenen Bewegungen der Körper, z. B. der einzelnen in einem bestimmten geometrischen Zusammenhange stehenden Bestandtheile einer Maschine. Für den Techniker hat deshalb die Kinematik besondere Bedeutung und ist im Folgenden besonders, jedoch nur so kurz als möglich, in ihren Grundzügen angedeutet. (Siehe auch die Kinematik in des Verfassers „Maschinenwissenschaften“).

A.

Bewegungen im Raume.

Die Bewegung eines Körpers kann sein:

1. eine nur fortschreitende (Translation, Schiebung), wie die eines in einem festliegenden Cylinder bewegten Kolbens, so dass alle Punkte gerade parallele Linien beschreiben,
2. eine nur drehende (Rotation, Drehung), wie die eines in einem festliegenden Lager gedrehten, gegen seitliche Verschiebung geschützten Zapfens, so dass alle Punkte Kreislinien um die geometrische Achse des gedrehten Körpers beschreiben,
3. eine Schiebung und Drehung zugleich.

Andere Fälle sind nicht denkbar.

Letzterer Fall (3) schliesst noch zwei charakteristische Bewegungen ein:

I. die Roll-Bewegung, wie z. B. bei einem Wagenrade, an dem ein jeder Punkt während der Drehung um die Achse zugleich in derselben Ebene fortschreitet und so eine sogen. Cycloide oder Rolllinie beschreibt,

II. die Schrauben-Bewegung, wie zum Beispiele bei der in einer festgehaltenen Mutter gedrehten Schraubenspindel, an der jeder (nicht in der geometrischen Drehachse liegende) Punkt während der Drehung zugleich senkrecht zu der Drehbewegung fortschreitet und so eine sogen. Schraubenlinie beschreibt.

Die Bewegung eines Körpers ist verhindert durch Festlegen dreier Punkte *a, b, f* desselben (Fig. 162), andererseits vollständig bekannt, wenn die Bewegung dieser drei Punkte bestimmt ist. Diese drei Punkte dürfen jedoch nicht in derselben Geraden z. B. in der Achse der oben erwähnten Schraubenspindel liegen, sondern müssen den Ecken eines Dreiecks entsprechen. Durch Festlegen nur zweier Punkte *a* und *b* würde dem Körper immer noch eine Drehung um die Verbindende dieser Punkte als geometrische Achse gestattet sein.

Die Festlegung nur eines Punktes *a* würde jedem Punkte des Körpers immer noch die Bewegung auf einer Kugeloberfläche um diesen Punkt als Mittelpunkt gestatten.

Regel: Um die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, verfolge die Bewegung nur dreier Punkte desselben, durch deren Verbindung ein Dreieck entsteht.

Es wird kaum nöthig sein, darauf hinzuweisen, dass hier nur von solchen Körpern die Rede sein kann, in denen die Theilchen eine bestimmte gegenseitige Lage behaupten und nicht etwa wie bei einer Flüssigkeit, regellos durcheinander fliessen.

B.

Bewegungen in der Ebene.

Bei den meisten Getrieben unserer technischen Vorrichtungen z. B. bei dem viel angewandten, immerhin schon nicht einfachen Kurbelgetriebe (Fig. 37, 92) ist es nur erforderlich, die Bewegung von Punkten in ein und derselben Ebene zu verfolgen. In allen solchen Fällen liegen die Bewegungsvorgänge insofern viel einfacher, weil es sich nur um die Bewegung ebener Figuren z. B. der Figur *a, b, f* (Fig. 162) in ihrer Ebene handelt und es dann genügt, nur die Bewegung zweier Punkte *a* und *b* dieser Ebene zu verfolgen. Hierauf soll im Folgenden etwas näher eingegangen werden.

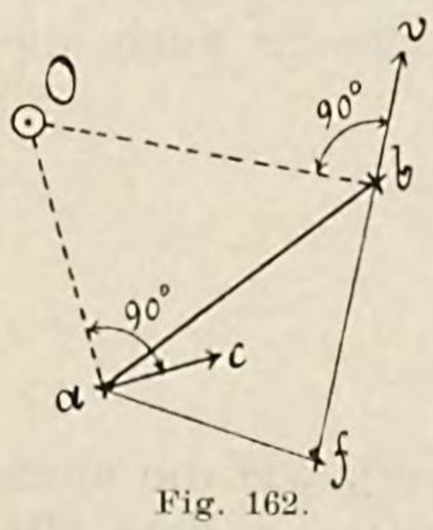


Fig. 162.

Verbindet man die Punkte *a* und *b* der Figur *abf* mit einem beliebig gewählten Punkte *O* in der Ebene der Figur, so wird durch die Drehung um diesen Punkt die Figur in eine bestimmte Nachbarlage (derselben Ebene) übergeführt. Hierbei müssen in jedem Augenblicke die Bewegungsrichtungen *c* und *v* der Punkte *a* und *b* senkrecht zu den vom Drehungspunkte *O* nach diesen Punkten gezogenen Linien *Oa* und *Ob* (Vektoren) stehen. Was von diesen Punkten gilt, gilt auch für alle anderen Punkte der um *O* gedrehten Ebene.

Umgekehrt kann jede ebene Figur abf, also auch eine Seite ab derselben aus einer Lage in eine andere, unendlich naheliegende, übrigens beliebige Nachbarlage durch eine einfache Drehung um einen richtig gewählten Punkt O übergeführt werden.

Dieser Punkt O, nach Euler (1707—1783) „augenblicklicher Drehpunkt“ genannt, wird nach dem Vorangehenden erhalten als Durchschnittspunkt derjenigen Senkrechten, welche man auf den augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier beliebiger Punkte, also auch der Punkte a und b errichtet.

Der Punkt O, der auch den Namen „Pol“ oder „Momentancentrum“ führt, lässt sich also stets aus den Bewegungsrichtungen zweier Punkte z. B. eines Maschinengetriebes, bestimmen, die durch den geometrischen Zusammenhang dem Getriebe aufgezwängt sind.

§ 147.

Beispiel 73: Es ist zu bestimmen der augenblickliche Drehpunkt (Pol) für die in der Fig. 163 dargestellte Lage der Schubstange eines Kurbelgetriebes, d. i. der Verbindenden zwischen dem geradlinig geführten Endpunkte a der Kolbenstange und dem durch die Kurbel im Kreise um die Welle herumgeführten Zapfen b der Kurbel.

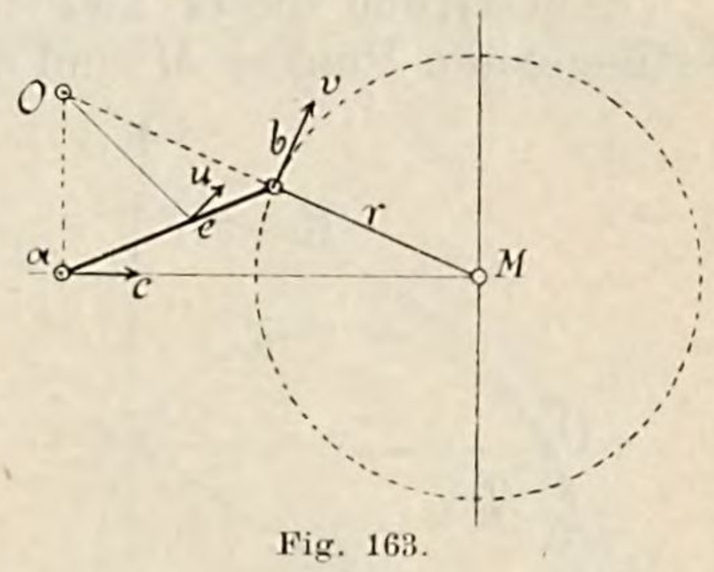


Fig. 163.

Um die Figur für eine Reihe nachfolgender Betrachtungen geeignet zu machen, sind mit Absicht die Längenverhältnisse abweichend von den üblichen Ausführungen gewählt. Denn der Maschinenbau lehrt, dass man aus gewissen, dort dargelegten Gründen $ab = 4r$ bis $6r$ ausführt.

Man errichte in den Punkten a und b zu ihren durch den Zusammenhang ihnen aufgezwängten Bewegungsrichtungen c und v die Senkrechten, so ist der Durchschnittspunkt O derselben der gesuchte augenblickliche Drehpunkt. Für jede andere Lage der Schubstange ab ergiebt sich nach demselben Verfahren der dazu gehörige Drehpunkt.

Das Verhältniss, in dem die Geschwindigkeiten c und v der Endpunkte a und b zueinander stehen, zeigt die Proportion:

$$\frac{v}{c} = \frac{Ob}{Oa}, \text{ woraus folgt: } c = v \cdot \frac{Oa}{Ob}.$$

Für einen anderen beliebigen Punkt e ist die Geschwindigkeit:

$$u = v \cdot \frac{Oe}{Ob}.$$

Beispiel 74: Es ist der Pol O der Linie ad (Fig. 164) zu bestimmen, die sich so bewegt, dass ihre Endpunkte a und d stets längs den festliegenden, senkrecht zueinander stehenden, in M sich kreuzenden Linien XX, YY hingleiten.

Der gesuchte Punkt O, der in derselben Weise wie im Beispiel 73 gefunden wird, ist in zweifacher Beziehung bemerkenswerth:

Erstens ist O der dem festen Punkte M gegenüberliegende Eckpunkt des Rechteckes $MdOa$, folglich seine Entfernung von dem festliegenden Punkte M:

$$OM = ad.$$

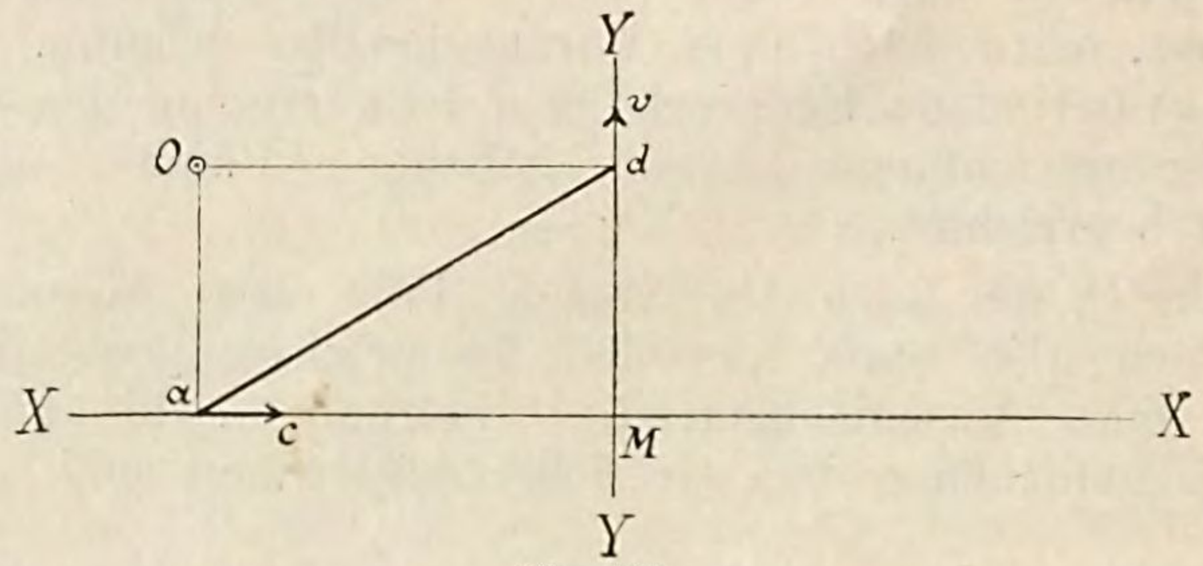


Fig. 164.

Zweitens ist O anzusehen als die Spitze des über der beweglichen Linie ad als Hypothenuse beschriebenen, rechtwinkligen Dreieckes.

Auf Grund dieser zweifachen Beziehung des Punktes O einmal zum festliegenden Punkte M und dann zur beweglichen Linie ad, lässt sich im Folgenden die Bewegung der Linie ad zurückführen auf ein Fortrollen einer beweglichen mit ad verbunden Kurve längs einer festliegenden, mit dem Achsenkreuze XX, YY verbundenen Kurve.

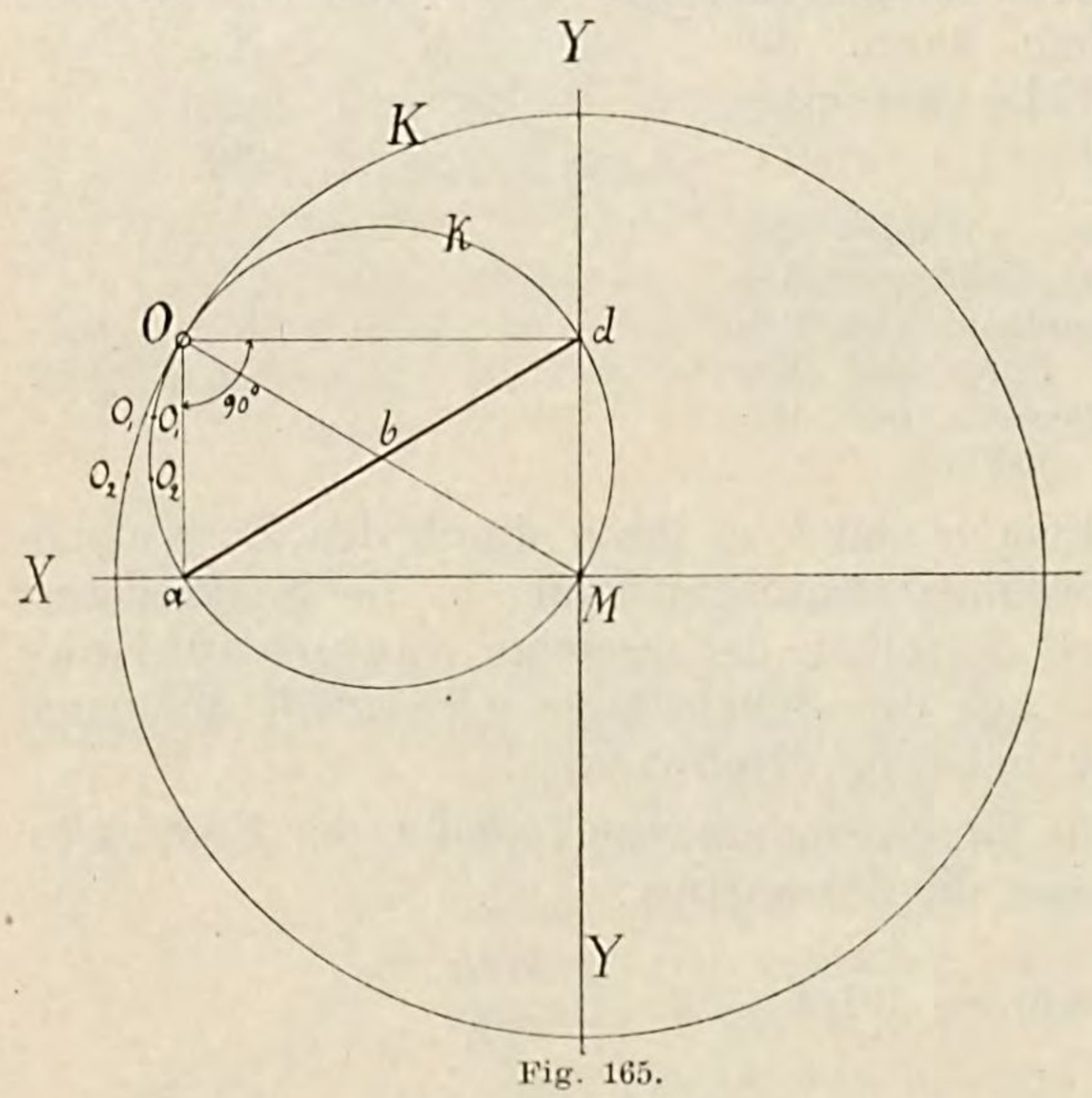


Fig. 165.

In welche andere Lage auch ad gebracht wird, stets wird der augenblickliche Drehpunkt O denselben Abstand vom M, nämlich:

$$OM = ad$$

haben (Fig. 165).

Die festliegende Kurve oder festliegende Polbahn, die alle diese augenblicklichen Drehpunkte enthält, ist demnach die Peripherie K eines Kreises, der mit dem Halbmesser $OM = ad$ um M als Mittelpunkt beschrieben wird.

Ist nun mit der beweglichen Linie ad eine Ebene verbunden, so werden in jeder neuen Lage der Linie ad auch andere, aber ganz bestimmte Punkte dieser beweglichen Ebene mit der festliegenden Kurve K zusammenfallen.

Alle diese Punkte aber haben zu der Linie ad eine bestimmte Lage. Als die Spitzen von rechten Winkeln, die über ad stehen, bilden sie, aneinandergereiht, eine bestimmte Kurve, nämlich die Peripherie k eines Kreises,

der über ad als Durchmesser konstruirt ist. Nach dem Gesagten erweist sich für jede Lage ad der Pol O als Punkt, der beiden Kurven k und K gemein ist, also in dem sich jedesmal beide Kurven (Polbahnen) berühren. Nun ist leicht einzusehen, dass unsere gegebene Linie ad die durch die Aufgabe vorgeschriebene Bewegung annehmen muss und wird, wenn die mit ad verbundene Kurve k auf der festliegenden Kurve K fortrollt. Denn beim Uebereinanderrollen berühren sich eben unsere beiden Kurven in ihren aufeinanderfolgenden Punkten OO_1 O_2 . . . . . In unserem besonderen Falle sind k und K Kreise. Ganz allgemein gilt die Regel:

„Jede Bewegung einer ebenen Figur in einer Ebene lässt sich zurückführen auf ein **Rollen** einer mit der Figur verbundenen Kurve k auf einer mit der Ebene verbundenen Kurve K.

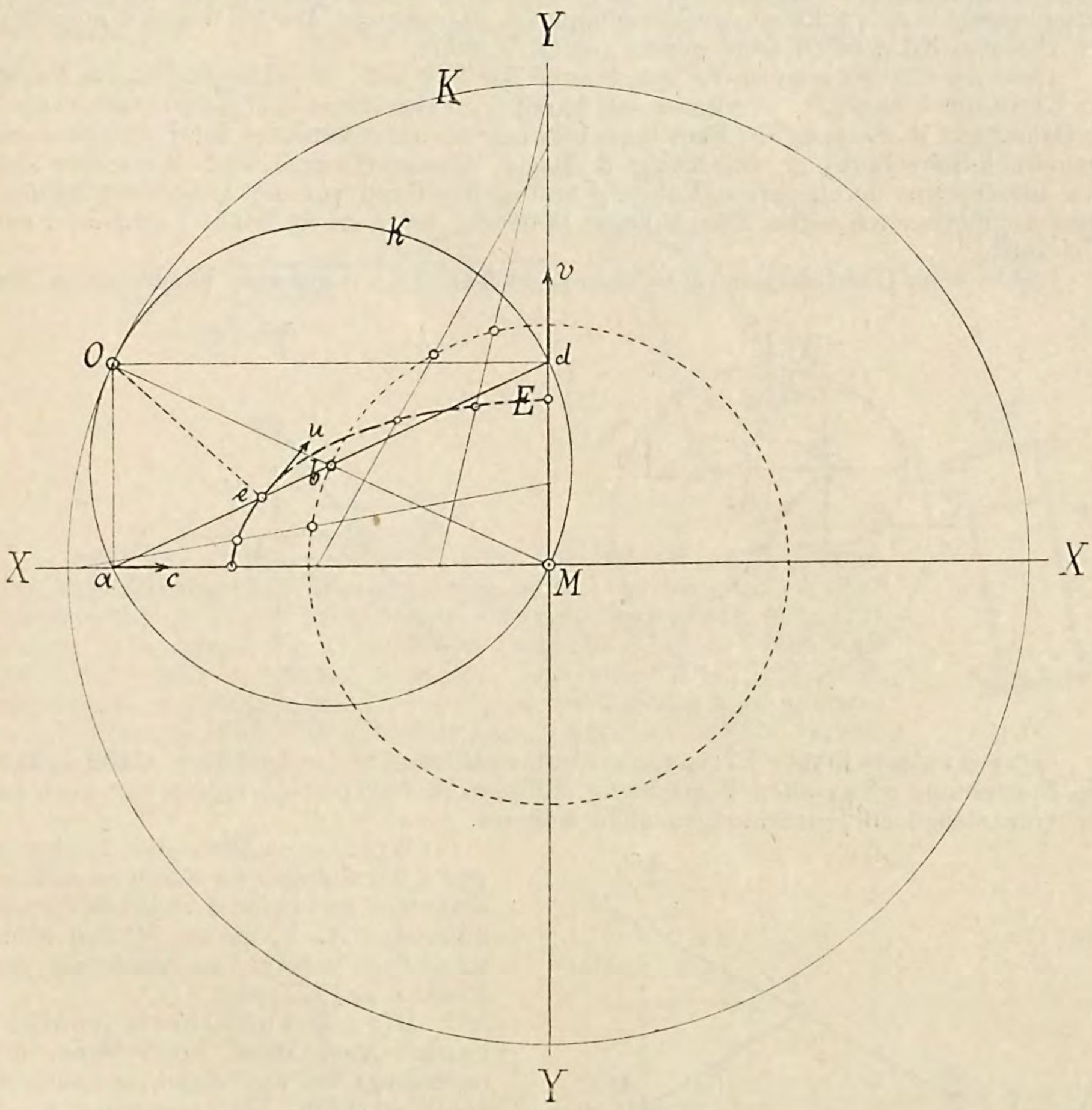


Fig. 166.

Eigenthümliche Bewegungsvorgänge, die sich aus dem Beispiele 74 herleiten lassen.

Ellipse. Kreis. Gerade. Fig. 166. Die Endpunkte a und d unserer Linie, die zugleich Punkte des Kreises k sind, beschreiben gerade Linien.

Der Mittelpunkt b der Linie beschreibt einen Kreis um M.

Jeder andere Punkt, z. B. e der Linie, auch wenn dieselbe über ihre gerade geführten Endpunkte a und d hinaus verlängert würde, beschreibt eine Ellipse EE, d. i.

eine Linie, die gewissermassen zwischen der Geraden und dem Kreise liegt. *Oe* ist senkrecht zur Bewegungsrichtung *u*, also zugleich Normale zur Ellipse im Punkte e. So finden wir hier die nahe Verwandtschaft zwischen der Geraden, dem Kreise und der Ellipse, und könnten die Ellipse als die allgemeine Kurve, die Gerade und den Kreis als besondere Arten der Ellipse ansehen.

Hypocycloide. Gerade. Beim Fortrollen eines Kreises (Rollkreises, Erzeugenden) *k* im Innern der Peripherie eines festliegenden Kreises (Leitkreises, Leitlinie) *K* beschreibt jeder Punkt z. B. *a* oder *d* des Rollkreises eine Hypocycloide (Innenrolllinie). In unserem besonderen Falle, in welchem der Rollkreis *k* halb so gross ist, wie der Leitkreis *K*, geht die Hypocycloide in eine Gerade *OM*, *aM*, *dM*, also radiale Linie über.

So stellt sich hier die Hypocycloide im besonderen Falle als gerade, radiale Linie dar.

Hypocycloidische Geradführung oder Planetenradführung. Diese Eigenthümlichkeiten der Hypocycloide haben auf die im Maschinenbau bekannte hypocycloidische Geradführung geführt. Dieselbe besteht aus dem im inneren Umfange verzahnten Rade *K*, dem damit im Eingriffe stehenden, am äusseren Umfange verzahnten, halb so grossen Rade (Planetenrade) *k*. Letzteres durch die Kurbel *Mb* um *M* im Kreise herumbewegt, rollt in Folge der Verzahnung in *K* entlang. Die in *a* und *b* angreifenden Stangen *SS* werden dann gerade (radial) geführt.

Dasselbe würde übrigens für jede Stange der Fall sein, die in irgend einem Punkte der Kreislinie *k* angreift. Verfasser sah kürzlich in der Buch- und Kunstdruckerei von C. Grumbach in Leipzig die Planetenradführung als Geradführung der Formtische der Buchdruck-Schnellpressen von König & Bauer, Kloster-Oberzell, und überzeugte sich, dass dieselbe sich durch genaue Führung und sanften Gang vor der an anderen Schnellpressen angewandten sogen. Eisenhahngeradführung mit Kurbelgetriebe vortheilhaft auszeichnete.

Siehe auch Redtenbacher, Maschinenbau I Taf. XXI. Reuleaux, Kinematik S. 584.

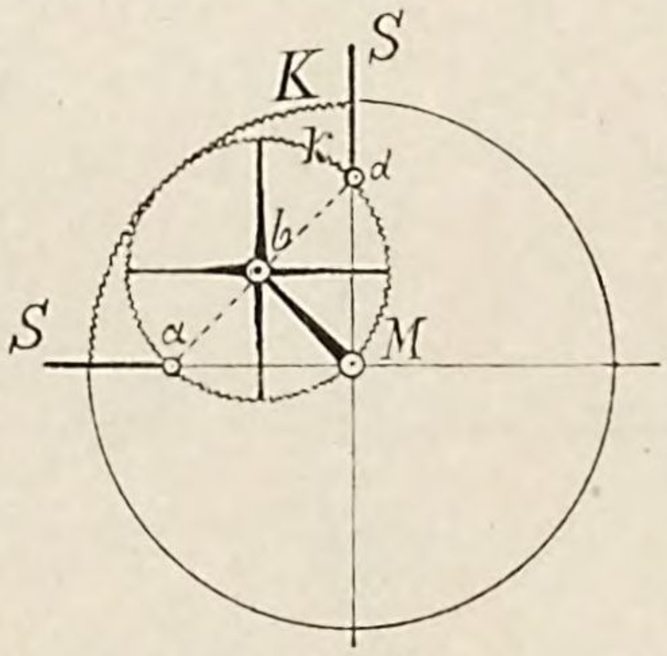


Fig. 167.

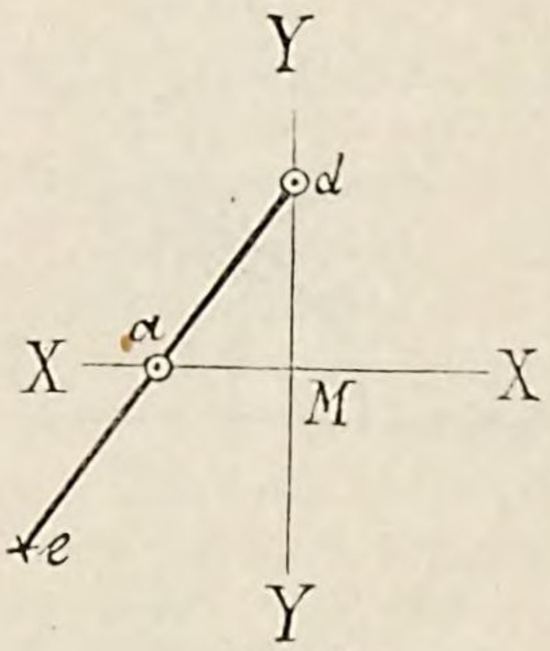


Fig. 168.

Das Ovalwerk (der Ellipsenzirkel) von Leonardo da Vinci (1452—1519) Die Einrichtung dieser alten Vorrichtung, Ellipsen zu verzeichnen, ergiebt sich auch aus den voranstehenden Betrachtungen ohne weiteres.

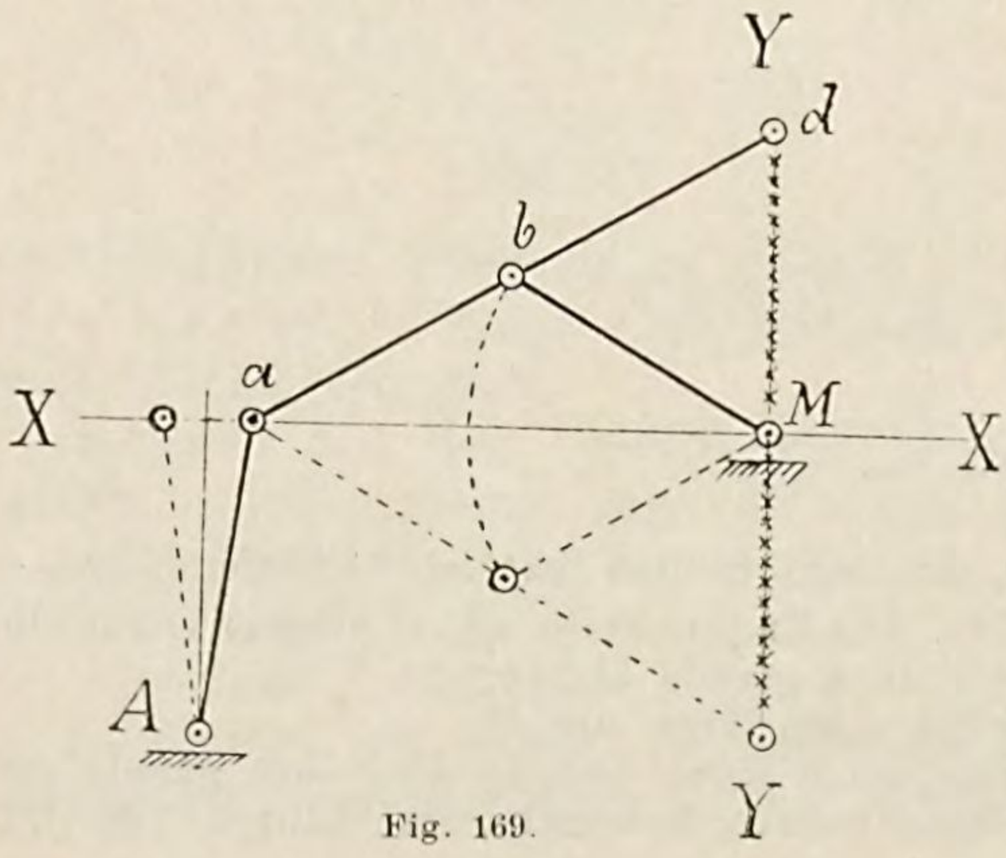


Fig. 169.

Werden nämlich die Punkte *a* und *d* der Stange *ead* durch besondere, senkrecht zu einander stehende Geradführungen *X*, *Y*, die in *M* sich überschneiden, gelenkt, so beschreibt der Punkt *e* ein Ellipse.

Die Evans'sche Geradführung. Auch diese Vorrichtung, die neuerdings bei den sogen. Indikatoren von Watt (1736—1819) angewandt wird, um den das Diagramm aufzeichnenden Stift *d* gerade zu führen, lässt sich ebenfalls ohne weiteres auf das im Voranstehenden Erörterte zurückführen.

Werden *a* und *d* in der angegebenen Weise (Fig. 163—166) gerade geführt, so beschreibt der Punkt *b* einen Kreis um *M*. Werden wieder *a* in

der XX gerade, dagegen b im Kreis um M geführt, so wird d gezwungen, sich in der YY gerade zu bewegen, ohne dass hierzu eine besondere Führung erforderlich ist. Auf letzterem Prinzipe beruht die Einrichtung der Evans'schen Geradführung. Die Stange abd ist bei a mittelst Gelenk mit der um A drehbaren Stange Aa verbunden und dadurch nahezu in der XX gerade geführt. In b, der Mitte zwischen a und d, wird sie mittelst des Gegenlenkers bM in einem Kreisbogen um M geführt.

Genauere Angaben sind in den Maschinenwissenschaften unter „Indikator“ angegeben.

Von den zahlreichen angewandten Getrieben, die mit dem Kurbelgetriebe zusammenhängen und damit hierher gehören, seien nur zwei hier noch kurz erwähnt:

Die oscillirende Kurbelschleife (Fig. 170) bezweckt die Kurbelbewegung zu verwandeln in eine langsam hin- und rasch rückwärts gehende geradlinige Bewegung, wie sie bei Hobelmaschinen und auch bei den Setzmaschinen der Aufbereitungsanstalten oft erwünscht ist. Die Figur ist wohl ohne weiteres verständlich.

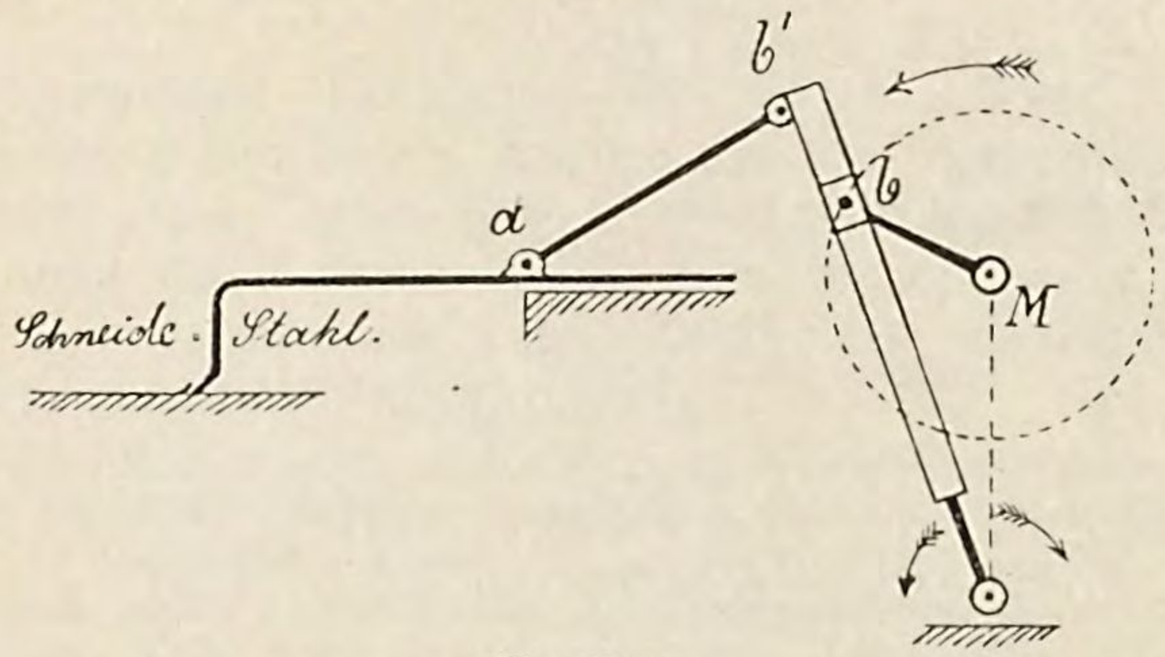


Fig. 170.

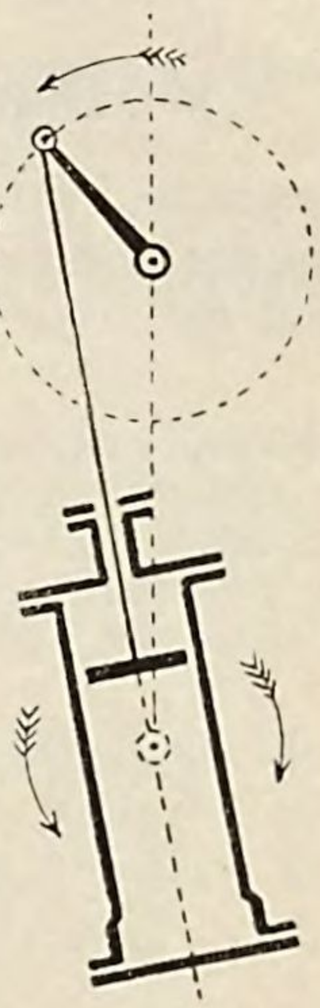


Fig. 171.

Auch der oscillirende Cylinder der Schiffsdampfmaschinen und der Schmidtschen Wasserdruckmotoren, welcher den Wegfall der Schubstange bezweckt, könnte hierher gerechnet werden (Fig. 171). Unsere Anwendung der Theorie vom „augenblicklichen Drehpunkte oder Pole“ auf die Praxis begannen wir unter § 147, Fig. 163, mit dem Kurbelgetriebe und kommen jetzt am Schlusse unseres ersten Abschnittes des zweiten Haupttheiles noch einmal auf dasselbe zurück, um es etwas eingehender zu betrachten:

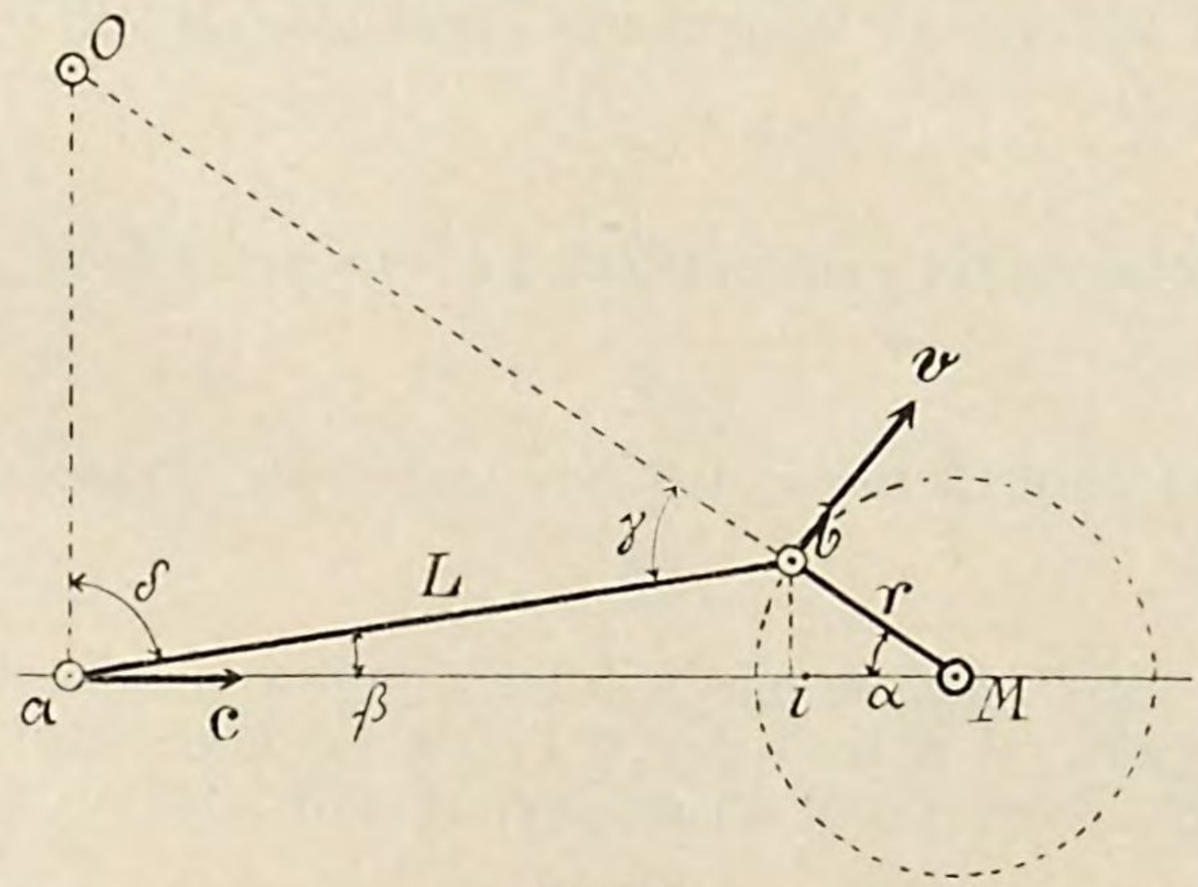


Fig. 172.

Beispiel 75. Die Bewegungserscheinungen an der Schubstange des Kurbelgetriebes.

Am häufigsten wird die Frage aufgeworfen: Wie lässt sich c, die Geschwindigkeit des Kolbens ausdrücken durch v, die Tangentialgeschwindigkeit des Kurbelzapfens und α, den Winkel, den die Kurbel mit der Richtung der Kolbenstange einschliesst? Auf die Beantwortung nur dieser wichtigen Frage soll sich das Folgende beschränken:

In der Fig. 172 sei:

$L = \mathrm{ab}$ die Länge der Schubstange,

$r = bM$ die Länge der Kurbel, dann für die augenblickliche Lage:

β der Winkel, den Schubstange und Kolbenstangenrichtung,

α der Winkel, den Kurbel und Kolbenstangenrichtung miteinander einschliessen.

Wir bestimmen nach der bekannten Regel den Pol O, dann ergiebt sich zunächst ohne weiteres:

$$\frac{c}{v} = \frac{Oa}{Ob} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta},$$

oder:

$$\frac{c}{v} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta},$$

$$\frac{c}{v} = \sin\alpha + \cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Nun ist aber:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{bi}{ai} = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{L^2-(r\sin\alpha)^2}},$$

folglich:

$$\frac{c}{v} = \sin\alpha + \cos\alpha\,\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{L^2-(r\sin\alpha)^2}},$$

$$\frac{c}{v} = \sin\alpha + \frac{r\,\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{L^2-(r\sin\alpha)^2}},$$

$$c = v\left(\sin\alpha + \frac{r\sin 2\alpha}{2\sqrt{L^2-(r^2\sin^2\alpha)}}\right),$$

$$c = v\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{\left(\frac{L}{r}\right)^2-\sin^2\alpha}}\right).$$

Zweiter Abschnitt.

Mechanik der materiellen Körper.

Erste Abtheilung.

Mechanik der festen Körper.

§ 148.

Allgemeines. Erklärung eines festen Körpers. Unterschied zwischen der Mechanik der festen Körper und des materiellen Punktes.

Unter einem festen Körper soll im Folgenden eine vollkommen starre Verbindung von körperlichen Punkten, welche unter dem Einflusse äusserer Kräfte ihre gegenseitige Lage (Entfernung von einander) unverändert beibehalten, verstanden werden.

Solche Körper giebt es allerdings in Wirklichkeit nicht. Jedoch der Konstrukteur hat den aus festen Körpern hergestellten Bestandtheilen seiner Bauwerke (Maschinen u. s. w.) in den meisten Fällen eine solche Gestalt zu geben, dass auf geringe Formveränderungen, welche durch Krafteinwirkungen herbeigeführt werden, keine Rücksicht zu nehmen ist. Die durch Krafteinwirkungen thatsächlich herbeigeführten Formveränderungen werden in der Festigkeitslehre besonders behandelt.

Es sei jetzt schon vorgreifend hervorgehoben, dass die Mechanik der Körper von der des körperlichen Punktes wesentlich dadurch abweicht, dass bei einem Körper die Kräfte in verschiedenen Punkten angreifen und in Folge dessen meistens auch Drehbewegungen hervorrufen werden.

Wir werden deshalb in diesem Abschnitte sogen. Kräftepaare (§ 159) und sogen. Trägheitsmomente (§ 268) kennen lernen, welche in der Bewegungslehre des körperlichen Punktes nicht vorkommen konnten.

I.

Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft.

A.

Verallgemeinerung des Satzes von den zwei Kräften (Innere Kräfte).

§ 149.

In einem festen Körper darf der Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtung z. B. nach der Fig. 173 von a nach b verlegt werden, ohne dass dadurch an dem Bewegungszustande des Körpers irgend etwas geändert wird.

Hieraus folgt ohne weiteres, dass sich zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt wirkende Kräfte im Gleichgewicht halten, wenn ihre An-

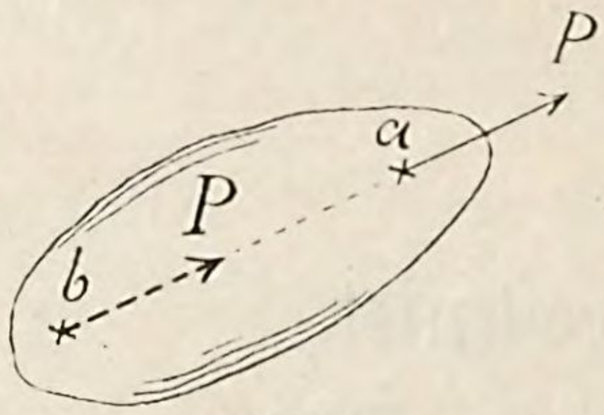
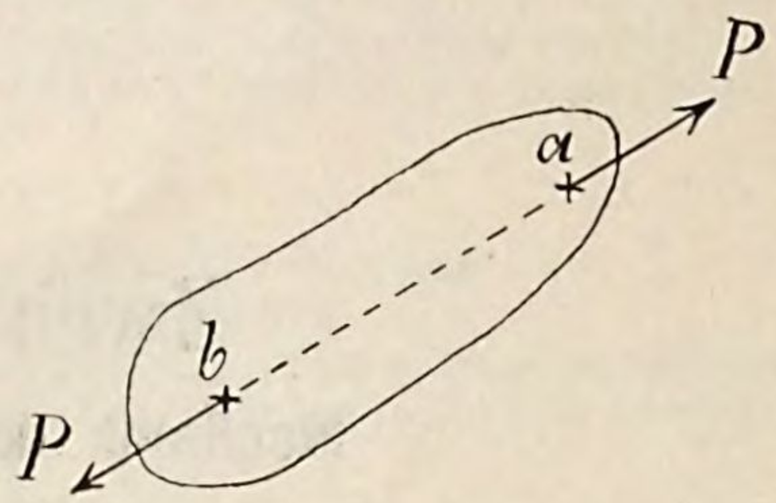


Fig. 173.



griffspunkte a und b in der gemeinschaftlichen Richtungslinie der beiden Kräfte liegen (Fig. 174).

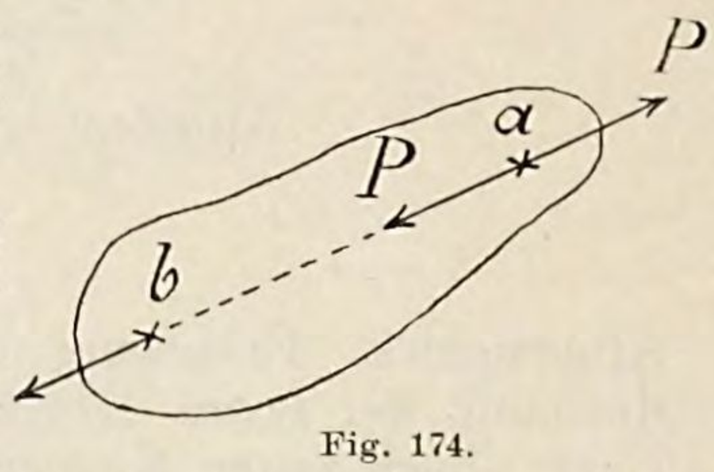


Fig. 174.

Denn verlegt man den Angriffspunkt der einen Kraft nach a, dem Angriffspunkte der anderen Kraft, so erhält man zwei in demselben Punkte angreifende gleiche, entgegengesetzt wirkende Kräfte, welche sich nach einem früheren Satze (Gleich. 132) das Gleichgewicht haben.

Hieraus folgt weiter: Man darf in einem festen Körper zwei gleich grosse, entgegengesetzt wirkende Kräfte an irgend einem Punkte a oder in zwei beliebigen Punkten a und b der gemeinschaftlichen Richtungslinie der Kräfte anbringen, ohne dass dadurch an dem Bewegungszustande des Körpers etwas geändert wird. Von diesem Verfahren wird im Folgenden öfters mit Vortheil Anwendung gemacht (Fig. 183, 189, 195, 196, 197, 198, 201, 341).

§ 150.

Ebenso gilt der wichtige Satz:

Innere Kräfte verändern nicht den Bewegungszustand (des Schwerpunktes) eines festen Körpers. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung haben die inneren Kräfte (die von den körperlichen Punkten gegenseitig aufeinander übertragen werden) je paarweise gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung, heben sich also auf und können in Folge dessen den Bewegungszustand (des Schwerpunktes, Massenmittelpunktes) in keiner Weise verändern.

Wäre z. B. unser Erdball ein gewaltiger Riese, so könnte dieser durch seine inneren Kräfte wohl die einzelnen Theile seines Körpers, die Arme, die Beine und den Kopf bewegen, er könnte sich krümmen hin und her, er würde aber dadurch seinen Massenmittelpunkt nicht um eines Haares Breite verlegen. Dieser würde unverändert den vorhandenen Bewegungszustand fortsetzen. Ebenso sind Bewegungen auf und in der Erde, welche in der Erde selbst ihren Ursprung haben, wie z. B. vulkanische Ausbrüche, Erdbeben, ohne irgend welchen Einfluss auf den Bewegungszustand des Erdballes. Selbst wenn unser Riese durch eine gewaltige innere Triebkraft auseinandergesprengt würde, so müsste der Schwerpunkt aller Stücke doch denselben Weg beschreiben, wie wenn die Sprengung nicht eingetreten wäre. Anders ist es allerdings, wenn äussere Kräfte hinzutreten. So wird z. B. die Bewegung verändert (gestört) durch die Nähe anderer Himmelskörper, durch die durch den Mond veranlasste Ebbe und Fluth; auch würde sie durch Erdbeben verändert werden, wenn diese, ähnlich wie Ebbe und Fluth, auf den Mond zurückzuführen wären. Wer auf einer vollkommen glatten und wagerechten Eisfläche sich befindet (einen solchen

Zustand als möglich vorausgesetzt), kann wohl Theile seines Körpers bewegen, auch sogar mittelst seiner inneren Kräfte sich heben und niederlassen, weil er nach aussen hin lothrecht gegen die feste Eisfläche sich stemmen kann; aber trotzdem ist er nicht im Stande, in wagerechter Richtung seinen gesammten Körper (Massenmittelpunkt) nur um das Geringste zu verschieben. Dagegen würde eine von aussen her wirkende Kraft, selbst die geringfügigste, z. B schon eine in die Hand gegebene Magnetnadel, deren Pol von aussen her der gleichnamige oder ungleichnamige Pol einer anderen Magnetnadel genähert wird, genügen, eine s. z. s. willenlose Rück- oder Vorwärtsbewegung unseres Körpers zu veranlassen.

B.

Verallgemeinerung des Satzes von den drei Kräften.

§ 151.

Mit Hülfe des obigen Satzes von der Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft, lässt sich auch der Satz von den drei Kräften verallgemeinern. Im § 74 sahen wir, dass drei in derselben Ebene wirkende, an ein und demselben Punkte angreifende Kräfte PP_1P_2 sich das Gleichgewicht halten, wenn jede Kraft gleich, aber entgegengesetzt der Mittelkraft aus den anderen beiden Kräften ist, oder durch eine mathematische Beziehung ausgedrückt, wenn sich verhält (nach Gleichung 133):

$$P : P_1 : P_2 = \sin a : \sin a_1 : \sin a_2.$$

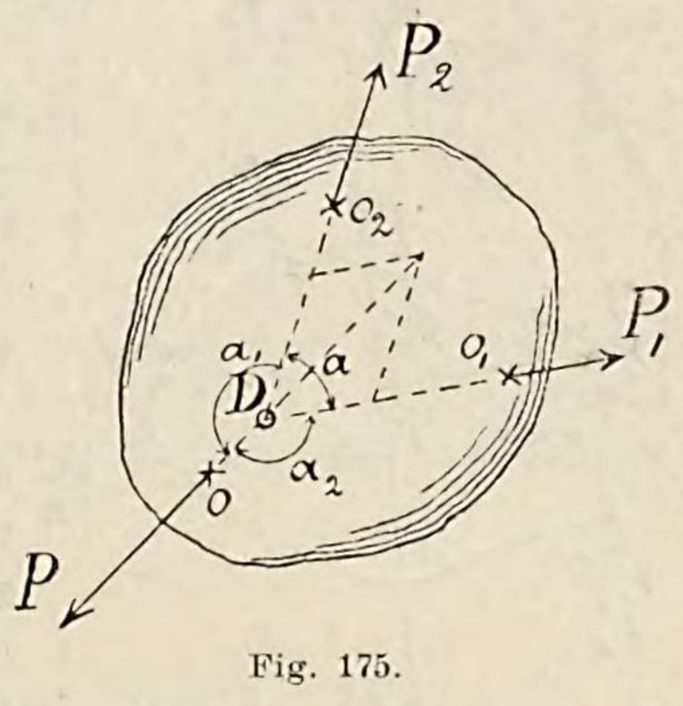


Fig. 175.

Sollen demnach auch die drei in den verschiedenen Punkten oo_1o_2 eines Körpers angreifenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so müssen:

1. die Kräfte in ein und derselben Ebene wirken;
2. die Richtungslinien dieser Kräfte sich in ein und demselben Punkte D schneiden;
3. die einzelnen Kräfte gleich der in entgegengesetzter Richtung angenommenen Mittelkraft aus den anderen beiden Kräften sein, oder deren Grössen sich verhalten wie die Sinus der am Schnittpunkte D gegenüberliegenden Winkel.

C.

Verallgemeinerung des Satzes von den vier Kräften.

§ 152.

Sollen vier Kräfte im Raume sich das Gleichgewicht halten, so müssen sich deren Richtungslinien in ein und demselben Punkte schneiden und es muss eine jede Kraft gleich der in entgegengesetzter Richtung angenommenen Mittelkraft aus den anderen drei Kräften sein.

II.

Zusammensetzung von Kräften, welche an verschiedenen Punkten einen festen Körper angreifen.

A.

Die Kräfte wirken in derselben Ebene.

a.

Zusammensetzung nicht paralleler Kräfte.

§ 153.

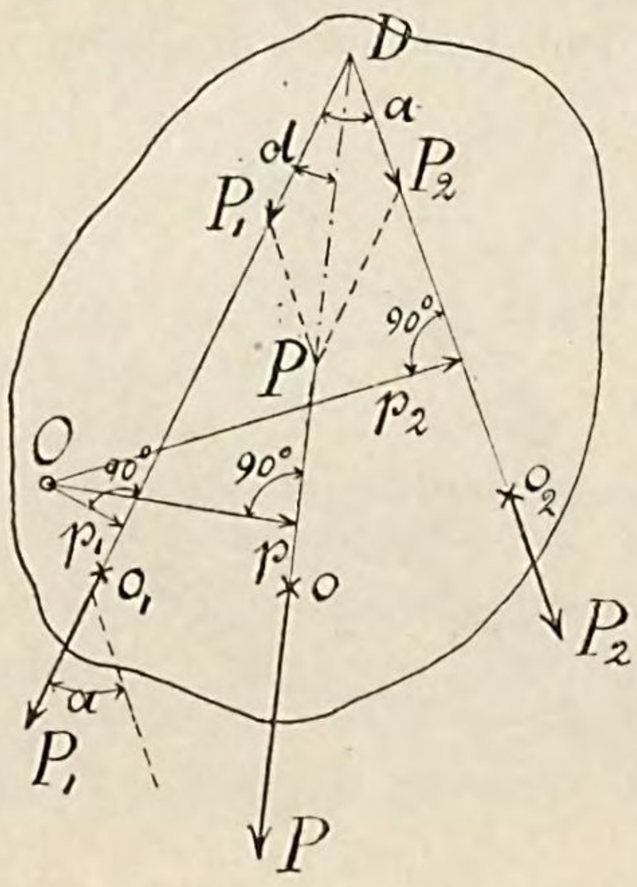


Fig. 176.

Beispiel 76: Zwei in derselben Ebene in den Punkten . . . . . o_1 und o_2 angreifende Kräfte . . . . . $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 20$ kg, schliessen einen Winkel . . . $a = 30^0$ miteinander ein. Es soll, womöglich mit Hülfe bereits bekannter Sätze, die Mittelkraft der Grösse, Richtung und Lage nach gefunden werden.

Man verlegt den Angriffspunkt der Kräfte nach dem Durchschnittspunkt D der Kraftrichtungen, dann findet man, wie die Fig. 176 zeigt, nach dem Parallelogrammgesetze (§ 73) durch Verzeichnung die Mittelkraft P der Grösse, Richtung und Lage nach. Der Angriffspunkt o der Kraft P kann in der Richtung der gefundenen Kraft beliebig angenommen werden.

§ 154.

Durch Rechnung dagegen ergiebt sich zunächst die Mittelkraft (Gleichung 124):

1. $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos a}$ der Grösse nach, und durch
2. $\sin d = \sin a \frac{P_2}{P}$ (Gleichung 125) „ Richtung nach.
3. Die Lage der Mittelkraft findet man (ohne Aufsuchung des Durchschnittspunktes D) mit Hülfe des Satzes von den statischen Momenten (Gleich. 199).

Nach diesem Satze ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte, bezogen auf eine beliebig angenommene Drehachse O. Folglich ist nach Fig. 176:

$$P \cdot p = P_1 p_1 + P_2 p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 274$$

und nun der Hebelarm:

$$p = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{P} \quad \ldots\ldots\ldots 276$$

aufzufassen als der Halbmesser desjenigen Kreises, welchen die durch Gleich. 1 bestimmte Mittelkraft P, die ausserdem nach der Gleichung 2 mit P_1 den Winkel d einschliessen muss, zu berühren hat. Die Aufgabe ist sonach auf rein geometrischem Wege zu lösen:
Sie läuft darauf hinaus, die Lage einer Linie P zu bestimmen, welche einen gegebenen Kreis berührt und zugleich mit einer gegebenen Linie P_1 den Winkel d einschliesst.

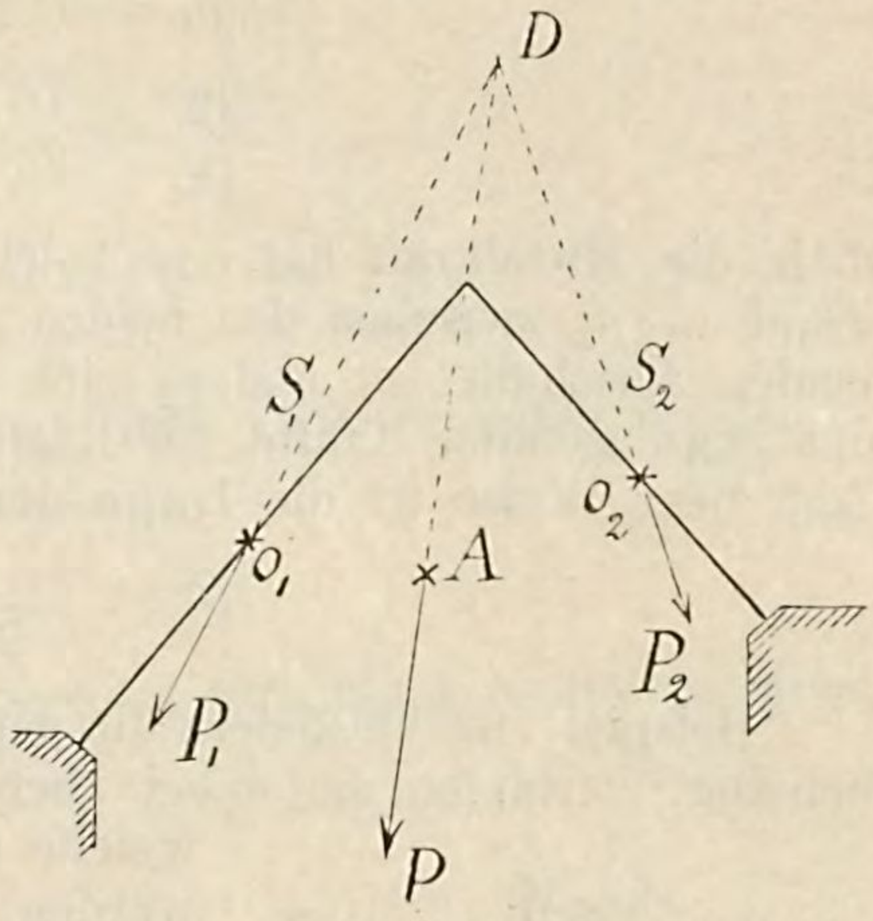


Fig. 177.

Der Angriffspunkt A der Mittelkraft P ist übrigens in ihrer Richtungslinie beliebig zu wählen. In der Richtungslinie P müsste man den Körper aufhängen, wenn er nicht fallen, oder nicht sich drehen sollte; in derselben Linie müsste man die Enden zweier Stangen S_1 S_2 (Sparren) gegeneinanderlegen, wenn sie durch die Kräfte P_1 und P_2 nicht gegeneinander verschoben werden sollten.

Ein anderes Verfahren, beliebige Kräfte zusammenzusetzen, wird später unter „Graphostatik“ angegeben.

b.

Zusammensetzung paralleler Kräfte.

§ 154.

Beispiel 77: Zwei parallele Kräfte mit gleicher Richtung.

Die beiden Kräfte P_1 und P_2 sind einander parallel und wirken nach derselben Seite hin, schliessen demnach den Winkel $a = 0$ miteinander ein. Es soll die Mittelkraft P nach Grösse, Richtung und Lage gefunden werden.

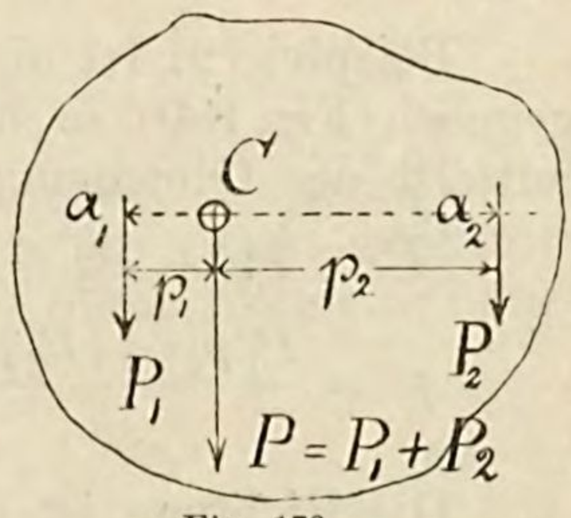


Fig. 178.

Da $\cos a = 1$; $\sin a = 0$, so folgt:

1. $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2} = P_1 + P_2$,

d. h. die Mittelkraft gleichlaufender, gleichgerichteter Kräfte ist gleich deren Summe;

2. $\sin d = \sin o \frac{P_2}{P} =$ Null,

d. h. die Mittelkraft hat dieselbe Richtung wie die gegebenen Kräfte;

3. die Lage der Mittelkraft erhält man ebenfalls mit Hülfe des Satzes von den statischen Momenten:

Wäre nach Fig. 178 P der Lage nach richtig verzeichnet und ginge die willkürlich anzunehmende, übrigens senkrecht zur Ebene der Kräfte stehende Drehachse C durch die Mittelkraft P hindurch, so würde bei dieser Wahl das statische Moment der Mittelkraft $P \cdot p = 0$ sein, da $p = 0$ ist, und sich ergeben:

$$Pp = o = P_2 p_2 - P_1 p_1$$

oder:

$$P_1 p_1 = P_2 p_2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &= \frac{P_2}{P_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 277$$

d. h. die Mittelkraft hat eine solche Lage, dass sie den senkrechten Abstand $a_1\ a_2$ zwischen den beiden gegebenen Kräften so zerlegt, dass die beiden Abschnitte p_1 und p_2 sich umgekehrt verhalten wie die Grössen der angrenzenden Kräfte. C liegt also der grösseren Kraft am nächsten. Auf diese Weise ist die Lage der Mittelkraft genau bestimmt.

§ 155.

Beispiel 78: Verändern die parallelen Kräfte P_1 und P_2 ihre Richtung beliebig, verlaufen sie dabei aber immer durch dieselben Punkte $a_1\ a_2$, welche auch als ihre Angriffspunkte angesehen werden können, so gilt stets:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{{p_2}^1}{{p_1}^1} = \frac{p_2}{p_1},$$

die Mittelkraft verläuft also beständig durch denselben Punkt M.

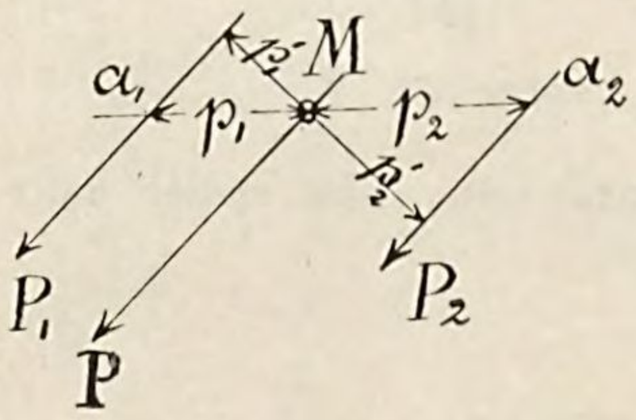


Fig. 179.

Hiernach folgt der Satz:

Parallele Kräfte, die immer dieselben Angriffspunkte haben, besitzen einen Mittelpunkt.

(Verallgemeinerung dieses Satzes bei der Lehre vom Schwerpunkte.)

§ 156.

Beispiel 79: Ist die beliebige Anzahl von Kräften P_1, P_2, $-P_3$ $-P_4$ gegeben (Fig. 180), so findet man leicht die Mittelkraft der gegebenen Kräfte mittelst der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 - P_3 - P_4 && \text{der Grösse nach;} \\ p &= \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 - P_3 p_3 - P_4 p_4}{P} && \text{der Lage nach.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 278$$

Die Richtung ist selbstredend gleichlaufend der Richtung der gegebenen Kräfte.

§ 157.

Beispiel 80: Zwei parallele Kräfte mit entgegengesetzten Richtungen.

Die beiden Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 181) sind wieder parallel, aber entgegengesetzt gerichtet, schliessen also den Winkel $\alpha = 180^0$ mit einander ein.

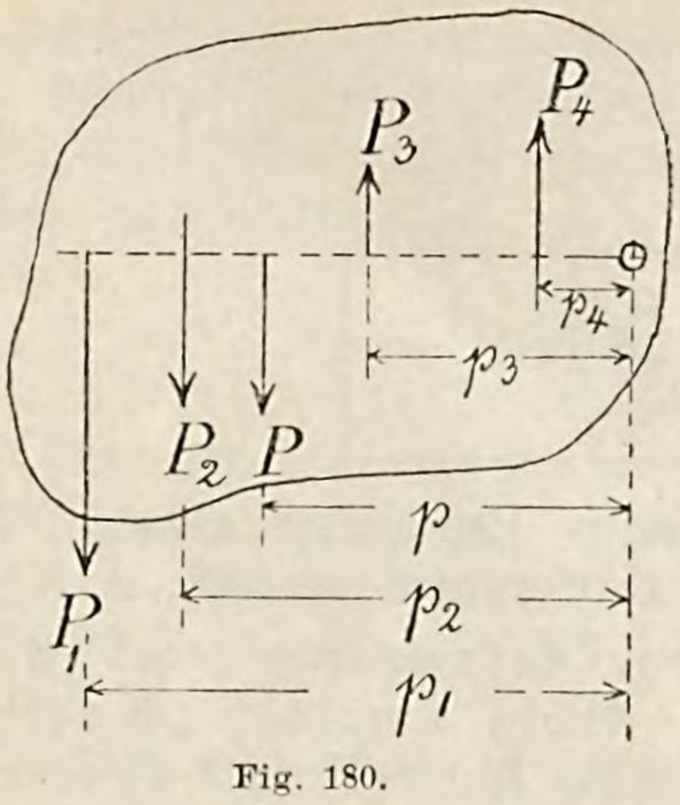


Fig. 180.

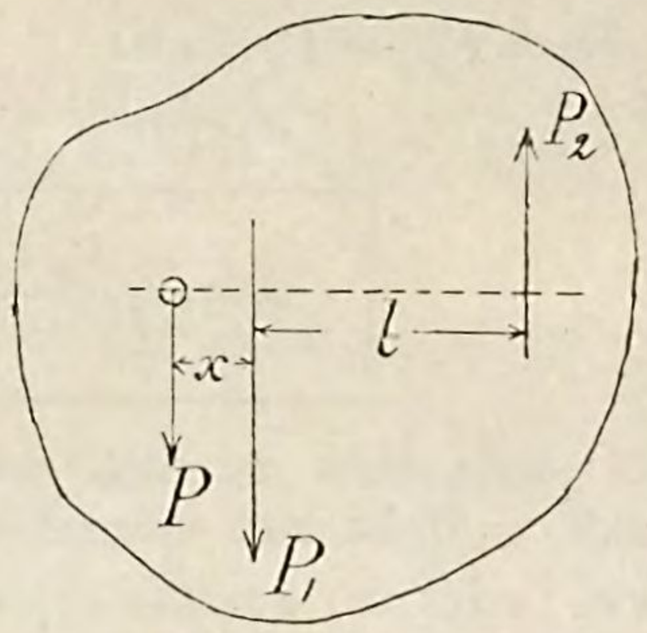


Fig. 181.

Es soll P der Grösse, Richtung und Lage nach gefunden werden.
Da $\cos a = -1$; $\sin a = 0$, so folgt:

1. $$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2} = P_1 - P_2,$$

d. h. die Mittelkraft paralleler, entgegengesetzt gerichteter Kräfte ist gleich dem Unterschiede der Kräfte.

2. $$\sin d = \sin 180 \cdot \frac{P_2}{P} = 0,$$

d. h. die Mittelkraft ist parallel den gegebenen Kräften und wirkt im Sinne der grösseren Kraft.

3. Die Lage der Mittelkraft ergiebt sich auch hier nach dem Satze von den statischen Momenten.

Nach der Figur ist, wenn wieder die Drehachse durch P hindurchgehend angenommen wird:

$$\left.\begin{aligned} P \cdot p = 0 &= P_1 x - P_2 (x + l) \\ x (P_1 - P_2) &= P_2 l \\ \boxed{x = \frac{P_2 l}{P_1 - P_2}} & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 279$$

Durch den Werth x ist die Lage der Mittelkraft genau festgelegt. Die Mittelkraft entgegengesetzt wirkender, paralleler Kräfte wirkt nicht wie im vorausstehenden Beispiele zwischen den beiden Kräften, sondern ausserhalb derselben und liegt der grösseren am nächsten.

§ 158.

Beispiel 81: Zwei parallele Kräfte mit entgegengesetzten Richtungen, aber von gleicher Grösse bilden ein Kräftepaar.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der vorhergehenden nur dadurch, dass angenommen werden soll:

$$P_1 = P_2.$$

Dann ist:

1. $P = P_1 - P_2 = \underline{0}$
2. $d = 0$
3. $$\boxed{x = \frac{P_2 \cdot l}{P_1 - P_2} = \frac{P_2 l}{0} = \underline{\infty}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 280$$

Wir sind somit zu dem widersinnigen Ergebnisse gelangt, dass die Mittelkraft = 0 ist und in unendlicher Entfernung angreift, d. h.:

Zwei gleich grosse, parallele, entgegengesetzt wirkende Kräfte, die man nach Poinsot (1777—1859) kurz als „Kräftepaar" bezeichnet, lassen sich nicht durch eine Einzelkraft ersetzen.

c.

Die Kräftepaare oder die Drehkräfte.

§ 159.

Allgemeine Bemerkungen. Begriff und Bedeutung des Kräftepaares. In der Mechanik des körperlichen Punktes, in welcher die Kräfte stets nur in einem einzigen Punkte angreifen, ist das Zustandekommen eines Kräftepaares unmöglich. Es unterscheiden sich deshalb die Aufgaben der Mechanik der festen Körper von denen der Mechanik des körperlichen Punktes ganz besonders durch das Hinzutreten der Kräftepaare.

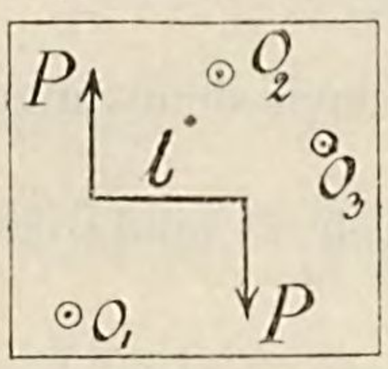


Fig. 182.

Eine Einzelkraft kann nur eine fortschreitende Bewegung (Translation, Schiebung) bewirken.

Dagegen sucht ein Kräftepaar PP (Fig. 182) den Körper nur zu drehen. Die Drehung erfolgt, wie weiter unten (§ 163) noch näher erörtert werden wird, um irgend eine der unzähligen gleichlaufenden (parallelen) Linien $O_1 O_2 O_3 \ldots$ (Drehachsen), welche senkrecht zur Wirkungsebene E des Paares, also auch senkrecht zu jeder Ebene stehen, die der Ebene E gleichlaufend ist.

Bei einem Kräftepaare soll, genau genommen, nicht an eine bestimmte Drehachse gedacht werden.

Jedoch sei für den Praktiker hier beiläufig bemerkt, dass durch ein Kräftepaar, wie es der Theoretiker hier auffast (welches also ohne eine bestimmte Drehachse gedacht werden soll), fast niemals ein Körper gedreht, überhaupt beeinflusst wird.

Bei allen unseren technischen Ausführungen werden alle willkürlichen Bewegungen möglichst vermieden, vielmehr fast ausnahmslos Bewegungen in bestimmten Bahnen, also auch Drehungen um bestimmte Drehungsachsen bezweckt.

Es fällt dann immer die Drehachse des Kräftepaares zusammen mit der wirklichen Drehachse des festen Körpers.

Ist dem Körper aber eine bestimmte Drehachse aufgezwängt, so genügt schon eine Einzelkraft zur Hervorbringung einer Drehbewegung, also

zum Zustandekommen eines Kräftepaares. Die andere gleich grosse, gleich laufende, entgegengesetzt wirkende Kraft, wird nämlich durch den Widerstand des festen Unterstützungspunktes der Drehachse erzeugt. Es tritt dann ausser dem Kräftepaare noch eine Einzelkraft (biegende Kraft, Zapfendruck) auf.

Das Gesagte lässt sich leicht, wie folgt, zeigen:

Ist z. B. O (Fig. 183) die Drehachse eines Zahnrades, an dessen Umfange bei A die Einzelkraft P als Zähnedruck wirkt, so dürfen wir, ohne dass am Gleichgewichtszustande etwas geändert wird, an der Achse O zwei entgegengesetzte Kräfte anbringen, welche dem Zähnedruck gleich und gleichlaufend sind (§ 149).

Es äussert sich dann die punktirt gezeichnete Kraft P als Einzelkraft, welche die Körperachse (Trieb-Welle) auf Biegung beansprucht, Zapfendruck erzeugt und bei entgegengesetzter Drehung das Zapfenlager entlasten würde.

Die beiden anderen Kräfte dagegen bilden das Kräftepaar.

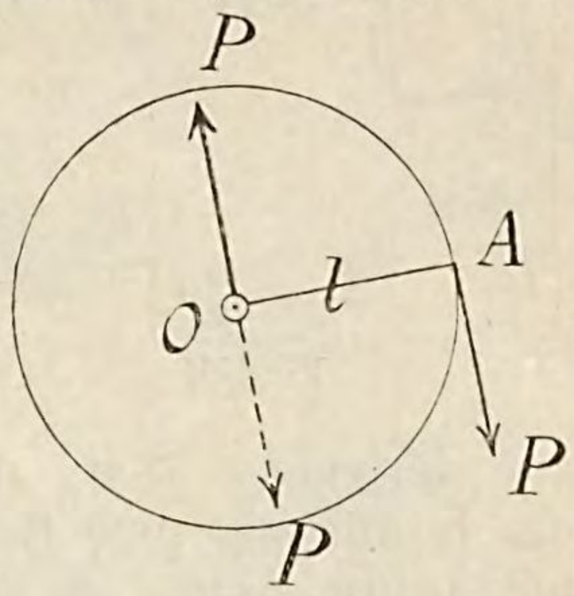


Fig. 183.

Was hier gesagt ist, finden wir in der Technik meist verwirklicht.

In einigen Fällen wird allerdings auch von vornherein mittelst Drehkräften auf die Körper eingewirkt; wie z. B. beim Drehen einer Schraube ohne Schraubenschlüssel, des Stellrades am Steuerruder, ebenso beim Aufziehen einer Taschenuhr, auch bei einer frei hängenden Magnetnadel. Jedoch auch in allen diesen Fällen sind bestimmte Achsen vorhanden, um welche die Drehung erfolgt.

So ist die obige Behauptung, dass durch ein Kräftepaar im rein wissenschaftlichen Sinne kein künstlich hergestellter Körper gedreht wird, durch einige Beispiele erläutert, deren Zahl sich leicht vergrössern liesse. (Selbst bei den Himmelskörpern nimmt man meist bestimmte Drehachsen an.)

Wir werden im Folgenden von der theoretischen Drehkraft handeln, aber insofern von dem in den Lehrbüchern eingeschlagenen Wege abweichen, dass wir die Sätze von den Kräftepaaren so viel als thunlich auf bestimmte Fälle der Praxis anwenden.

§ 160.

Man nennt bei einem Kräftepaare:

Arm oder Hebelarm l, den senkrechten Abstand zwischen den Richtungslinien der beiden Kräfte PP,

(Statisches) Moment $\mathfrak{M} = Pl$, das Produkt aus einer der beiden Kräfte und dem Hebelarme,

rechtsdrehend oder positiv $\left(+\right)$, eine Drehung, die dem Beobachter im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erscheint,

linksdrehend oder negativ $\left(-\right)$, die entgegengesetzte Drehung.

Ist P in Kilogrammen, l in Metern gegeben, so giebt das Produkt:

$$\mathfrak{M} = P \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 281$$

das Moment des Paares in Meterkilogrammen.

Bildliche Darstellung eines Paares.

§ 161.

Das Kräftepaar lässt sich auf dem Papiere darstellen als eine einfache Linie*), nämlich als eine Gerade, welche senkrecht zu seiner Wirkungsebene, also auch zu jeder dazu gleichlaufenden Ebene steht, und auf welcher so viel Längeneinheiten abgetragen sind, als das zur Darstellung gebrachte Kräftepaar Momenteneinheiten ($\mathfrak{M}$) enthält.

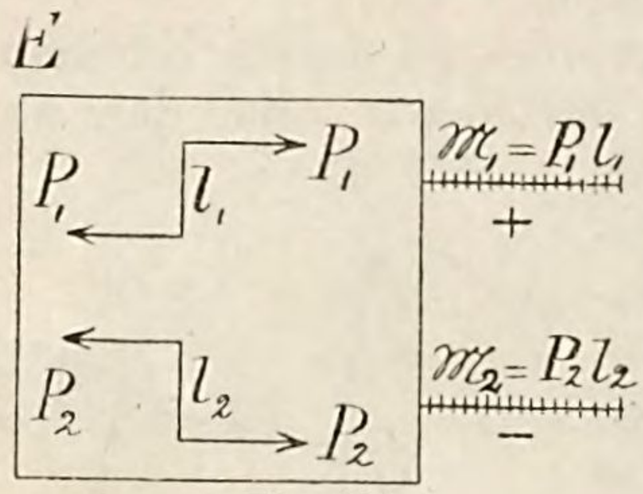


Fig. 184.

Damit diese Senkrechte, die man kurzweg die „Achse“ zu bezeichnen pflegt, die Wirkungsweise des Kräftepaares vollständig ausdrückt, soll dieselbe eine positive genannt und mit dem Zeichen + versehen werden, wenn sie auf derjenigen Seite der Wirkungsebene errichtet ist, von welcher aus das Kräftepaar dem Beobachter als rechtsdrehend erscheint. Anderenfalls müsste die Achse als eine negative angesehen werden. (Siehe Fig. 184.)

Durch solche Achse ist:

1. die Grösse des Paares,
2. der Drehsinn „ „ und
3. die Lage der Ebene, in welcher das Paar wirkt, gegeben, somit das Kräftepaar in jeder Beziehung bestimmt.

Diesen drei Bestimmungen entspricht bei den Einzelkräften:

1. die Grösse,
2. die Richtung und
3. der Angriffspunkt (die Lage).

Hieraus geht hervor, dass die beiden, übrigens sehr verschiedenen Begriffe:

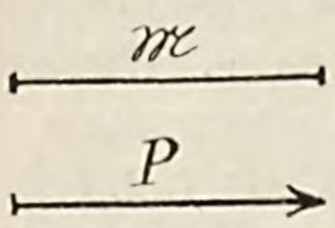


Fig. 186.

Einzelkraft

und

Kräftepaar

doch auf dieselbe Weise, d. h. durch eine gerade Linie von bestimmter Länge, Richtung und Lage, sich vollständig zur Darstellung bringen lassen.

Die „Achsen“ $\mathfrak{M}$ (Fig. 186) sollen im Folgenden nicht durch eine Pfeilspitze begrenzt werden, zum Unterschiede von den Einzelkräften P.

Die Darstellung eines Kräftepaares durch eine einfache Linie ist ganz besonders nützlich.

Sie ermöglicht, die aus drei Theilen (den beiden gleich grossen Kräften und dem Arme) bestehenden Paare genau so zu behandeln, wie die ebenfalls durch einfache Linien dargestellten Einzelkräfte.

§ 162.

Mit Hülfe dieser „Achsen“ lassen sich die Kräftepaare ebenso wie die Einzelkräfte nach

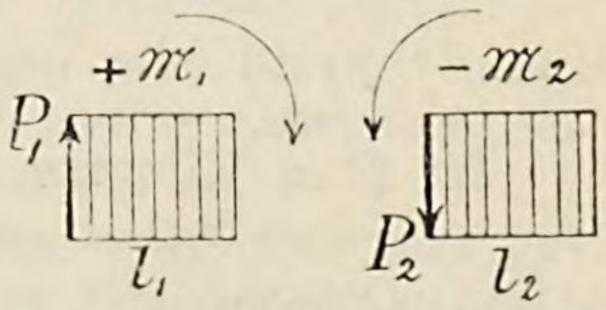


Fig. 185.

*) Auch als Fläche (Fig. 185): Nämlich als Rechteck, welches in der Wirkungsebene des Paares liegt, zur Höhe eine der Kräfte, zur Grundlinie den Arm hat.

dem Parallelogrammgesetze zusammensetzen, zerlegen, ferner nach einer anderen Stelle (Ebene) des festen Körpers verlegen.

Es darf hierbei die gemachte Voraussetzung nicht vergessen werden, dass die Achse stets senkrecht zu derjenigen Ebene steht, in welcher das durch die Achse dargestellte Paar wirkt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.

§ 163.

Hülfssätze. Am wichtigsten ist zunächst der Nachweis, dass es für die Wirkung eines Kräftepaares ganz gleichgültig ist, an welcher Stelle der Ebene dasselbe dreht, oder mit anderen Worten, dass das Kräftepaar unabhängig von einer bestimmten Drehachse zu denken ist; ferner dass das Kräftepaar in jeder der fest miteinander zusammenhängenden gleichlaufenden Ebenen des Körpers genau dieselbe Wirkung auf den Körper ausübt. Dieser Nachweis ist leicht gegeben:

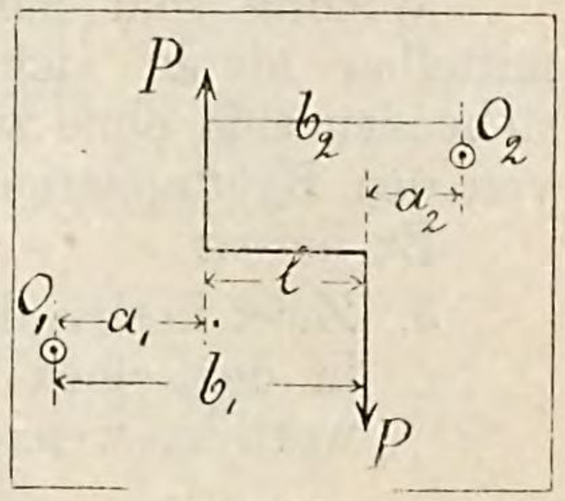


Fig. 187.

Nach dem Satze von den statischen Momenten (§ 110) ist für die beliebig angenommenen Drehachsen O_1, O_2 ... der Fig. 187, das Drehmoment:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= P \cdot b_1 - P \cdot a_1 = P(b_1 - a_1) = P \cdot l \\ \mathfrak{M}_2 &= P \cdot b_2 - P \cdot a_2 = P(b_2 - a_2) = P \cdot l. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 282$$

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = Pl = \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 283$$

Was für diese beiden willkürlich angenommenen Drehachsen gefunden ist, gilt für alle anderen senkrecht zu der Wirkungsebene des Paares stehenden Drehachsen.

Zu demselben Ergebnisse muss man kommen, wenn man das Kräftepaar nach einer beliebigen anderen Stelle **ein und derselben** Ebene, oder **in irgend eine gleichlaufende** Ebene des festen Körpers verlegt.

a.

Zusammensetzung der Kräftepaare.

§ 164.

Die soeben gefundenen Sätze, welche die Richtigkeit früher aufgestellter Behauptungen nachweisen und für das Folgende wichtig sind, lassen sich kurz so fassen:

1. Ein Kräftepaar ist bestimmt durch sein Moment $\mathfrak{M} = P \cdot l$.
2. Ein Paar ist gleichwerthig für jede Drehachse, welche senkrecht stehend zu seiner Wirkungsebene gedacht wird.
3. Eine Verlegung des Paares in seiner Wirkungsebene verändert nicht dessen Wirkung auf den Körper.

4. Auch die Verlegung eines Paares in eine gleichlaufende Ebene bringt keine Veränderung seiner Wirkung auf den Körper hervor.

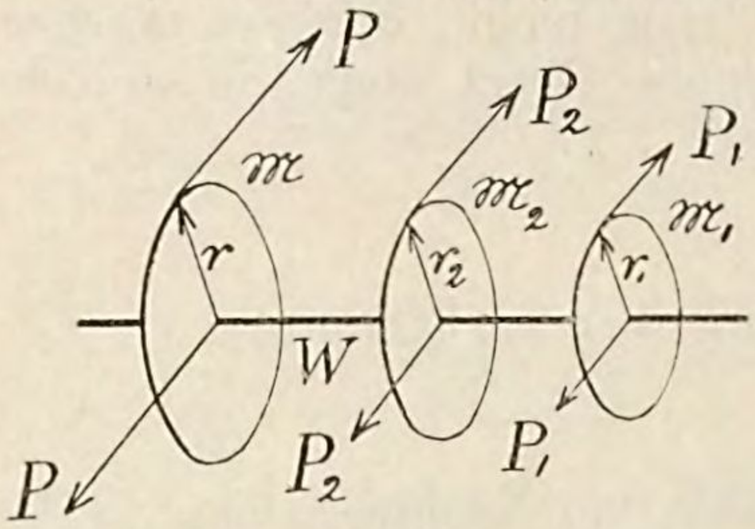


Fig. 188.

Hieraus folgt ohne weiteres, dass die Kräftepaare $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,\ldots$ in gleichlaufenden Ebenen (z. B. der auf einer Triebwerkwelle aufgekeilten Räder) so den Körper (die Triebwerkwelle W) drehen, wie wenn sie sämmtlich in ein und derselben Ebene (eines Rades r dieser Welle) thätig wären.

§ 165.

Wichtig sind nun auch die folgenden Sätze, unter denen der unmittelbar hieran sich anschliessende Satz 5 (welcher aus den voranstehenden sich ohne weiteres ableiten lässt) als der Grundsatz der Lehre von den Kräftepaaren angesehen werden kann.

Er heisst:

5. Zwei in derselben Ebene oder in gleichlaufenden Ebenen wirkende, in demselben Sinne drehende Paare $P_1 l_1$ und $P_2 l_2$ sind gleichwerthig, wenn sie gleiches Moment haben, also den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 l_1 &= P_2 l_2 \\ \frac{P_1}{P_2} &= \frac{l_2}{l_1} \\ P_1 &= \frac{P_2 l_2}{l_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 284$$

genügen.

Die letzte Gleichung zeigt noch, wie sich ein gegebenes Kräftepaar $P_2 l_2$ auf ein anderes gleichwerthiges zurückführen lässt, für welches der Arm l_1 vorgeschrieben ist.

Man kann:

$$P_1 = \frac{P_2 l_2}{l_1}$$

die auf den Arm l_1 gebrachte (reducirte) Kraft des gegebenen Paares $P_2 l_2$ nennen.

Aus dem Satze 5 folgt noch:

6. Zwei in derselben oder in gleichlaufenden Ebenen wirkende, im entgegengesetzten Sinne drehende Paare von gleichem Momente heben sich auf oder halten sich im Gleichgewicht. Das sie ersetzende gleichwerthige Paar (das resultirende Paar) ist Null.

Unter 6 gehört das früher (§ 106) behandelte Beispiel vom Berghaspel.

Beispiel 82: Bei einer Windevorrichtung (bergmännischen Fördervorkehrung u. s. w.) (Fig. 189) ist um eine Trommel vom Halbmesser $l_2 = 0{,}5$ m ein Seil geschlagen. Am Ende dieses Seiles hängt die Last $P_2 = 1000$ kg. Fügen wir zunächst (was nach § 149 ohne weiteres geschehen darf) in C die beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_2 hinzu, so ergiebt sich hieraus die Einzelkraft (punktirte) P_2 und das Kräftepaar $P_2 l_2$. Beim Hängen (Hinunterlassen) der Last muss die Welle gebremst werden.

Das geschieht durch die gegen die Scheibe (Bremsscheibe) vom Durchmesser $l_1 = 2$ m fest gedrückten Bremsbacken B. Der hier zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Reibungswiderstand P_1 ergiebt sich aus der Gleichung:

$$P_1 = \frac{P_2 l_2}{l_1} = \frac{1000 \cdot 0{,}5}{2} = 250 \text{ kg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 285$$

Es darf nicht befremden, dass l_2 als Halbmesser, dagegen l_1 als Durchmesser der betreffenden Räder auftreten.

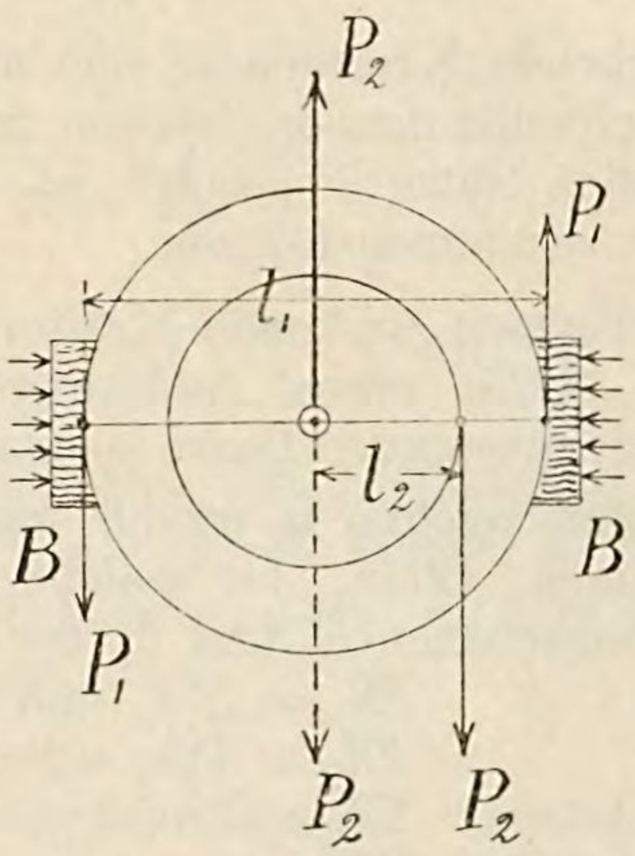
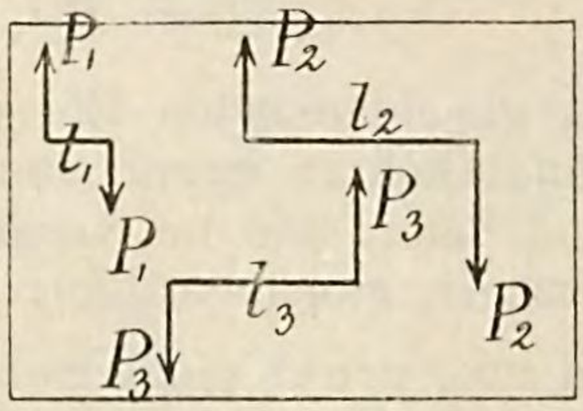


Fig. 189.



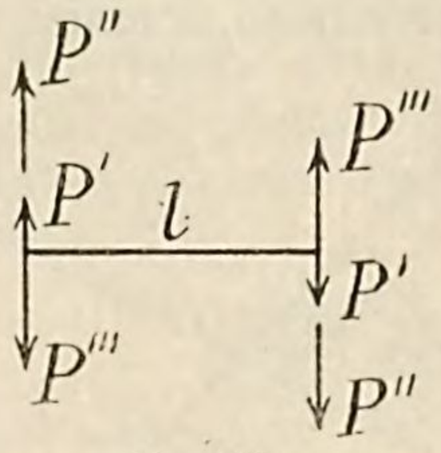


Fig. 190.

§ 166.

7. Die in derselben Ebene gegebenen Kräftepaare (Fig. 190):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= P_1 l_1 = 5 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ mkg}, \\ \mathfrak{M}_2 &= P_2 l_2 = 10 \text{ kg} \cdot 6 \text{ m} = 60 \text{ mkg}, \\ -\mathfrak{M}_3 &= -P_3 l_3 = -11 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m} = -55 \text{ mkg} \end{aligned}$$

lassen sich durch ein einziges gleichwerthiges (resultirendes) Kräftepaar ersetzen, dessen Moment:

$$Pl = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = 10 + 60 - 55 = 15 \text{ mkg ist.} \quad . \quad 286$$

Oder in Worten:

Das Moment $\mathfrak{M} = Pl$ des gleichwerthigen Kräftepaares ist gleich der algebraischen Summe der Momente der in einer Ebene gegebenen Kräftepaare.

Die Richtigkeit des Satzes lässt sich folgendermassen zeigen:

Nennt man der Reihe nach $P' P'' P'''$ die auf den gleichen Arm, z. B. $l = 5$ m, gebrachten Kräfte der gegebenen Paare, so ergeben sich nach Satz 5 die Gleichungen:

$$P'l = P_1 l_1; \quad P''l = P_2 l_2; \quad P'''l = -P_3 l_3.$$

oder:

$$\begin{aligned} P' &= \frac{P_1 l_1}{l} = \frac{10}{5} = +2 \text{ kg}, \\ P'' &= \frac{P_2 l_2}{l} = \frac{60}{5} = +12 \text{ kg}, \\ P''' &= -\frac{P_3 l_3}{l} = -\frac{55}{5} = -11 \text{ kg}; \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$P = P' + P'' + P''' = \frac{P_1 l_1}{l} + \frac{P_2 l_2}{l} - \frac{P_3 l_3}{l} = 2 + 12 - 11 = 3 \text{ kg.}$$

oder wie oben:

$$P \cdot l = 3 \cdot 5 = 15 = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = P_1 l_1 + P_2 l_2 - P_3 l_3.$$

Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ist:

$$O = P \cdot l,$$

$$O = P_1 l_1 + P_2 l_2 - P_3 l_3.$$

8. In gleichlaufenden Ebenen wirkende Kräftepaare sind nach Satz 3 sämmtlich in irgend eine der gleichlaufenden Ebenen zu verlegen und dann, wie im vorangehenden Satze 7 gezeigt ist, zu einem einzigen gleichwerthigen Paare zusammenzusetzen.

9. In zwei nicht gleichlaufenden Ebenen wirkende Kräftepaare (Fig. 191) lassen sich leicht mit Hülfe eines Achsenparallelogrammes zu einem einzigen gleichwerthigen Paare zusammensetzen.

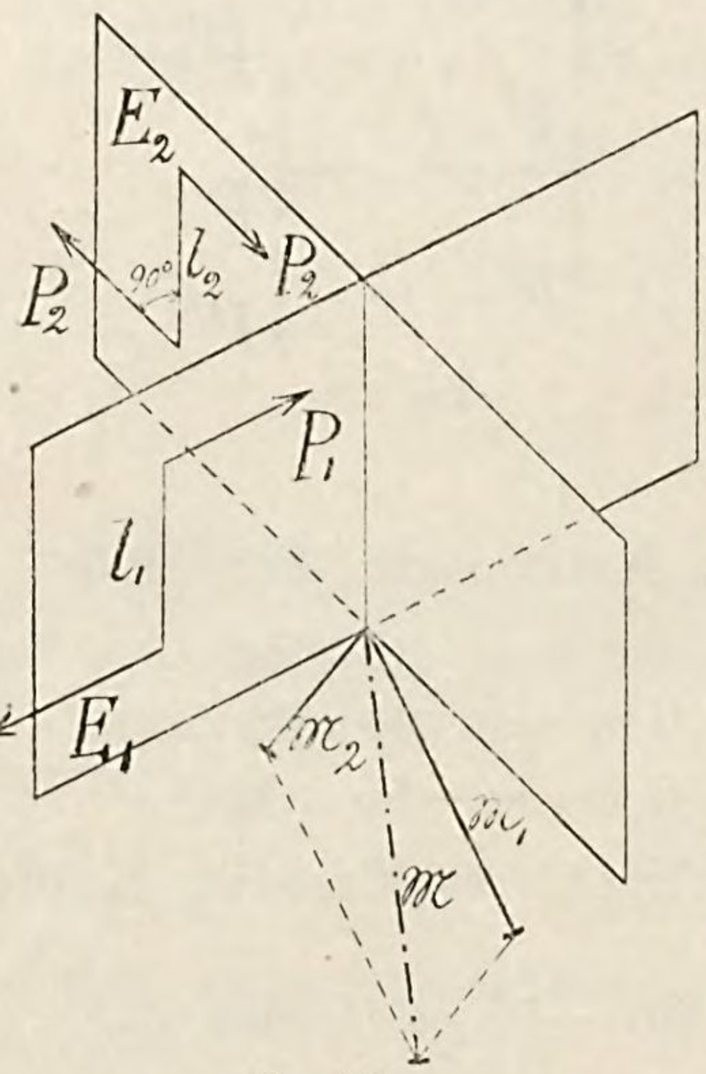


Fig. 191.

Man zeichne in irgend einem Punkte derjenigen Linie, in welcher sich die Wirkungsebenen E_1 und E_2 der gegebenen Paare $\mathfrak{M}_1 = P_1 l_1$ und $\mathfrak{M}_2 = P_2 l_2$ schneiden, die „Achsen“ $\mathfrak{M}_1$ senkrecht zur Ebene E_1, $\mathfrak{M}_2$ „ „ „ E_2, sodann ist die Ueberecklinie des über $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ verzeichneten Parallelogrammes der Grösse und Richtung nach die Achse des gleichwerthigen Kräftepaares:

$$\mathfrak{M}.$$

Die Wirkungsebene des letzteren ist dann eine von den unzählig vielen, senkrecht zu der gefundenen Achse $\mathfrak{M}$ stehenden gleichlaufenden Ebenen.

An der Richtigkeit des Verfahrens ist nicht zu zweifeln, wenn man die Achsen, wie oben § 161 angenommen wurde, voll und ganz als bildliche Darstellung (s. z. s. als Vertreter) der Kräftepaare ansieht.

Wem es um einen besonderen Beweis zu thun ist, sehe Ritter, Technische Mechanik, 5. Auflage, S. 167.

§ 167.

Auch mit Hülfe des Polygonsatzes hätte man $\mathfrak{M}$ die Achse des gleichwerthigen Paares und damit letzteres selbst finden können, indem man (wie bei den Einzelkräften § 78 gezeigt wurde) die gegebenen Achsen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ der Grösse und Lage nach in beliebiger Reihenfolge aneinanderreihte (Fig. 192).

Die Verbindende des Anfangspunktes der ersten Achse mit dem Endpunkte der letzten Achse ist dann die gesuchte Achse.

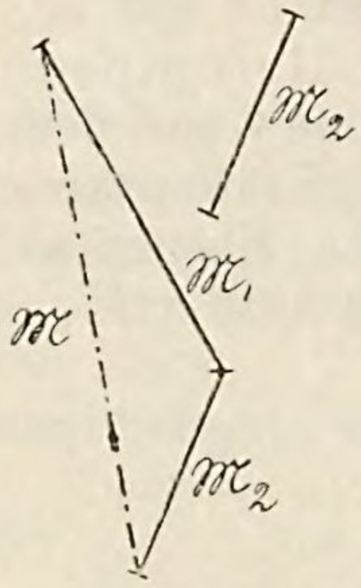


Fig. 192.

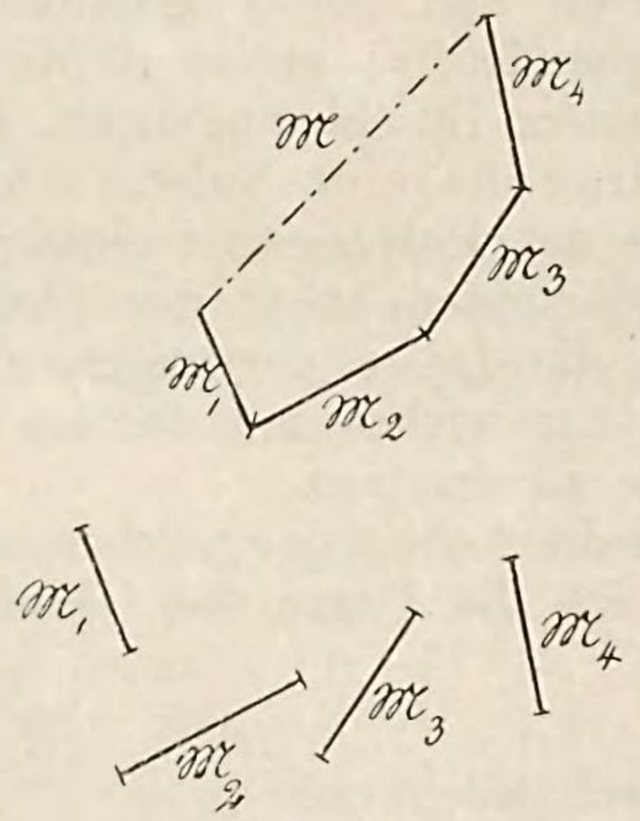


Fig. 193.

In derselben Weise lässt sich für eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Paare, deren Achsen $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{M}_3$ ..... sind, die Achse $\mathfrak{M}$ des gleichwerthigen Kräftepaares mittelst des Parallelogramm- oder Polygon-Satzes bestimmen.

β.

Zerlegung der Kräftepaare.

§ 168.

Wenn sich mehrere gegebene Kräftepaare zu einem einzigen gleichwerthigen Kräftepaare mittels des Parallelogramm- oder Polygongesetzes nach genau denselben Regeln zusammensetzen lassen, welche bei Behandlung der Einzelkräfte aufgestellt wurden, so muss sich umgekehrt auch nach den entsprechenden Regeln ein gegebenes Kräftepaar in einzelne Kräftepaare, für welche die Lage der Wirkungsebenen, bezw. die Richtungen der Achsen vorgeschrieben sind, zerlegen lassen.

Das Verfahren der Zerlegung und Zusammensetzung von beliebigen Kräftepaaren soll durch folgende Beispiele erläutert werden.

γ.

Die zusammenzusetzenden Kräftepaare wirken in beliebig gelegenen Ebenen des festen Körpers.

Wirken die gegebenen Kräftepaare mit den Momenten $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{M}_3$ .., in beliebigen Ebenen des Körpers, so kann man das einzige gleichwerthige (resultirende) Kräftepaar sowohl durch Zeichnung als auch durch Rechnung ermitteln.

§ 169.

1. Durch Zeichnung:

Man verschiebt die gegebenen Ebenen mit sammt den darin wirkenden Paaren parallel ihrer Lage so, dass sie sämmtlich ein und denselben

Punkt o gemein haben, zeichnet nun in diesem Punkte senkrecht zu den betreffenden Ebenen in bekannter Weise die Momenten-Achsen $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3$ ..... und setzt nun die so erhaltenen Achsen nach dem Parallelogramm- oder Polygon-Gesetze genau in derselben Weise zusammen wie für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte gezeigt ist (§§ 77, 78).

Die Diagonale des zuletzt erhaltenen Parallelopipedons bezw. die Schlusslinie des Polygons ist nicht nur der Grösse und dem Drehsinne nach die Momenten-Achse des gleichwerthigen Kräftepaares, sondern sie giebt auch die Lage derjenigen gleichlaufenden Ebenen an, in welcher das Kräftepaar wirken müsste, um die Wirkung sämmtlicher gegebener Kräftepaare zu ersetzen.

Bilden die Achsen der gegebenen Kräftepaare ein geschlossenes Vieleck, so halten sich die Paare das Gleichgewicht.

§ 170.

2. Durch Rechnung:

Schliessen die gegebenen Momenten-Achsen: $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3 \ldots$
mit der OX die Winkel: $A_1\ A_2\ A_3 \ldots$
„ „ OY „ „ $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$
„ „ OZ „ „ $C_1\ C_2\ C_3 \ldots$
ein, so ergiebt sich die einzige gleichwerthige (resultirende) Achse durch die Gleichungen:

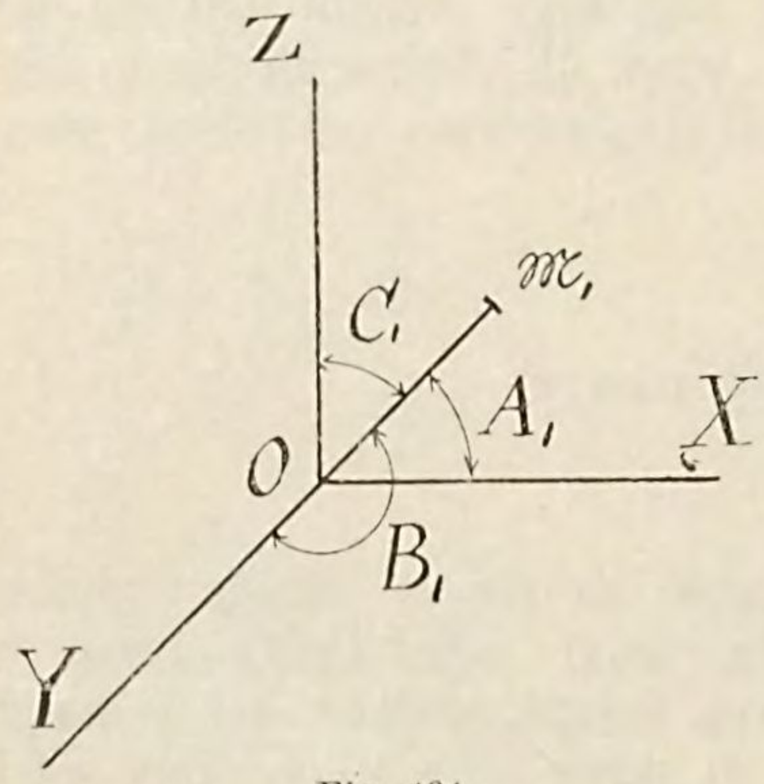


Fig. 194.

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} \text{ nach Grösse } 287$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} \\ \cos B &= \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}} \\ \cos C &= \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}} \end{aligned}\right\} \ldots \text{ nach Richtung } 288$$

Wenn:
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{M}_1 \cos A_1 + \mathfrak{M}_2 \cos A_2 \pm \ldots \\ \mathfrak{M}_y &= \mathfrak{M}_1 \cos B_1 + \mathfrak{M}_2 \cos B_2 \pm \ldots \\ \mathfrak{M}_z &= \mathfrak{M}_1 \cos C_1 + \mathfrak{M}_2 \cos C_2 \pm \ldots \end{aligned}\right\} \text{ ist.} \quad \ldots\ldots\ 289$$

Später (§ 176) werden die Momente auch durch die sie bestimmenden Grössen: die Kräfte und Hebelarme, ausgedrückt.

Ist so die Grösse und Richtung der gleichwerthigen Momenten-Achse $\mathfrak{M}$ gefunden, so ist damit auch die Lage des Kräftepaares gegeben. Dasselbe wirkt in irgend einer Ebene, welche senkrecht zu der gefundenen Momenten-Achse steht.

§ 171.

Fürs Gleichgewicht muss sein:

das ist aber nur möglich für:
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 0 \\ \mathfrak{M}_x &= 0 \\ \mathfrak{M}_y &= 0 \\ \mathfrak{M}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 290$$

δ.

Zusammensetzung und Zerlegung von Einzelkräften und Kräftepaaren.

§ 172.

Bislang wurden zuerst nur Einzelkräfte, dann nur Kräftepaare zusammengesetzt und zerlegt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass eine Einzelkraft und ein Kräftepaar sich zu einer einzigen Resultanten von bestimmter Grösse, Richtung und Lage zusammensetzen lassen.

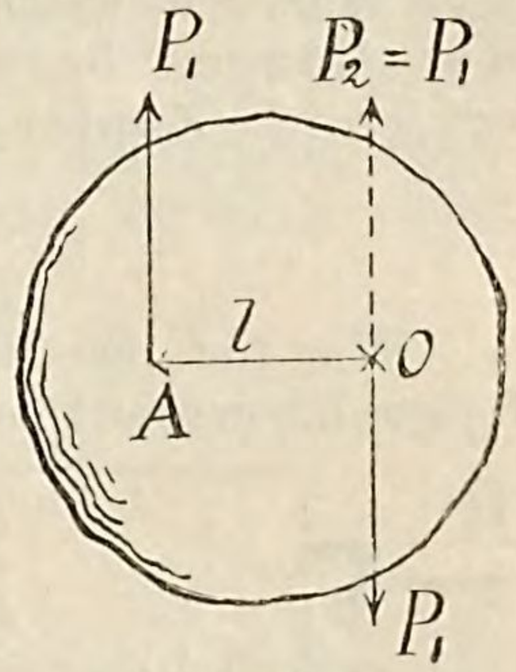


Fig. 195.

Die Einzelkraft P_1 wirke in einem Punkte A des Körpers. Bringen wir nun in einem beliebigen anderen Punkte O, welcher von der gegebenen Kraft um l absteht, zwei Kräfte $P_1 P_2$ an, welche einander entgegengesetzt gerichtet, übrigens parallel und gleich der gegebenen Kraft P_1 sind, so wird hierdurch an dem Bewegungszustande des Körpers (§ 149) nichts geändert. Wir haben jetzt an dem Körper wirkend, anstatt der ursprünglich gegebenen in A angreifenden Kraft P_1, ein Kräftepaar $P_1 l$ und die in O angreifende Einzelkraft P_2, welche der ursprünglich gegebenen Kraft genau gleich und parallel ist und punktirt wurde um sie hervorzuheben.

Unser Verfahren zeigt uns dreierlei:

1. dass eine Einzelkraft P_1 zerlegt werden kann in ein Kräftepaar $P_1 l$ und eine Einzelkraft P_2;
2. dass umgekehrt ein Kräftepaar $P_1 l$ und eine Einzelkraft P_2 zusammengesetzt werden können zu einer Einzelkraft P_1,
3. dass eine in A angreifende Einzelkraft P_1 parallel zu sich verschoben werden kann um die beliebige Strecke l, dann aber noch das Kräftepaar $P_1 l$ hinzuzufügen ist, wenn der Gleichgewichtszustand nicht verändert werden soll.

§ 173.

Unsere Ergebnisse sind zugleich anzusehen als eine Ergänzung des Verfahrens, den Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtungslinie zu verlegen (§ 149). Für die vorhin an einem beliebigen Körper rein wissenschaftlich und allgemein besprochenen Vorgänge sind in zahllosen Fällen der Technik praktische und bestimmte Beispiele zu finden.

Ein Beispiel, welches als Vertreter einer grossen Zahl von hierhergehörigen Vorgängen gelten kann, wurde bereits oben (§ 159) herangezogen und besprochen. Noch ein anderes: Am Ende der Kurbel, sei es eines gewöhnlichen von Menschenhänden gedrehten Berghaspels (siehe das Beispiel § 106), sei es des Kurbelgetriebes irgend einer Maschine (Dampf-

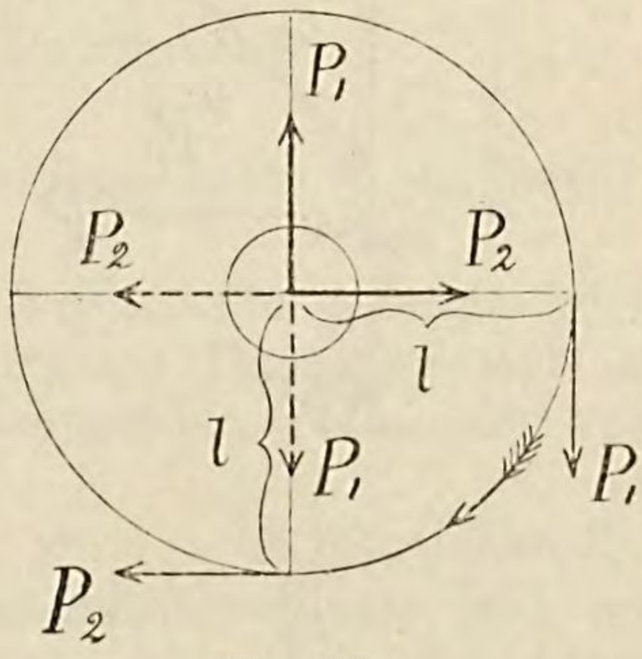


Fig. 196.

maschine u. s. w.) wirken im Laufe der Drehung, die unter sich gleich angenommenen, der Richtung nach veränderlichen Kräfte $P_1 P_2 \ldots$ (Fig. 196). Diese von der Triebkraft auf das Ende der Kurbel übertragenen Einzelkräfte zerlegen sich:

1. in je ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = P_1 l = P_2 l \ldots\ldots$, welches die Drehung und
2. in eine Einzelkraft, welche den Zapfendruck $P_1 P_2 \ldots\ldots$ veranlasst und welche durch Punktiren hervorgehoben wurde.

Wir kommen so zugleich zu einer für den Maschinenbau sehr wichtigen Wahrheit, welche kurz sich folgendermassen ausdrücken lässt: Grosse Hebellängen bezw. grosse Halbmesser der Triebräder führen auf kleine Zapfendrücke. (Siehe auch § 89.)

§ 174.

Wie tief das Erörterte selbst in die Vorrichtungen des alltäglichen Lebens hineingreift, beweist uns jede in ihren Angeln hängende Thür (Fig. 197):

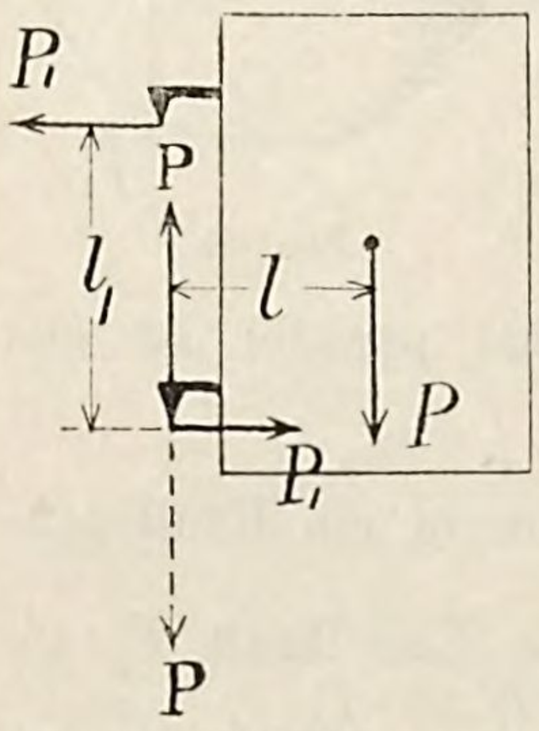


Fig. 197.

Die Kraft P, welche als Gewicht der Thür aufgefasst werden mag, erzeugt das Kräftepaar Pl und die (punktirte) Einzelkraft P.

Letzterer muss durch den Widerstand der festen Unterstützung; dagegen dem Kräftepaare, durch ein Kräftepaar:

$$P_1 l_1 = Pl,$$

welches in den Thürangeln hervorgerufen wird, begegnet werden.

Eine ganz ähnliche Betrachtung liesse sich an einen Drehkran (Fig. 198) knüpfen, an welchem das eigene Gewicht P_1 und die angehängte Last P_2 angreifen.

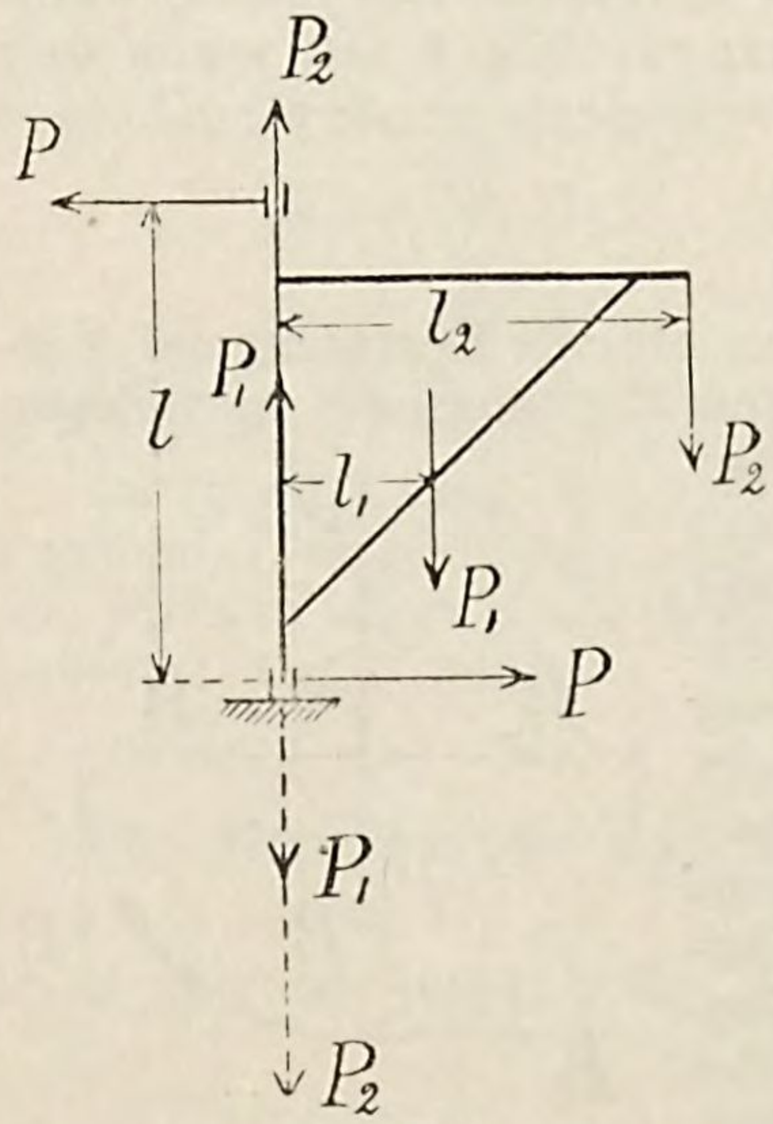


Fig. 198.

Die feste Unterstützung hat den Vertikaldruck $V = P_1 + P_2$, die Drehzapfen haben das Kräftepaar:

$$Pl = P_1 l_1 + P_2 l_2$$

bezw. den Horizontaldruck:

$$P = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{l} \quad \ldots \quad 291$$

auszuhalten.

Beispiel 83: $P_1 = 2000$ kg,
$P_2 = 1000$ kg,
$l_1 = 2$ m,
$l_2 = 3$ m,
$l = 4$ m,
so würde sein: $V = 3000$ kg,
$P = 3500$ kg.

Die Erweiterung der Aufgabe ist im Folgenden (§ 181) gegeben.

B.

Allgemeinster Fall.

Die sechs allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik

oder

Bewegungserscheinungen an einem Körper, auf welchen Kräfte in beliebigen Ebenen, Punkten und Richtungen einwirken.

§ 175.

Allgemeine Betrachtungen. Um den nun noch zu erörternden, allgemeinsten Fall der Mechanik zu bringen, verfolgen wir zunächst wieder einen Vorgang aus dem alltäglichen Leben, nämlich die Bewegungen eines Rades an einem gewöhnlichen Wagen.

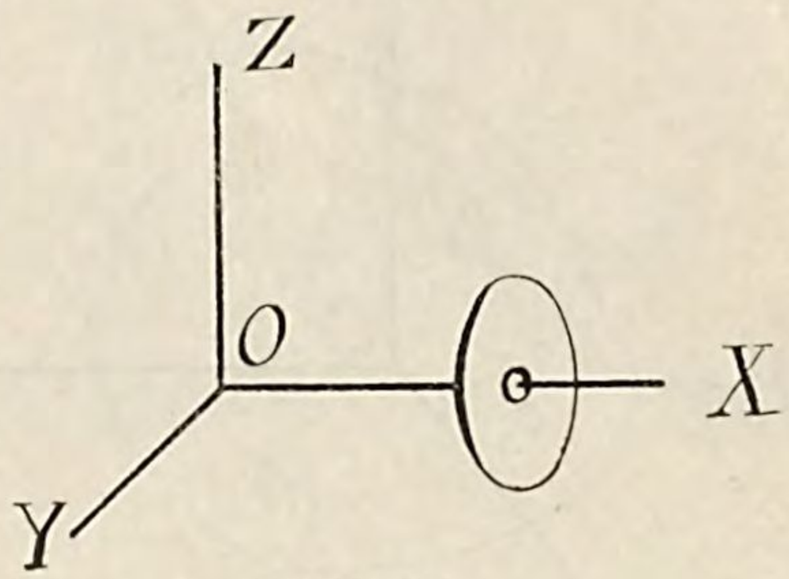


Fig. 199.

Dasselbe soll recht unsorgfältig mit grossem Spielraume auf der Achse OX aufgebüchst sein, so dass es während des Fortrollens sich längst der Achse hin und her verschieben kann und ausserdem schlägt, d. h. pendelartig hin und her schwingt.

Der Wagen und damit das Rad wird durch die Kraft der Pferde in der senkrecht zu X stehenden Richtung Y rasch fortgezogen. Durch die Schwerkraft wird der Wagen erdwärts gezogen. Der Widerstand der Fahrbahn verhindert die Bewegung in dieser Richtung Z. Die drei Richtungen (Achsen) XYZ stehen senkrecht zueinander.

Der Weg ist holperig. Jedesmal, wenn das Rad über einen Stein gezogen wird, hüpft es in die Höhe, führt also eine Bewegung in der Z-Richtung aus.

An unserem Rade lassen sich deshalb sechs voneinander grundverschiedene Bewegungen erkennen:

1. eine Schiebung längs der X (Hin- und Hergleiten auf der Achse),
2. „ „ „ „ Y (Fortschreiten in der Zugrichtung),
3. „ „ „ „ Z (Hüpfen),
4. eine Drehung um die X (beim Fortrollen),
5. „ „ „ „ Y (Hin- und Herwanken),
6. „ „ „ „ Z (Schlängeln).

Diese sechs Bewegungen treten um so deutlicher hervor, je freier, ungezwungener das Rad auf seiner Achse läuft.

Je vollkommener dagegen ein Rad geführt wird, desto geringer wird die Zahl und die Grösse der möglichen Bewegungen. Das lässt sich an einem gut ausgeführten Eisenbahnwagen schon beobachten. Was hier von einem Rade gesagt ist, gilt ganz allgemein.

In der Technik ist man von jeher bestrebt, jene sechs möglichen Bewegungen auf die zulässige geringste Zahl einzuschränken, so dass bei Betrachtung technischer Vorkehrungen meist nur eine oder nur einige

jener Bewegungen zu berücksichtigen sind. In den weitaus meisten Fällen gehen die Bewegungen in ein und derselben Ebene vor sich. So z. B. betrachtet und verfolgt man die Bewegungen der einzelnen Theile des Kurbelgetriebes einer Dampfmaschine in der durch die Mittellinie der Kolbenstange gelegten lothrechten Ebene (Fig. 92). (Siehe auch Seite 150 unter B.)

§ 176.

Beispiel 84: An einem Körper wirken Kräfte von beliebiger Grösse, Richtung und Lage, es sind zu ermitteln:

1. die gleichwerthige Mittelkraft, bezw. das gleichwerthige Kräftepaar,
2. die allgemeinen Bedingungen, unter welchen sich die Kräfte an dem Körper im Gleichgewicht halten.

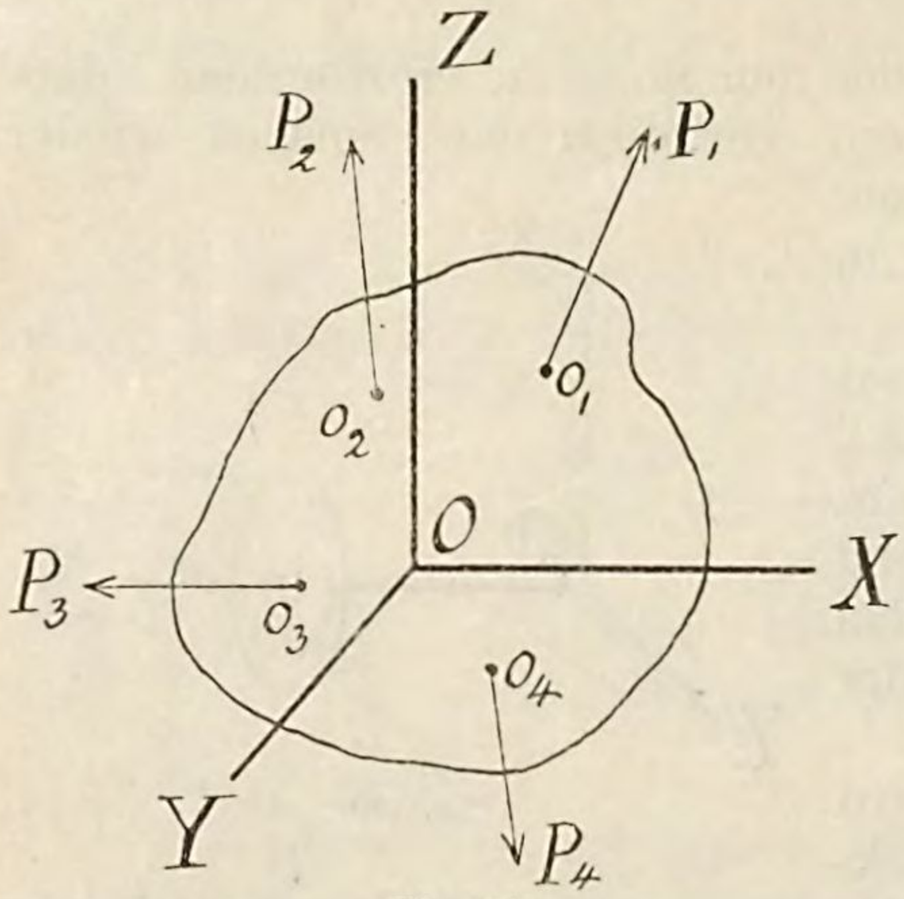


Fig. 200.

Um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, sind die Kräfte auf ein festliegendes, übrigens willkürlich gewähltes Achsensystem zu beziehen.

Der Anfangspunkt sei O und die drei rechtwinklig zueinander stehenden Achsen seien:

$$OX,\ OY,\ OZ.$$

Die in den Punkten $o_1\, o_2\, o_3 \ldots$ (Fig. 200, 201) angreifenden Kräfte seien nun bestimmt:

der Grösse nach durch . . . . . $P_1\, P_2\, P_3 \ldots$
der Richtung nach durch die Winkel . . . . . $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$
$b_1\ b_2\ b_3 \ldots$
$c_1\ c_2\ c_3 \ldots$

der Lage nach durch die Coordinaten ihrer Angriffspunkte:

$x_1\, x_2\, x_3 \ldots$
$y_1\, y_2\, y_3 \ldots$
$z_1\, z_2\, z_3 \ldots$

In der Fig. 201 sind (um diese möglichst einfach zu gestalten), nur für die Kraft P_1 die bestimmenden Grössen verzeichnet.

Man bringe jetzt in dem Punkte O zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte an, welche beide gleich und gleichlaufend P_1 sind. Hierdurch wird am Gleichgewicht nichts geändert (§ 149).

So erhält man die in O angreifende Einzelkraft P_1 (welche der Deutlichkeit wegen punktirt ist), dazu das Kräftepaar $P_1 P_1$ mit dem Hebelarme l_1, dessen Momentenachse $\mathfrak{M}_1 = P_1 l_1$ ist.

Diese Momenten-Achse steht nach dem Früheren senkrecht zur Ebene des Kräftepaares (die in der Figur durch Striche angedeutet ist), enthält

soviel Längeneinheiten, als das Moment des Paares angiebt und mag in O errichtet sein.

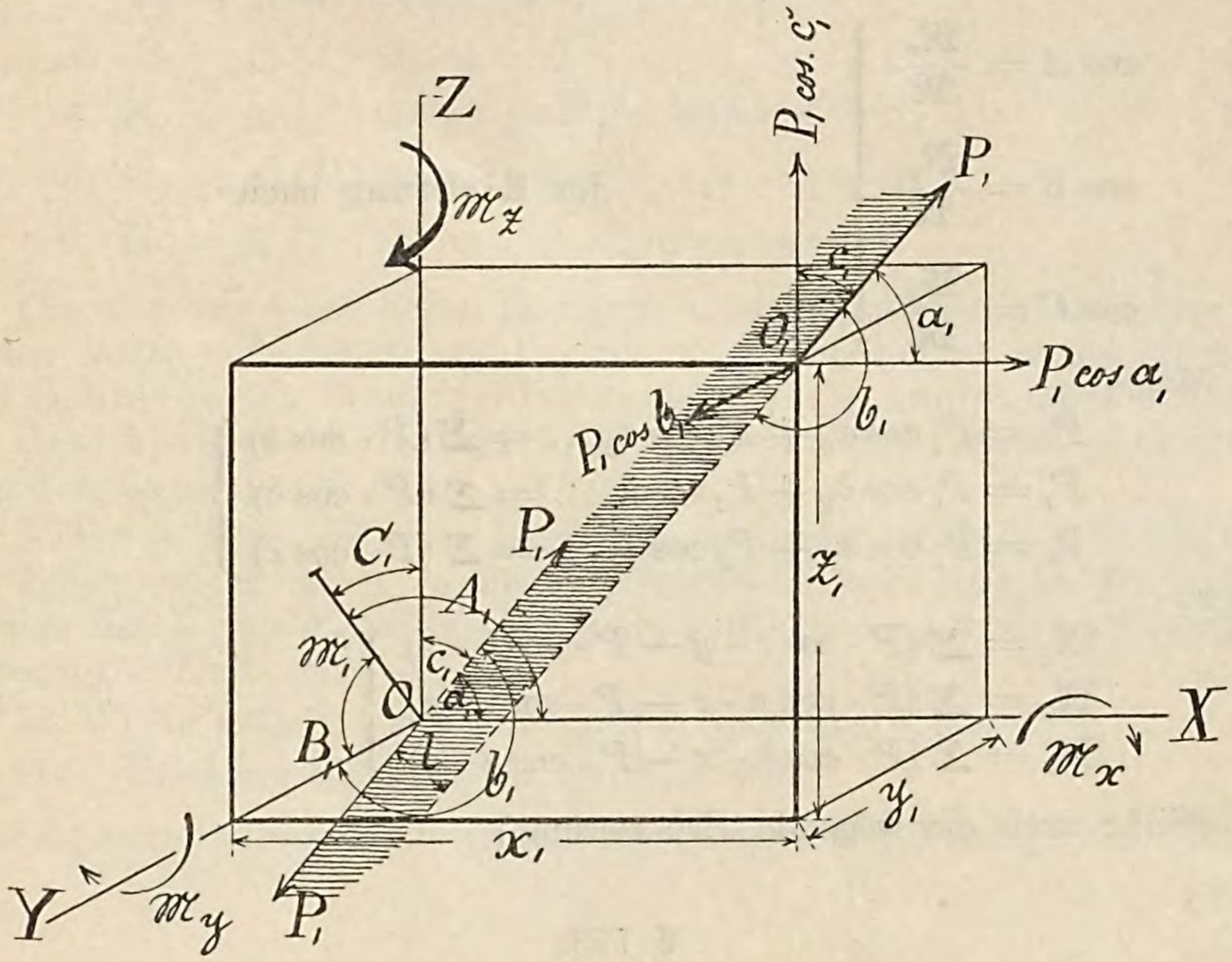


Fig. 201.

Führt man dasselbe Verfahren für eine jede der gegebenen Kräfte durch, so erhält man in ein und demselben Punkte O so viele Einzelkräfte und so viele Momenten-Achsen als ursprünglich Kräfte gegeben waren.

Setzt man die Einzelkräfte für sich und ebenso die Momenten-Achsen nach dem bekannten Verfahren zusammen, so erhält man (Fig. 202):

1. eine einzige Einzelkraft P und
2. eine einzige Achse $\mathfrak{M}$;

beide bestehen selbständig nebeneinander und ersetzen so die ursprünglich gegebenen Kräfte.

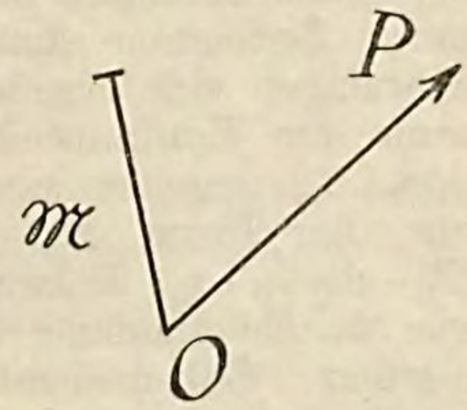


Fig. 202.

§ 177.

Durch Rechnung findet man:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \text{ der Grösse nach } \ldots \ldots 292$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{P_x}{P} \\ \cos b &= \frac{P_y}{P} \\ \cos c &= \frac{P_z}{P} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \text{ der Richtung nach } \ldots 293$$

ferner:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} \text{ der Grösse nach . . . . 294}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} \\ \cos B &= \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}} \\ \cos C &= \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}} \end{aligned}\right\} \text{ . . . . der Richtung nach . . . . 295}$$

Wenn:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 \ldots = \Sigma\,(P \cdot \cos a) \\ P_y &= P_1 \cos b_1 + P_2 \cos b_2 \ldots = \Sigma\,(P \cdot \cos b) \\ P_z &= P_1 \cos c_1 + P_2 \cos c_2 \ldots = \Sigma\,(P \cdot \cos c) \end{aligned}\right\} \text{ . . . 296}$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \Sigma\,(P \cdot \cos c \cdot y - P \cdot \cos b \cdot z) \\ \mathfrak{M}_y &= \Sigma\,(P \cdot \cos a \cdot z - P \cdot \cos c \cdot x) \\ \mathfrak{M}_z &= \Sigma\,(P \cdot \cos b \cdot x - P \cdot \cos a \cdot y). \end{aligned}\right\} \text{ . . . . . 297}$$

(Siehe auch die folgende Erläuterung.)

§ 178.

Erläuterung. $\mathfrak{M}_x$ in Fig. 201 ist das Moment oder die Summe aller Momente, die um die X-Achse drehen; oder $\mathfrak{M}_x$ ist auch aufzufassen als die algebraische Summe der in die OX-Richtung fallenden Antheile sämmtlicher Momenten-Achsen der vorhandenen Kräftepaare; oder auch die algebraische Summe der auf die OX-Achse bezogenen Momente derjenigen Kraftantheile ($P_1 \cos a_1$, $P_1 \cos b_1$, $P_1 \cos c_1 \ldots$), welche durch Zerlegung sämmtlicher gegebener Kräfte ($P_1 P_2 \ldots$) nach den drei Achsenrichtungen sich ergeben. Aus der Figur geht ohne weiteres hervor, dass die Hebelarme der Kraftantheile durch die Coordinaten ($x_1 y_1 z_1 \ldots$) der Kraftangriffspunkte ($o_1 o_2 \ldots$) gegeben sind; ferner dass z. B. in Bezug auf die OX-Achse die Momente von der Form ($P_1 \cdot \cos c_1 \cdot y_1$) rechtsdrehend, dagegen diejenigen von der Form ($P_1 \cdot \cos b_1 \cdot z_1$) linksdrehend sind und die Kraftantheile von der Form ($P_1 \cos a_1$), wie sie gleichlaufend der OX sind, überhaupt kein Moment in Bezug auf diese Achse ergeben. Selbstredend haben auch diejenigen Kräfte, die durch die Achse OX hindurchgehen, bezw. im Punkte O angreifen, kein Moment.

Was in Bezug auf die OX-Achse gesagt ist, gilt in entsprechender Weise auch bezüglich der übrigen Achsen, so dass die Richtigkeit der drei Gleichungen 297 für:

$$\mathfrak{M}_x,\ \mathfrak{M}_y,\ \mathfrak{M}_z$$

unzweifelhaft ist.

§ 179.

Für das Gleichgewicht muss sein:

$$P = 0, \text{ . . . . . 298}$$

und zugleich:

$$\mathfrak{M} = 0, \text{ . . . . . 299}$$

woraus sich die gesuchten sechs Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

1. $P_x = \Sigma\,(P \cdot \cos a) = 0$, ... 300
2. $P_y = \Sigma\,(P \cdot \cos b) = 0$, ... 301
3. $P_z = \Sigma\,(P \cdot \cos c) = 0$, ... 302
4. $\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(P \cdot \cos c \cdot y - P \cdot \cos b \cdot z) = 0$, ... 303
5. $\mathfrak{M}_y = \Sigma\,(P \cdot \cos a \cdot z - P \cdot \cos c \cdot x) = 0$, ... 304
6. $\mathfrak{M}_z = \Sigma\,(P \cdot \cos b \cdot x - P \cdot \cos a \cdot y) = 0$. 305

Die überhaupt möglichen Bewegungen eines Punktes in einem freien Körper lassen sich sonach auf zweimal drei Bewegungen zurückführen:
drei Schiebungen längs dreier rechtwinklig zueinander stehenden, übrigens willkürlich gewählten Coordinaten-Achsen,
drei Drehungen um diese Achsen.

Sollen jetzt die auf einen Körper einwirkenden, beliebigen Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so müssen sämmtliche sechs Gleichungen erfüllt, es muss der Kräfteüberschuss im Sinne einer jeden der sechs möglichen Bewegungen Null sein.

In Worte gefasst würden die sechs Gleichungen lauten:

Soll Gleichgewicht bestehen, so muss sein:

1. die algebraische Summe aller Kraftantheile in der X-Richtung = Null (300),
2. „ „ „ „ „ „ „ Y- „ = „ (301),
3. „ „ „ „ „ „ „ Z- „ = „ (302),
4. „ „ „ aller Kraftmomente, die um die X drehen = „ (303),
5. „ „ „ „ „ „ „ „ Y „ = „ (304),
6. „ „ „ „ „ „ „ „ Z „ = „ (305).

§ 180.

Die Körper, mit denen der Techniker zu thun hat, sind nie frei (wie z. B. ein im Raume schwebender Himmelskörper), sondern stets durch natürliche oder künstliche Widerstände in bestimmte Bahnen gezwängt.

(Man sehe auch, was später § 265 von freien Achsen gesagt wird.)

Man darf dreist behaupten, dass von jeher das Dichten und Trachten des Menschen darauf gerichtet war, die mehr oder weniger freien Bewegungen in der Natur zu unfreien gezwungenen Bewegungen zu machen.

Das vom Winde auf der Erdoberfläche regellos dahingetriebene Laubblatt führt allerdings alle sechs Bewegungen aus. Auch an dem auf holperigem Wege dahinrollenden Wagenrade möchten sich (wie oben geschildert wurde) alle sechs Bewegungen noch deutlich nachweisen lassen. Schwer ist jedoch dieser Nachweis schon am Rade eines sorgfältig hergestellten Eisenbahnwagens. Dieses führt im wesentlichen nur die beiden gewünschten Bewegungen: eine Drehbewegung um die Achse und eine fortschreitende in der Zugrichtung aus.

Bei den meisten Untersuchungen des Gleichgewichtszustandes der in der Technik verwendeten Körper, werden deshalb oft nur eine oder zwei

jener sechs allgemeinen Gleichungen zu berücksichtigen sein. Auch wird die Betrachtung dadurch sehr vereinfacht, dass dem übrigens willkürlich anzunehmenden Anfangspunkte O des Achsensystems eine zweckmässige Lage gegeben wird. Wie das zu verstehen ist, sollen folgende Beispiele aus der Technik lehren.

§ 181.

Beispiel 84: An einem Hüttenkrane wirken in den Punkten o_1 und o_2 die lothrecht gerichteten Kräfte:

$$P_1 = 8000 \text{ kg},$$
$$P_2 = 1000 \text{ kg},$$

von denen die erstere als die zu hebende Last, die andere als Eigengewicht angesehen werden mag.

Die Drehachse (Säule) des Kranes sei durch Zapfenlager in O und N unterstützt und geführt. Die Hebelarme der Kräfte P_1 und P_2 in Bezug auf diese Drehachse seien:

$$x_1 = 4 \text{ m},$$
$$x_2 = 2 \text{ m}.$$

Die Entfernung der beiden Lager O und N voneinander sei:

$$z = 5 \text{ m}.$$

Es sollen diejenigen Kräfte gefunden werden, mit welchen die Lager auf die Kransäule einwirken müssen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

Damit die Säule nicht fällt, muss im unteren Lager eine Vertikalkraft V geäussert werden; damit sie nicht vorn überkippt, im oberen Lager bei N die nach hinten gerichtete Horizontalkraft H_1 wirken; damit sie schliesslich bei O nicht nach hinten ausweicht (was geschehen würde, wenn sie hier auf einer horizontalen glatten Eisfläche aufruhte), muss von dem unteren Lager auf den Zapfen eine nach vorn gerichtete Horizontalkraft H_2 ausgeübt werden. Alle Kräfte wirken in derselben vertikalen Ebene.

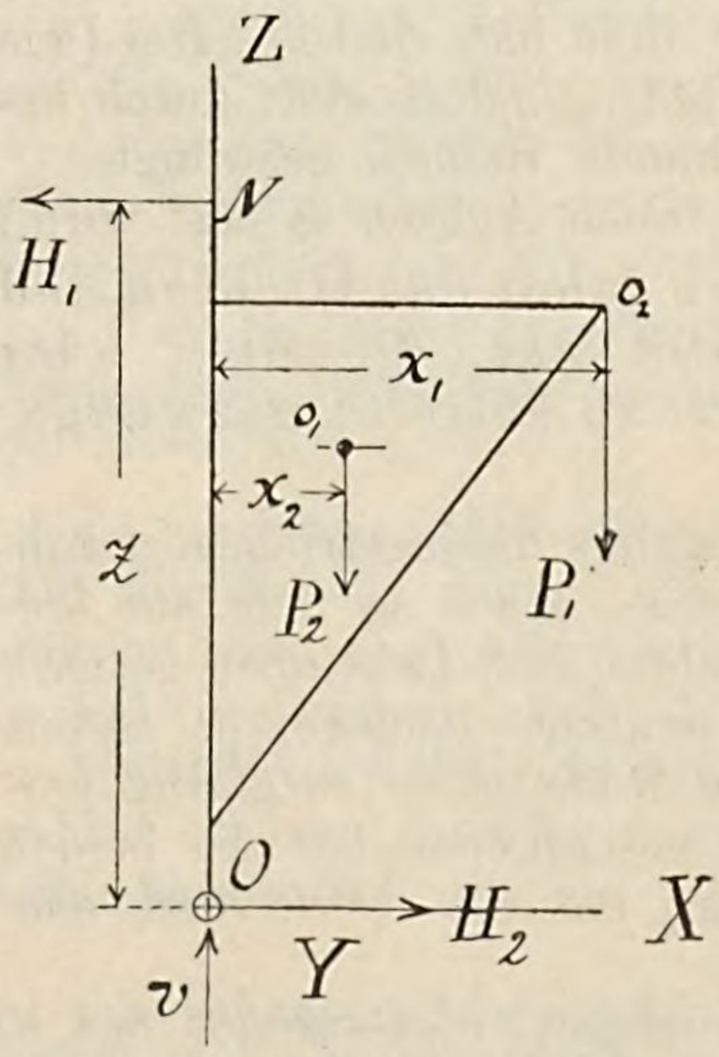


Fig. 203.

Der Anfangspunkt des Achsensystems, der willkürlich gewählt werden könnte, sei doch nach O verlegt, damit die statischen Momente der unbekannten Kräfte H_2 und V zu Null werden; dann ergiebt sich nach den sechs Bedingungsgleichungen Folgendes:

1. $P_x = 0 = +H_2 - H_1$ 306

(Andere Horizontalkräfte sind nicht vorhanden.)

2. $P_y = 0$ 307

(In der Richtung der Y-Achse treten keine Kräfte auf.)

3. $P_z = 0 = V - P_1 - P_2$ 308
(Andere Vertikalkräfte sind nicht da.)

4. $\mathfrak{M}_x = 0$ 309
(Um die X-Achse drehende Kräfte sind nicht vorhanden.)

5. $\mathfrak{M}_y = 0 = P_1 x_1 + P_2 x_2 - H_1 z$ 310

6. $\mathfrak{M}_z = 0$ 311
(Um die Z-Achse drehende Kräfte sind nicht vorhanden.)

Nach Gleichung 1 ist:

$$H_1 = H_2 \quad \text{oder} \quad = H,$$

da der Gegensatz wegfällt.

Die Gleichung 2 hat keine Bedeutung.

Nach Gleichung 3 ist:

$$V = P_1 + P_2 = 8000 + 1000 = 9000 \text{ kg}.$$

Die Gleichung 4 hat keine Bedeutung.

Nach Gleichung 5 ist:

$$H_1 = H = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{z} = \frac{8000 \cdot 4 + 1000 \cdot 2}{5} = 6800 \text{ kg}.$$

Die Gleichung 6 hat keine Bedeutung.

Die Zapfen müssten danach berechnet werden für je eine Kraft von 6800 kg senkrecht zur geometrischen Achse; und der untere Zapfen wäre noch zu berechnen für einen gleichzeitigen Druck von 9000 kg in der Richtung der geometrischen Achse (siehe meinen Maschinenbau unter Trag- und Stützzapfen). Wollte*) man noch wissen, wie gross die Anstrengung im Innern der Stangen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{D}$ des Kranes ist, so könnte man nach Ritter die Konstruktion hier zerschneiden, an den Schnittstellen die gesuchten Anstrengungen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{D}$ als Kräfte (wie Fig. 204 zeigt) einführen und nun wieder diejenigen unserer allgemeinen Gleichungen anwenden, die ausreichend sind, um die Unbekannten zu bestimmen. Wir werden sehen, dass hier schon eine einzige der sechs allgemeinen Gleichungen ausreicht. Wir betrachten nur einen der beiden durch den Schnitt entstandenen Theile, z. B. den rechten, ausgezogenen. Was für diesen, gilt auch für den anderen.

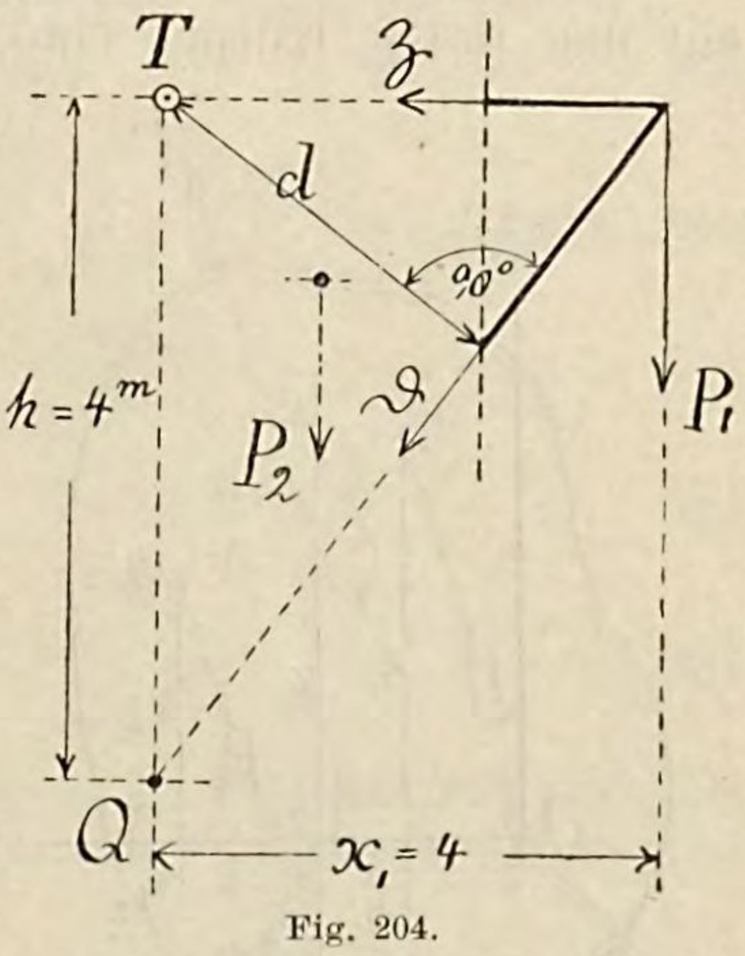


Fig. 204.

*) Diese sogen. Schnittmethode ist von Ritter 1861 eingeführt und wurde 1864 von Culmann graphisch verwendet.

Um Z zu bestimmen, nehmen wir Q als Drehpunkt an, weil für diesen wieder das Moment der anderen Unbekannten $\mathfrak{D}$ Null ist, dann ist:

$$P_1 x_1 - \mathfrak{Z} h + \mathfrak{D} O = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 312$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{P_1 x_1}{h} = \frac{8000 \cdot 4}{4} = 8000 \text{ kg.}$$

Um nun die andere Unbekannte $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, ist es zweckmässig, den Punkt T als Drehpunkt anzunehmen (weil für diesen das Moment von $\mathfrak{Z}$ gleich Null ist). Dann erfolgt:

$$+ P_1 x_1 + \mathfrak{D} d + \mathfrak{Z} O = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 313$$

für $d = 2$ m ist:

$$\mathfrak{D} = - \frac{P_1 x_1}{d} = - \frac{8000 \cdot 4}{2} = - 16000 \text{ kg.}$$

Das negative Zeichen deutet an, dass $\mathfrak{D}$ keine Zug- sondern eine Druck- (negative) Spannung ist.

Einige Beispiele sind noch in späteren Kapiteln gegeben. Lehrreich ist auch die Ableitung der Formel für die Biegungsfestigkeit (siehe meine Maschinenwissenschaften an der betreffenden Stelle).

C.

Besonderer Fall.

§ 182.

Gleichlaufende (parallele) und gleichgerichtete Kräfte.

Gleichungen zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes. Die auf den festen Körper einwirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ haben wieder verschiedene Angriffspunkte $o_1 o_2 o_3 \ldots$, sind aber sämmtlich gleichlaufend und gleichgerichtet (Fig. 205). In diesem besonderen Falle kann ein Kräftepaar nicht zu Stande kommen, da zu einem solchen entgegengesetzt gerichtete Kräfte erforderlich sind.

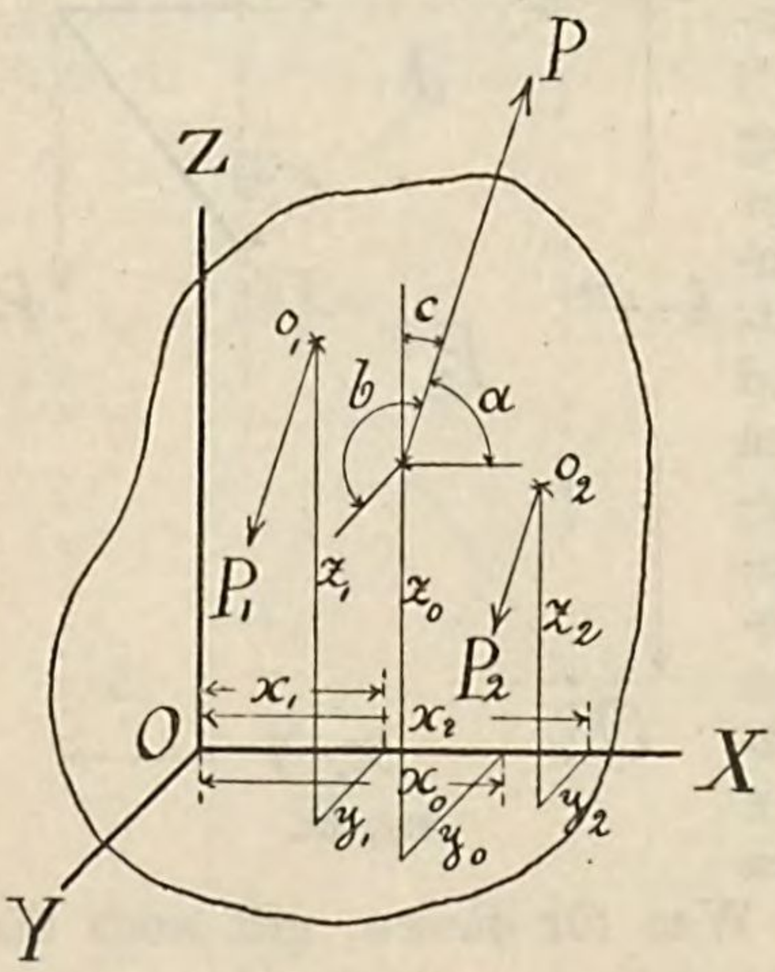


Fig. 205.

Es müssen sich die hier gedachten Kräfte durch eine Einzelkraft P ersetzen lassen.

Diese gleichwerthige Kraft muss ebenfalls den gegebenen Kräften gleichlaufend sein und eine bestimmte Lage haben.

Soll der Körper sich im Gleichgewicht befinden, so muss jene Einzelkraft ausserdem die entgegengesetzte Richtung der gegebenen Kräfte haben.

In der Figur sei P dem Gleichgewichtszustande entsprechend gezeichnet, $x_0 y_0 z_0$ seien die Coordinaten ihres Angriffspunktes.

Da sämmtliche Kräfte dieselben Winkel abc mit den Achsen einschliessen und zu den gegebenen Kräften $P_1 P_2 P_3 \ldots$ noch die Kraft $-P$ hinzutritt, so gehen die sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht über in:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ P_1\cos a + P_2\cos a + \ldots - P\cos a = \cos a\,[P_1 + P_2 + \ldots - P] = 0\\ &2.\ P_1\cos b + P_2\cos b + \ldots - P\cos b = \cos b\,[P_1 + P_2 + \ldots - P] = 0\\ &3.\ P_1\cos c + P_2\cos c + \ldots - P\cos c = \cos c\,[P_1 + P_2 + \ldots - P] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 314$$

$$\left.\begin{aligned} &4.\ (P_1\cos cy_1 + P_2\cos cy_2 + \ldots - P\cos cy_0) - (P_1\cos bz_1 + P_2\cos bz_2 + \ldots - P\cos bz_0) = 0\\ &\text{oder:}\\ &\cos c\,[P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots - Py_0] - \cos b\,[P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots - Pz_0] = 0 \end{aligned}\right\} 315$$

$$\left.\begin{aligned} &5.\ (P_1\cos az_1 + P_2\cos az_2 + \ldots - P\cos az_0) - (P_1\cos cx_1 + P_2\cos cx_2 + \ldots - P\cos cx_0) = 0\\ &\text{oder:}\\ &\cos a\,[P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots - Pz_0] - \cos c\,[P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots - Px_0] = 0 \end{aligned}\right\} 316$$

$$\left.\begin{aligned} &6.\ P_1\cos bx_1 + P_2\cos bx_2 + \ldots - P\cos bx_0) - (P_1\cos ay_1 + P_2\cos ay_2 + \ldots - P\cos ay_0) = 0\\ &\text{oder:}\\ &\cos b\,[P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots - Px_0] - \cos a\,[P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots - Py_0] = 0 \end{aligned}\right\} 317$$

Da allgemein $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ alle Werthe von $+1$ und -1 annehmen können und nur in ganz besonderen Fällen zu Null werden, so können obige Gleichungen bei beliebiger Drehung des Kraftbündels nur dann ganz allgemein gelten, wenn die Klammerausdrücke für sich die Nullwerthe annehmen.

Die allgemeinen Bedingungsgleichungen für unseren Fall (der für die Lehre vom Schwerpunkte von grösster Wichtigkeit ist) heissen deshalb:

$$(P_1 + P_2 + \ldots - P) = 0, \quad \ldots \quad 318$$

$$\left.\begin{aligned} &(P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots - Px_0) = 0\\ &(P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots - Py_0) = 0\\ &(P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots - Pz_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 319$$

oder:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots, \quad \ldots \quad 320$$

$$\left.\begin{aligned} &Px_0 = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots\\ &Py_0 = P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots\\ &Pz_0 = P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 321$$

Durch die letzten drei Gleichungen, die sich auch schreiben lassen:

$$x_0 = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)} \quad \ldots \quad 322$$

$$y_0 = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)} \quad \ldots \quad 323$$

$$z_0 = \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \quad \ldots \quad 324$$

sind die Coordinaten desjenigen einzigen Punktes bestimmt, in welchem die Mittelkraft stets angreifen muss, wie auch die gleichlaufenden Kräfte ihre gemeinschaftliche Richtung verändern.

Man nennt diesen Punkt, durch den die Mittelkraft gleichlaufender Kräfte stets hindurchgeht, den Mittelpunkt oder den Angriffspunkt der Mittelkraft gleichlaufender Kräfte.

Kurz gefasst könnte der Satz lauten: Parallele, an bestimmten Punkten im Körper angreifende Kräfte haben einen Mittelpunkt. (Siehe auch § 155.)

In dem besonderen Falle, in welchem die gleichlaufenden Kräfte als Gewichte der einzelnen Punkte des Körpers auftreten, nennt man jenen Punkt den Schwerpunkt.

Jene drei Gleichungen sind demnach auch die Hauptgleichungen zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes der Körper. Das Nähere hierüber wird im Folgenden gelehrt.

III.

Anwendung der bislang gewonnenen Regeln.

A.

Bestimmung des Schwerpunktes.

§ 184.

Als gleichlaufend und gleichgerichtet können auch diejenigen Kräfte (Gewichte) $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_2\ \mathfrak{g}_3 \ldots$ angesehen werden, welche in den einzelnen Punkten eines jeden Körpers angreifen und nach dem sehr weit entfernten Erdmittelpunkte gerichtet sind.

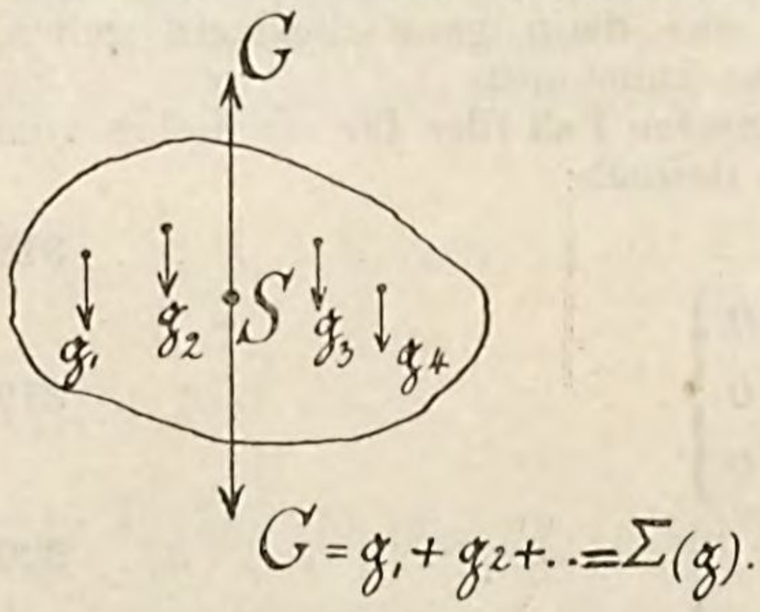


Fig. 206.

Die Grösse dieser Kräfte hängt ab von den Massen $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ der Punkte und von der Erdbeschleunigung g und ist ausgedrückt durch die bekannte Gleichung:

$$Kraft = Masse \times Beschleunigung$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= m_1 \cdot g \\ \mathfrak{g}_2 &= m_2 \cdot g \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 326$$

Man nennt:

Gewicht des Körpers die stets erdwärts gerichtete Mittelkraft

$$G = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ldots = m_1 g + m_2 g + \ldots, \quad \ldots \quad 327$$

Schwerpunkt S oder Massenmittelpunkt, den Angriffspunkt des Gewichtes G,

Schwerlinie jede gerade Linie, die durch den Schwerpunkt hindurchgeht,

Schwerebene jede Ebene, welche den Schwerpunkt enthält.

Soll der Körper sich im Gleichgewicht befinden, also nicht erdwärts fallen, überhaupt seine Lage nicht ändern, so muss eine senkrecht aufwärts gerichtete, durch S gehende Kraft gleich G hinzugefügt werden. Eine beliebige Drehung des Körpers ändert dann durchaus nichts an dem Gleichgewichtszustande.

Das kann z. B. dadurch erreicht werden, dass man den Körper an einem Faden frei aufhängt oder auf eine scharfe Schneide legt (Fig. 207).

Im ersteren Falle liegt der Schwerpunkt in der Verlängerung des lothrecht herabhängenden Fadens f, im anderen Falle lothrecht über der unterstützenden Schneide s. Diese bekannten Erscheinungen kann man zur versuchsweisen Ermittelung der Lage des Schwerpunktes benutzen.

Da derselbe im Schnittpunkte entweder zweier Schwerlinien oder einer Schwerlinie und einer Schwerebene oder dreier Schwerebenen liegt, so ist nur nöthig, durch Umhängen am Faden oder Umlegen auf der Schneide die erforderliche Anzahl von Schwerlinien bezw. Schwerebenen zu ermitteln.

In vielen Fällen ist die Lage des Schwerpunktes schon von vornherein bekannt, z. B. fällt der Schwerpunkt zusammen mit dem Mittelpunkt einer geraden Linie (gleichartigen Stange), einer geschlossenen Kreislinie, eines geschlossenen regelmässigen Vielecks, einer regelmässigen Fläche, wie eines Quadrates, Parallelogrammes, Rhombus, einer Kreisfläche, ferner eines regelmässigen Körpers, wie eines Würfels, einer Kugel u. s. w.

Oft ist es erwünscht und erforderlich, die Lage des Schwerpunktes eines Körpers schnell und zuverlässig zu verändern.

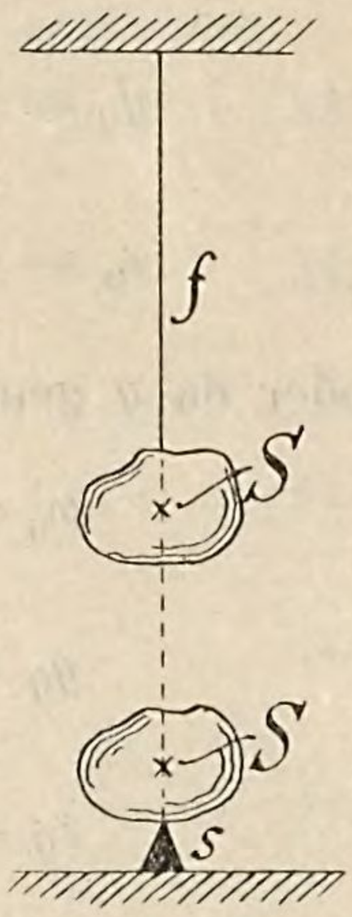


Fig. 207.

Der Seiltänzer sucht durch Heben und Senken des einen oder anderen Armes stets den Schwerpunkt seines schwankenden Körpers genau über dem Seile zu erhalten. Wirksamer noch wird der Zweck durch Verschiebung der sogen. Balancierstange erreicht.

Mit solcher Balancierstange vergleichbar ist die in den Laufgewichten mancher Brückenwagen verschiebbare, mit Eintheilung versehene Stange. Grössere Abwägungen werden durch Verschiebung des grossen Laufgewichtes, kleinere durch Verschiebung der gen. Stange im Laufgewichte erzielt (Brückenwage von Mohr und Federhaff in Mannheim, wie solche z. B. auch auf der Clausthaler Silberhütte eingebaut ist.)

§ 185.

Durch Rechnung findet man die Lage des Schwerpunktes mittelst der Gleichungen 322, 323, 324, welche für den entsprechenden Fall abgeleitet wurden.

Auch hier geht die Mittelkraft G stets durch den zu bestimmenden Schwerpunkt S hindurch, selbst wenn bei einer beliebigen Drehung des Körpers die gemeinschaftliche Richtung der gleichlaufenden Kräfte $\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{g}_3\ldots$ in Bezug auf den Körper sich ändert.

Jene Gleichungen, durch welche der Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft der gleichlaufenden Kräfte, hier des Schwerpunktes von drei senkrecht zueinander stehenden Ebenen bestimmt ist, heissen (wenn $G = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ldots$ anstatt P und $\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2\ldots$ anstatt $P_1 P_2\ldots$ gesetzt wird):

$$x_0 = \frac{\mathfrak{g}_1 x_1 + \mathfrak{g}_2 x_2 + \cdots}{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots} = \frac{\Sigma\,(\mathfrak{g} x)}{G} \quad \ldots\ldots \quad 328$$

$$y_0 = \frac{\mathfrak{g}_1 y_1 + \mathfrak{g}_2 y_2 + \cdots}{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots} = \frac{\Sigma\,(\mathfrak{g} y)}{G} \quad \ldots\ldots \quad 329$$

$$z_0 = \frac{\mathfrak{g}_1 z_1 + \mathfrak{g}_2 z_2 + \cdots}{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots} = \frac{\Sigma\,(\mathfrak{g} z)}{G} \quad \ldots\ldots \quad 330$$

oder da $\mathfrak{g} = m \cdot g$:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 g + m_2 x_2 g + \ldots}{m_1 g + m_2 g + \ldots} = \frac{g\,(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots)}{g\,(m_1 + m_2 + \ldots)} \quad . \quad . \quad 331$$

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 g + m_2 y_2 g + \ldots}{m_1 g + m_2 g + \ldots} = \frac{g\,(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots)}{g\,(m_1 + m_2 + \ldots)} \quad . \quad . \quad 332$$

$$z_0 = \frac{m_1 z_1 g + m_2 z_2 g + \ldots}{m_1 g + m_2 g + \ldots} = \frac{g\,(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots)}{g\,(m_1 + m_2 + \ldots)} \quad . \quad . \quad 333$$

oder da g gemeinschaftlicher Faktor im Zähler und Nenner ist:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)} = \frac{\Sigma(mx)}{M} \quad . \quad . \quad . \quad 334$$

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)} = \frac{\Sigma(my)}{M} \quad . \quad . \quad . \quad 335$$

$$z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)} = \frac{\Sigma(mz)}{M} \quad . \quad . \quad . \quad 336$$

wenn mit M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet wird.

In den letzten Gleichungen sind die Massen an Stelle der Kräfte (Gewichte) getreten.

a.

Schwerpunkt gleichartiger (homogener) Gebilde (Linien, Flächen, Körper).

§ 186.

Bei Gebilden mit gleichartig vertheilter Masse ist offenbar die Masse proportional der Grösse (Länge, Fläche, Inhalt) des Gebildes.

Wir dürfen demnach setzen anstatt:

M der Masse des ganzen Körpers, bezw. m der Masse eines Körpertheilchens:

bei Linien:

L die Länge der ganzen Linie, bezw. l die Länge eines Linientheilchens;

bei Flächen:

F den Inhalt der ganzen Fläche, bezw. f die Fläche eines Flächentheilchens;

bei Körpern:

K den Inhalt des ganzen Körpers, bezw. k den Inhalt eines Körpertheilchens.

Somit erhalten wir folgende Gleichungen zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes einer Linie:

$$x_0 = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots}{l_1 + l_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(lx)}{\Sigma(l)} = \frac{\Sigma(lx)}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 337$$

$$y_0 = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \ldots}{l_1 + l_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(ly)}{\Sigma(l)} = \frac{\Sigma(ly)}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 338$$

$$z_0 = \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots}{l_1 + l_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(lz)}{\Sigma(l)} = \frac{\Sigma(lz)}{\Sigma(l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 339$$

einer Fläche:

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots}{f_1 + f_2 + \dots} = \frac{\Sigma(fx)}{\Sigma(f)} = \frac{\Sigma(fx)}{F} \quad \dots \quad 340$$

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots}{f_1 + f_2 + \dots} = \frac{\Sigma(fy)}{\Sigma(f)} = \frac{\Sigma(fy)}{F} \quad \dots \quad 341$$

$$z_0 = \frac{f_1 z_1 + f_2 z_2 + \dots}{f_1 + f_2 + \dots} = \frac{\Sigma(fz)}{\Sigma(f)} = \frac{\Sigma(fz)}{F} \quad \dots \quad 342$$

eines Körpers:

$$x_0 = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots} = \frac{\Sigma(kx)}{\Sigma(k)} = \frac{\Sigma(kx)}{K} \quad \dots \quad 343$$

$$y_0 = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots} = \frac{\Sigma(ky)}{\Sigma(k)} = \frac{\Sigma(ky)}{K} \quad \dots \quad 344$$

$$z_0 = \frac{k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots} = \frac{\Sigma(kz)}{\Sigma(k)} = \frac{\Sigma(kz)}{K} \quad \dots \quad 345$$

§ 187.

In den letzten Gleichungen kommen nur noch Raum-Grössen vor. Es ist deshalb bei gleichartigen Gebilden die Lage des Schwerpunktes durchaus unabhängig von der vorhandenen Masse. Und die Aufgabe läuft hier darauf hinaus, die Lage des Schwerpunktes (Mittelpunktes) eines rein geometrischen Gebildes zu ermitteln.

Uebrigens werden wir nicht immer alle drei Gleichungen zur Bestimmung des Schwerpunktes anzuwenden haben, sondern meist viel einfacher zum Ziel kommen.

Z. B. weiss man, dass bei einem Kreisbogen der Schwerpunkt S auf der durch die Mitte O des zugehörigen Kreises gezogenen Halbirungslinie OX liegt. Man hätte dann nur noch auf dieser Linie den Schwerpunkt durch seinen Abstand x_0 von dem Kreismittelpunkt festzulegen (§ 191).

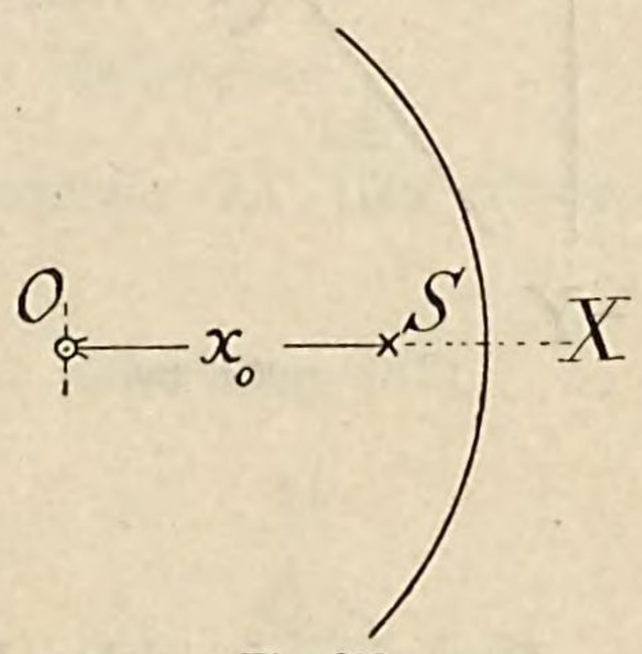


Fig. 208.

1.

Schwerpunkt von Linien (und Stäben).

§ 188.

Der Schwerpunkt einer Geraden, eines geraden gleich dicken und gleichartigen Drahtes, Stabes fällt mit dem Mittelpunkte zusammen. Ist der Stab nicht gleich dick, überhaupt ungleichartig, so bestimmt man dessen Schwerpunkt durch den Versuch (§ 184 und Fig. 209).

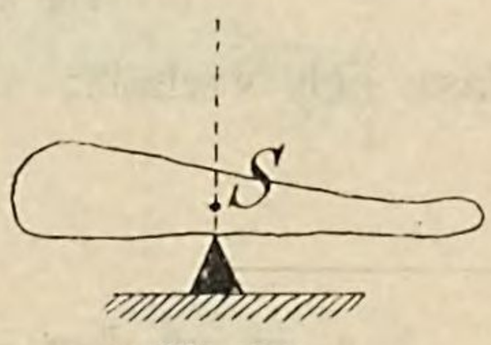


Fig. 209.

§ 189.

Den Schwerpunkt einer gebrochenen Linie oder der Seiten eines Vieleckes findet man mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen (§ 186), wenn man für $l_1 l_2 \ldots$ die einzelnen Theile (geraden Strecken) der gebrochenen Linie und für $x_1 x_2 \ldots$, $y_1 y_2 \ldots$, $z_1 z_2 \ldots$ die Coordinaten der Mittelpunkte dieser Theile einführt.

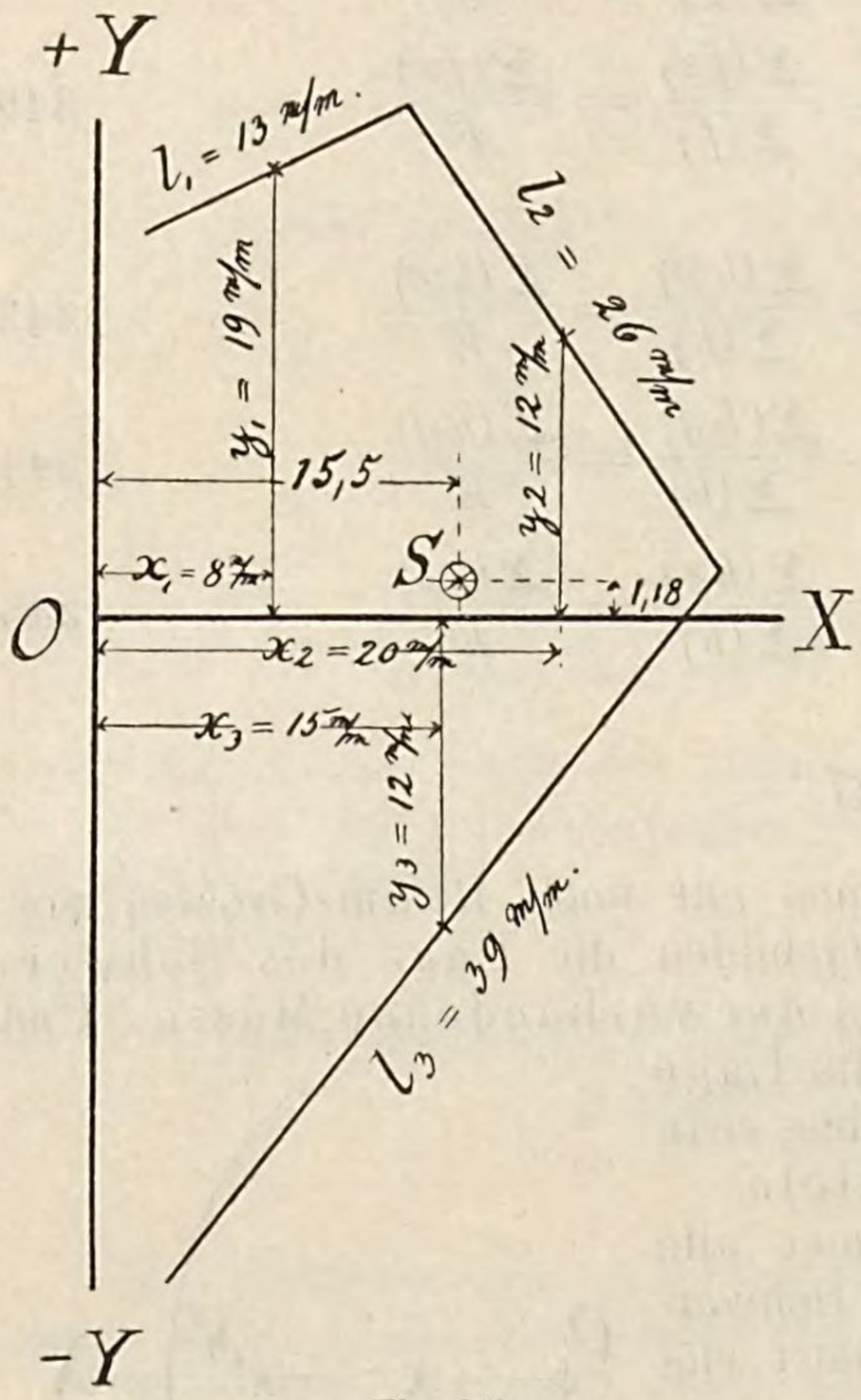


Fig. 210.

Beispiel 85: Es seien in nebenstehender Figur:

$l_1 = 13\,\text{mm}$ $x_1 = 8\,\text{mm}$ $y_1 = 19\,\text{mm}$

$l_2 = 26\,\text{mm}$ $x_2 = 20\,\text{mm}$ $y_2 = 12\,\text{mm}$

$l_3 = 39\,\text{mm}$ $x_3 = 15\,\text{mm}$ $y_3 = 12\,\text{mm}$*).

Dann ist die Lage des Schwerpunktes bestimmt durch die beiden Werthe:

$$x_0 = \frac{13 \cdot 8 + 26 \cdot 20 + 39 \cdot 15}{13 + 26 + 39} = 15{,}5\,\text{mm}.$$

$$y_0 = \frac{13 \cdot 19 + 26 \cdot 12 - 39 \cdot 12}{13 + 26 + 39} = 1{,}18\,\text{mm}.$$

Träten Theile der Figur aus der XY-Ebene heraus, so müsste auch die Gleichung für z berücksichtigt werden.

§ 190.

Dass man in vielen Fällen noch auf andere Weise, oft auf kürzerem Wege, zum Ziele gelangt, zeigen folgende beiden Beispiele (Fig. 211, 212):

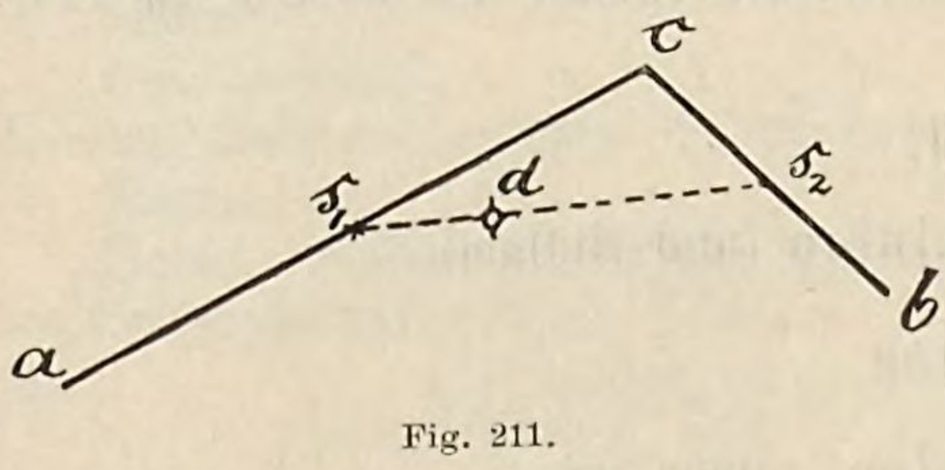


Fig. 211.

Beispiel 86: Der Schwerpunkt d, zunächst der beiden Linien ac und cb, ist zu bestimmen:

Die Schwerpunkte s_1 und s_2 der einzelnen Linien liegen in deren Mitten; der gesuchte Schwerpunkt d beider Linien zusammengenommen, liegt auf der Verbindenden $s_1 s_2$, so dass sich verhält:

$$\frac{s_1 d}{s_2 d} = \frac{cb}{ca} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 346$$

---

*) y_3 ist mit dem — Zeichen einzuführen.

Beispiel 87: Der Schwerpunkt S der drei Seiten des Dreiecks abc ist zu bestimmen:

Es ist wie vorhin:

$$\frac{s_1 d}{s_2 d} = \frac{cb}{ca} = \frac{\frac{cb}{2}}{\frac{ca}{2}} = \frac{s_2 b}{s_1 c} = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_3}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{s_1 d}{s_2 d} = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 347$$

folgt, dass die Linie $s_3 d$ den Winkel $s_1 s_3 s_2$ halbirt. Auf dieser Halbirungslinie liegt der Schwerpunkt. Ebenso liegt der Schwerpunkt auf den Halbirungslinien der anderen Winkel $s_2 s_1 s_3$ und $s_1 s_2 s_3$, folglich auf dem Durchschnittspunkte S der drei Halbirungslinien. Das ist zugleich der Mittelpunkt des dem Dreiecke $s_1\ s_2\ s_3$ eingeschriebenen Kreises.

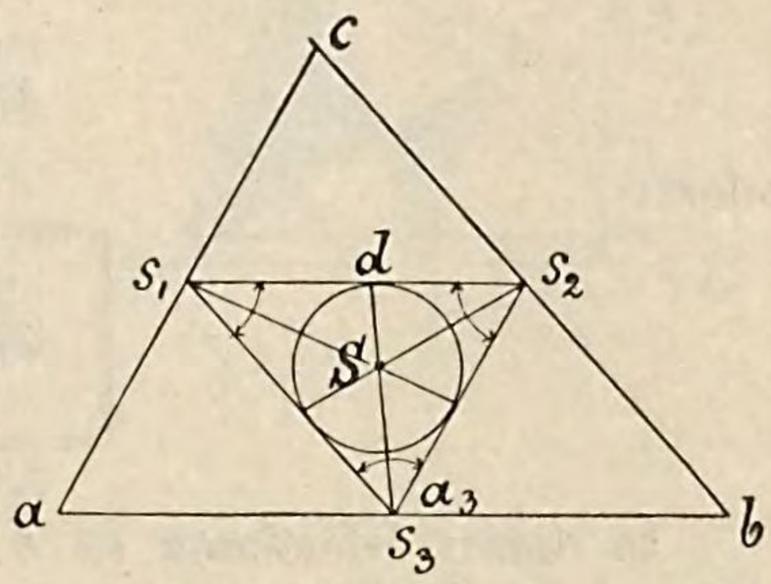


Fig. 212.

§ 191.

Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Es sei der Kreisbogen bestimmt durch den Halbmesser r und den Centriwinkel . . . . . 2δ.

Der Schwerpunkt S liegt auf der Halbirungslinie OX, sein Abstand vom Mittelpunkte ist:

$$OS = x_0 = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots}{l_1 + l_2 + \ldots} = \frac{\Sigma(lx)}{\Sigma(l)} \quad \text{(Gleichung 337)},$$

wenn bedeuten:

$l_1 l_2 \ldots$

die unendlich kleinen Bogentheile und:

$x_1 x_2 \ldots$

die Abstände dieser Bogentheile von der Y-Achse.

Anstatt der Summe von der Form $\Sigma(lx)$ ermitteln wir mit Hülfe der beiden in der Figur bezeichneten ähnlichen Dreiecke eine leichter zu entwickelnde gleichwerthige Summe:

Es verhält sich:

$$\frac{x}{r} = \frac{\Delta}{l} \quad \ldots\ldots \quad 348$$

danach ist:

$$lx = r\Delta,$$

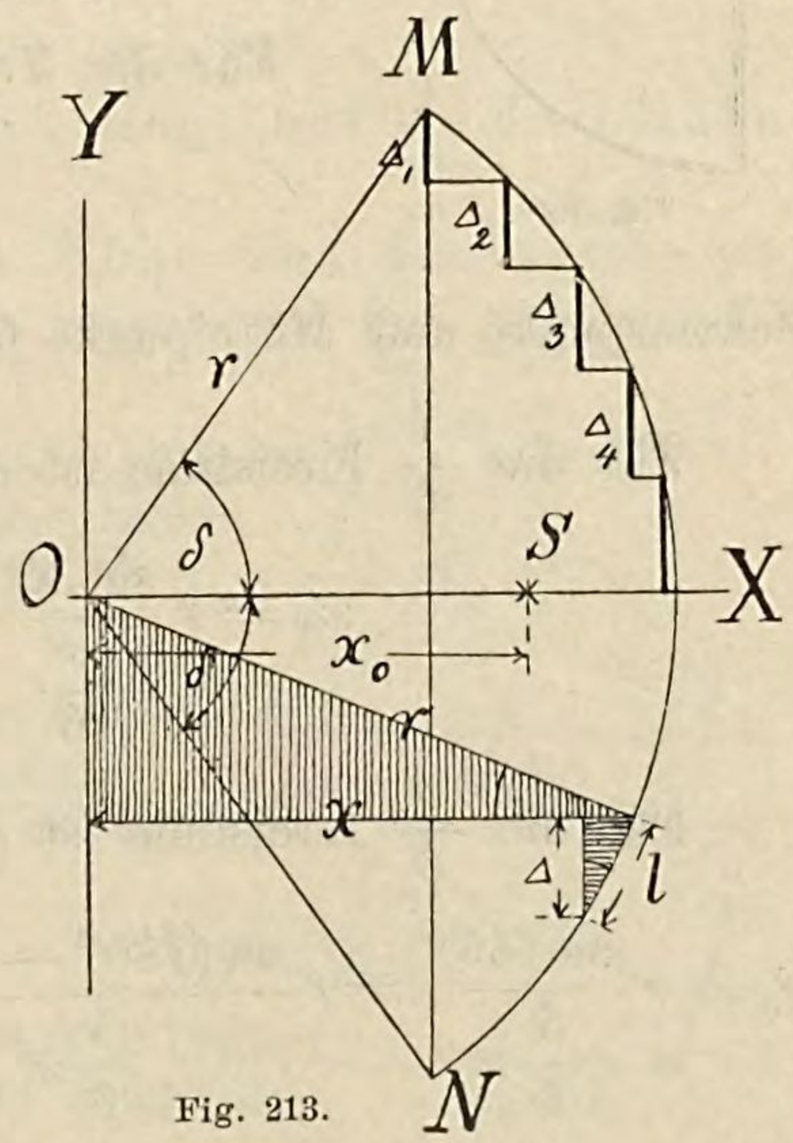


Fig. 213.

setzen wir nun in obiger Gleichung, anstatt der Produkte $l_1 x_1 \ldots$, die gleichwerthigen Produkte $r\Delta$ ein, so ergiebt sich:

$$x_0 = \frac{r\Delta_1 + r\Delta_2 + \ldots}{l_1 + l_2 + \ldots} = \frac{r\,\Sigma(\Delta)}{\Sigma(l)} \quad \ldots : \ldots \quad 349$$

Nun ist nach der Figur $\Sigma(\Delta) =$ der Sehne $MN = 2r \sin\delta$.
dagegen $\Sigma(l) =$ dem Bogen $MN = 2r\widehat{\delta}$,
folglich:

$$x_0 = r\,\frac{Sehne}{Bogen}$$

$$x_0 = r\,\frac{2r\sin\delta}{2r\widehat{\delta}},$$

oder:

$$\boxed{x_0 = r\,\frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 350$$

In dieser Gleichung ist $\widehat{\delta}$ in Theilen der Zahl π auszudrücken, dagegen δ in Graden.

Beispiel 88: Für die Halbkreislinie (Fig. 214) ist $\delta = 90^0$, $\widehat{\delta} = \frac{\pi}{2}$, also:

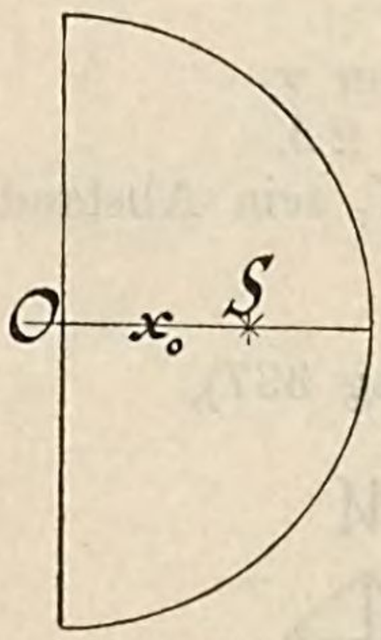


Fig. 214.

$$x_0 = r\,\frac{\sin 90^0}{\frac{\pi}{2}},$$

$$\boxed{x_0 = r\,\frac{2}{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 351$$

Für die Vollkreislinie ist $\delta = 180^0$, $\widehat{\delta} = \pi$, folglich:

$$x_0 = r\,\frac{\sin 180^0}{\pi} = 0, \text{ d. h.}$$

Schwerpunkt und Mittelpunkt fallen zusammen.

Für die $\frac{1}{6}$ Kreislinie ist $\delta = 30^0$, $\widehat{\delta} = \frac{\pi}{6}$, folglich:

$$x_0 = r\,\frac{\sin 30^0}{\pi} = r\,\frac{3}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 352$$

$$\overline{6}$$

Für die $\frac{5}{6}$ Kreislinie ist $\delta = 150^0$, $\widehat{\delta} = \frac{5}{6}\pi$, folglich:

$$x_0 = r\,\frac{\sin 150^0}{\frac{5}{6}\pi} = r\,\frac{\sin(180^0 - 150^0)}{\frac{5}{6}\pi} = r\,\frac{\sin 30^0}{\frac{5}{6}\pi} = r\,\frac{6}{10 \cdot \pi} \quad \ldots \quad 353$$

2.
Schwerpunkte von Flächen.

§ 192.

Schwerpunkt eines Dreieckes.

Man zerlege das Dreieck ABC in unzählig viele mit der Grundlinie AB gleichlaufende Flächenstreifen und bestimme für jeden Streifen den Schwerpunkt. Derselbe liegt auf der Mitte eines jeden Streifens. Verbindet man sämmtliche Schwerpunkte, so erhält man die Schwerlinie DC. Sieht man nicht AB, sondern BC als Grundlinie an und verfährt in ähnlicher Weise, so erhält man die Schwerlinie EA. Der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes muss demnach in S, dem Durchschnittspunkte der beiden Schwerlinien liegen. In welcher Höhe der Punkt S liegt, ergiebt sich mit Hülfe der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke:

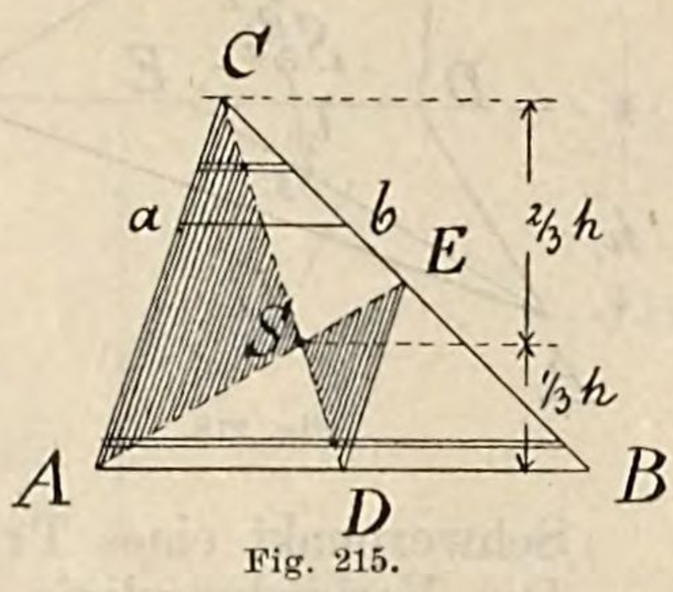


Fig. 215.

$$ASC \text{ und } ESD.$$

Hiernach verhält sich:

$$\frac{SD}{SC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{2},$$

somit ist:

$$SD = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{3} CD \quad \ldots\ldots\ldots \quad 354$$

Der Schwerpunkt eines Dreieckes liegt hiernach auf $\frac{1}{3}$ derjenigen Linie, welche die Mitte der Grundlinie mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet (kurz auf $\frac{1}{3}$ der sogen. Transversalen) von der Grundlinie abgerechnet. Oder auch:

Der Schwerpunkt eines Dreieckes liegt auf $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Grundlinie, bezw. auf $\frac{2}{3}$ der Höhe von der Spitze ab gerechnet.

Bemerkenswerth ist noch Folgendes:

Unterstützt man ein Dreieck in wagerechter Lage in den drei Eckpunkten und belastet dasselbe im Schwerpunkte S durch das Gewicht G, so erhält jeder Endpunkt $\frac{G}{3}$ Belastung.

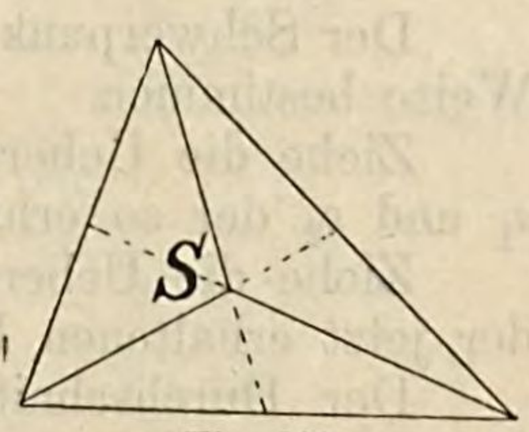


Fig. 216.

Die Verbindungslinien des Schwerpunktes S mit den Ecken zerlegt das Dreieck in 3 gleichgrosse Dreiecke.

Die Transversalen zerlegen das Dreieck in 6 gleichgrosse Dreiecke.

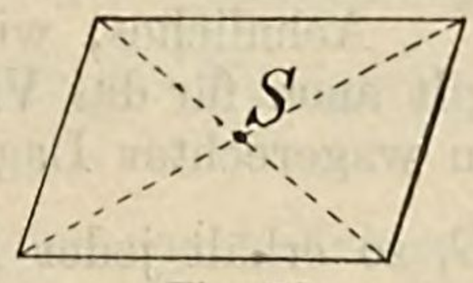


Fig. 217.

§ 193.

Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes (Fig. 217), eines Rechteckes, eines Rhombus liegt im

Durchschnitte der Ueberecklinien (Diagonalen). Der Schwerpunkt S eines beliebigen unregelmässigen Viereckes $ABCD$ ergiebt sich aus der Lage der Schwerpunkte $s_1 s_2$ der Dreiecke, in welche das Viereck sich durch BD zerlegen lässt.

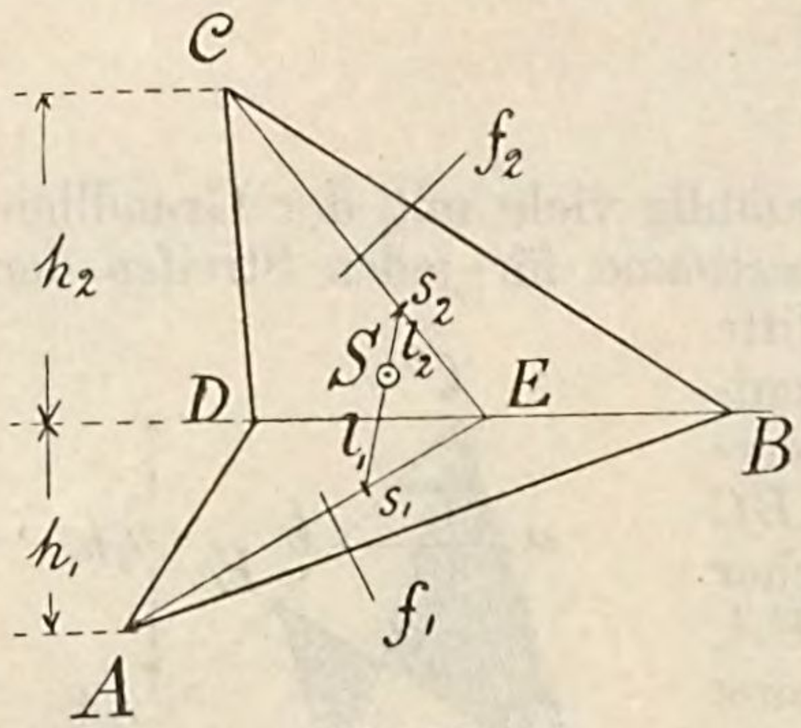


Fig. 218.

Halbire BD, ziehe EA und EC, bestimme die Schwerpunkte s_1 und s_2 (§ 192). Dann theilt der Schwerpunkt S so die Schwerlinie $s_1 s_2$, dass sich verhält:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad . \quad . \quad . \quad 355$$

wenn mit f_1 und f_2 die Flächen (oder mit h_1 und h_2 die Höhen) der betreffenden Dreiecke bezeichnet werden.

Schwerpunkt eines Trapezes.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Trapezseiten ist eine Schwerlinie.

$s_1 s_2$, die Verbindende der Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche das Trapez (Fig. 219) zerlegt ist, ist eine zweite Schwerlinie.

Der Durchschnittspunkt S dieser Schwerlinien ist der gesuchte Schwerpunkt.

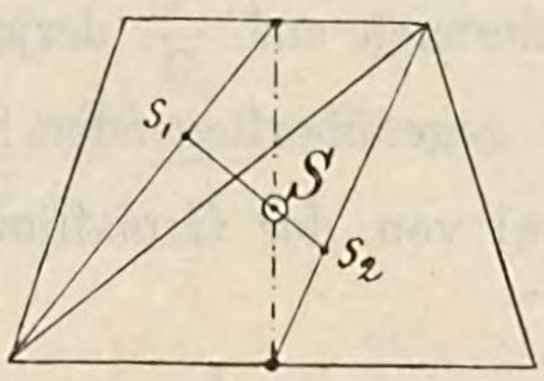


Fig. 219.

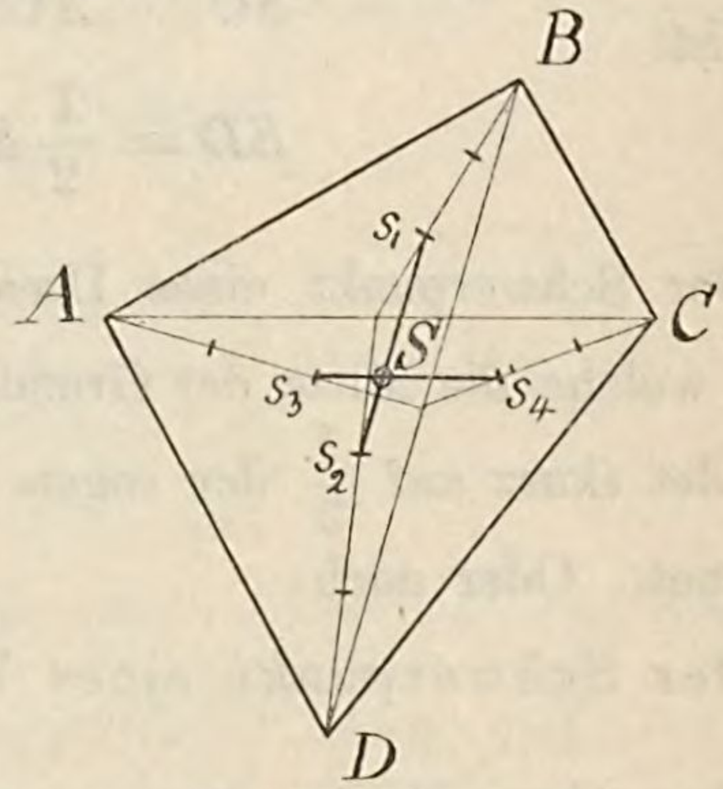


Fig. 220.

Der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ lässt sich auch auf folgende Weise bestimmen.

Ziehe die Ueberecklinie (Diagonale) AC; bestimme die Schwerpunkte s_1 und s_2 der so erhaltenen Dreiecke.

Ziehe die Ueberecklinie BD; bestimme die Schwerpunkte s_3 und s_4 der jetzt erhaltenen Dreiecke.

Der Durchschnittspunkt der beiden Schwerlinien $s_1 s_2$ und $s_3 s_4$ ist der gesuchte Schwerpunkt S.

Aehnliches, wie oben (Fig. 216) für das Dreieck angegeben wurde, gilt auch für das Viereck: Unterstützt man ein Viereck in den vier Ecken in wagerechter Lage und belastet den Schwerpunkt durch das Gewicht G, so erhält jeder Eckpunkt $\frac{1}{4} G$ Belastung.

§ 194.

Beispiel 89: Schwerpunkt einer aus Rechtecken zusammengesetzten Fläche (Fig. 221), welche oft den gusseisernen Trägern als Querschnittsfläche gegeben wird.

Es sei:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 12 \cdot 2 = 24 \\ f_2 &= 14 \cdot 2 = 28 \\ f_3 &= \;3 \cdot 2 = \;6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 356$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{2} \qquad = 1 \\ x_2 &= 2 + \frac{14}{2} = 9 \\ x_3 &= 2 + 14 + \frac{2}{2} = 17. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 357$$

Dann ist nach der allgemeinen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3}{f_1 + f_2 + f_3} \\ x_0 &= \frac{24 \cdot 1 + 28 \cdot 9 + 6 \cdot 17}{24 + 28 + 6} = 6 \text{ cm.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 358$$

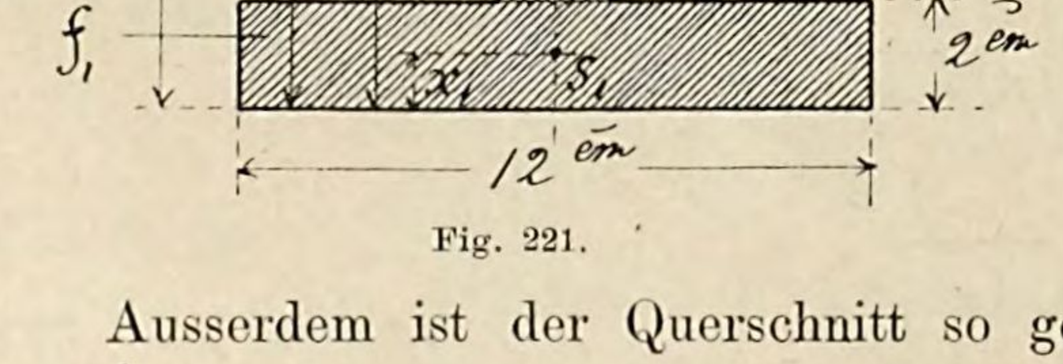


Fig. 221.

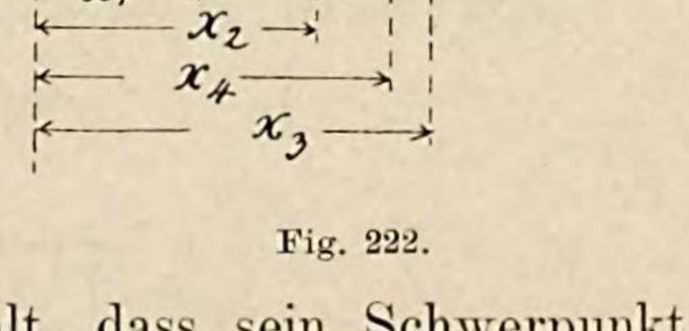


Fig. 222.

Ausserdem ist der Querschnitt so gewählt, dass sein Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der ganzen Höhe liegt. (Siehe Biegungsfestigkeit der Festigkeitslehre.)

Der Schwerpunkt S eines in der XY-Ebene gelegenen beliebigen Vieleckes ergiebt sich aus den Lagen der Schwerpunkte $s_1 s_2 s_3 \ldots\ldots$ der

Dreiecksflächen $f_1 f_2 f_3 \ldots\ldots$, in welche man das Vieleck zerlegen kann. Seine Lage ist bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} \\ y_0 &= \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 359$$

Auch durch Versuch findet man den Schwerpunkt S einer Fläche, z. B. der T-förmigen, wenn man diese Fläche aus steifer Pappe möglichst genau ausschneidet und dann in wagerechter Lage auf die Spitze einer Bleifeder legt. Derjenige (durch Versuch ermittelte) Stütz-Punkt, für welchen die Pappe ihre wagerechte Lage beibehält, ist der gesuchte Schwerpunkt.

§ 195.

Schwerpunkt eines Kreisausschnittes, dessen Halbmesser r und dessen Centriwinkel $2\,\delta$ ist (Fig. 223).

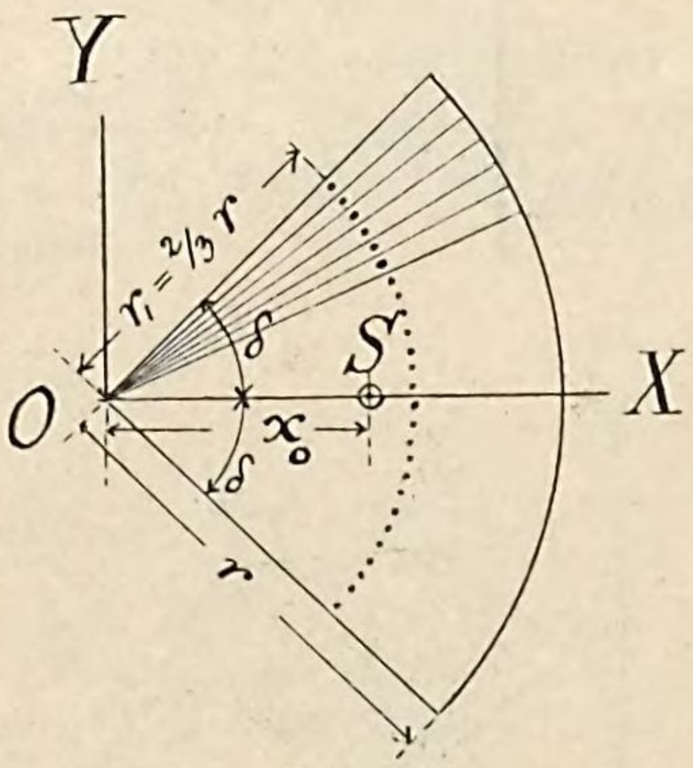


Fig. 223.

Man zerlege den Kreisausschnitt in unzählig viele Dreiecke, deren Grundlinien mit dem Kreisbogen, deren Spitzen mit dem Kreismittelpunkte O zusammenfallen, und bestimme deren Schwerpunkte (Fig. 215), so bilden diese einen schweren Kreisbogen vom Halbmesser $r_1 = \frac{2}{3} r$.

Der Schwerpunkt dieses Kreisbogens ist sodann der gesuchte Schwerpunkt des gegebenen Kreisausschnittes.

Nach Fig. 213 ist aber der Schwerpunktsabstand des schweren Bogens vom Kreismittelpunkte:

$$x_0 = r_1 \cdot \frac{\sin \delta}{\widehat{\delta}},$$

$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \delta}{\widehat{\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 360$$

Beispiel 90: Für die Halbkreisfläche ist: $\delta = 90^0$; $\widehat{\delta} = \frac{\pi}{2}$, folglich:

$$x_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin 90^0}{\frac{\pi}{2}},$$

$$\boxed{x_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 361$$

Beispiel 91: Für die volle Kreisfläche ist: $\delta = 180^0$; $\widehat{\delta} = \pi$, also:

$$x_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin 180^0}{\pi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 362$$

Beispiel 92: Für die $\frac{1}{6}$ Kreisfläche vom Halbmesser $r = 90$ cm ist:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{2}{3}\,90\,\frac{\sin 30}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\,90\,\frac{0{,}5}{\frac{\pi}{6}} \\ x_0 &= \sim 57{,}3 \text{ cm.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 363$$

§ 196.

Beispiel 93: Schwerpunkt S eines Ringstückes, für welches gegeben sind R, r und 2δ.

Das Ringstück ist aufzufassen als Unterschied zweier Kreisausschnitte von den Halbmessern, bezw. R und r; oder auch die Kreisausschnittfläche vom Halbmesser R anzusehen als Summe der Kreisausschnittfläche vom Halbmesser r und der Ringfläche und nun die Aufgabe zurückzuführen auf die obige (§ 195, Fig. 223).

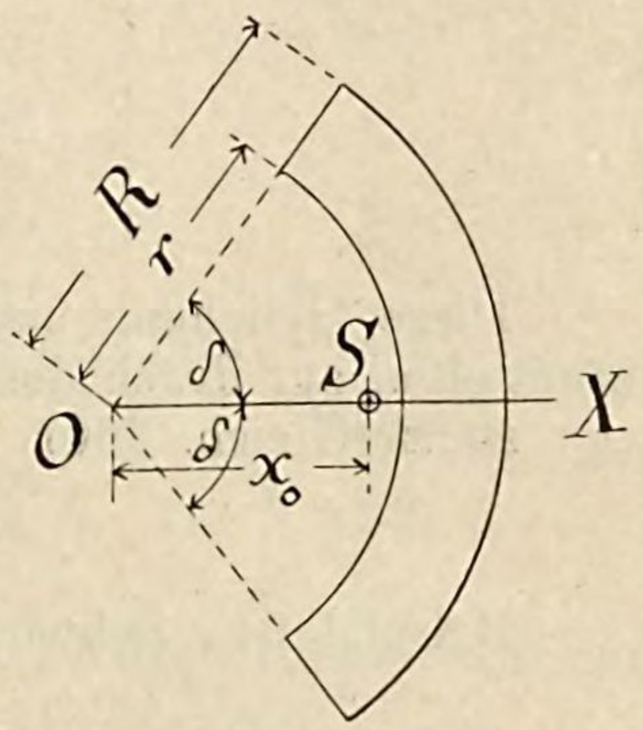


Fig. 224.

Es werde bezeichnet mit:

$F_R = R^2\widehat{\delta}$ die Fläche des ganzen Kreisausschnittes,

$x_R = \frac{2}{3} R \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}$ deren Schwerpunktsabstand von O,

$F_r = r^2\widehat{\delta}$ die Fläche des inneren Kreisauschnittes,

$x_r = \frac{2}{3} r \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}$ deren Schwerpunktsabstand von O,

$F = F_R - F_r$ die Fläche des gegebenen Ringstückes.

x_0 der gesuchte Abstand des Schwerpunktes dieser Ringstückfläche von O.

Nach der allgemeinen Gleichung:

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots}{f_1 + f_2}$$

ist zunächst mit Rücksicht auf die oben eingeführten Bezeichnungen:

$$x_R = \frac{F_r x_r + F x_0}{F_r + F};$$

danach ist:

$$F_r \cdot x_R + F \cdot x_R = F_r \cdot x_r + F \cdot x_0,$$

$$x_0 = \frac{F_r x_R + F x_R - F_r \cdot x_r}{F},$$

$$x_0 = \frac{(F_r + F) \cdot x_R - F_r \cdot x_r}{F},$$

$$\boxed{x_0 = \frac{F_R \cdot x_R - F_r \cdot x_r}{F_R - F_r}} \qquad \ldots\ldots\ldots 364$$

oder wenn die gegebenen Grössen eingeführt werden:

$$x_0 = \frac{R^2 \cdot \widehat{\delta} \cdot \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}\right) - r^2 \widehat{\delta} \left(\frac{2}{3} r \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}\right)}{R^2 \widehat{\delta} - r^2 \widehat{\delta}}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right) \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}} \qquad \ldots\ldots 365$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der für den Kreisausschnitt ermittelten nur durch den eingeklammerten Ausdruck, an dessen Stelle dort „r“ steht (Gleich. 360).

§ 196.

Beispiel 94: Schwerpunkt S eines Kreisabschnittes für R und $2\,\delta$.

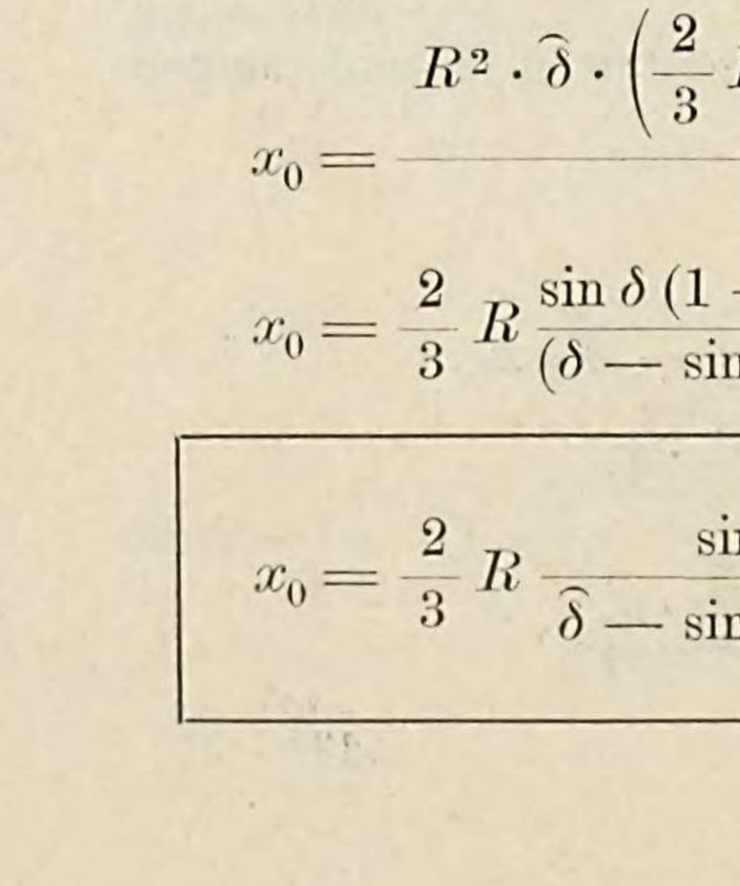


Fig. 225.

Setzen wir in obigen Gleichungen (insbesondere der Gleichung 364) anstatt F_r und x_r die betreffenden Grössen des an Stelle des kleinen Kreisausschnittes getretenen Dreieckes:

$$F_\Delta = R^2 \sin\delta \cdot \cos\delta,$$

$$x_\Delta = \frac{2}{3}(R \cdot \cos\delta),$$

so folgt, dass der Abstand des gesuchten Schwerpunktes von O ausgedrückt ist durch die Gleichung:

$$x_0 = \frac{F_R \cdot x_R - F_\Delta \cdot x_\Delta}{F_R - F_\Delta},$$

$$x_0 = \frac{R^2 \cdot \widehat{\delta} \cdot \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin\delta}{\widehat{\delta}}\right) - R^2 \sin\delta \cdot \cos\delta \cdot \left(\frac{2}{3} R \cos\delta\right)}{R^2 \cdot \widehat{\delta} - R^2 \cdot \sin\delta \cdot \cos\delta}$$

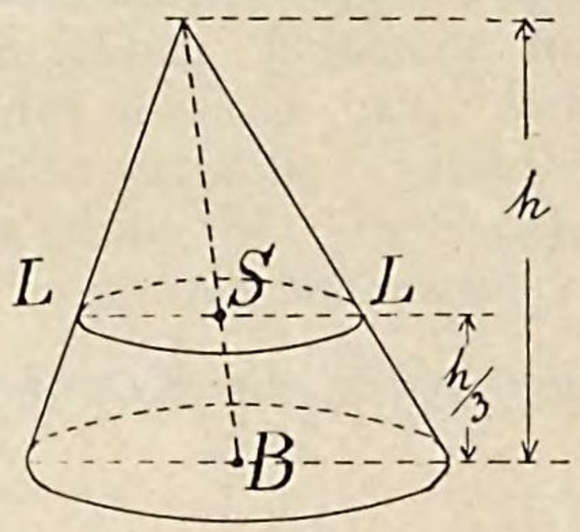
$$x_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\delta\,(1 - \cos^2\delta)}{(\delta - \sin\delta \cdot \cos\delta)}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\delta}{\widehat{\delta} - \sin\delta \cdot \cos\delta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 365$$

§ 197.

Der Schwerpunkt S eines Cylindermantels liegt auf der Mitte der Cylinderachse.

Der Schwerpunkt S eines Kegelmantels liegt auf $\frac{1}{3}$ der Achse, das ist derjenigen Linie, welche den Mittelpunkt der Grundfläche mit der Spitze des Kegels verbindet; oder auf $\frac{1}{3}$ der Höhe h des Kegels von der Grundfläche ab gerechnet.



Beweis: Zerlegt man den Kegelmantel in unzählig viele Dreiecke, deren Grundlinien sämmtlich mit dem Umfange des Kegelmantels, deren Spitzen mit der Spitze des Kegels zusammenfallen und bestimmt die Schwerpunkte dieser Dreiecke, so bilden diese in $\frac{1}{3}$ der Höhe des Kegels eine schwere Kreislinie LL, deren Schwerpunkt mit ihrer Mitte S (also mit einem Punkte der Kegelachse AB) zusammenfällt.

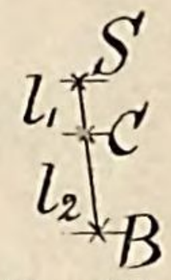


Fig. 226.

Den Schwerpunkt der Gesammtoberfläche des Kegels (Mantels M und der Grundfläche G) findet man am einfachsten auf folgende Weise:

In S liegt der Schwerpunkt des Mantels M, in B der Schwerpunkt der Grundfläche G. Der Schwerpunkt von beiden zusammengenommen liegt in demjenigen Punkte C, welcher die Linie SB so theilt, dass sich verhält:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{G}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 366$$

§ 198.

Der Schwerpunkt einer Kugelzone oder Kugelschale liegt auf der Mitte ihrer Höhe h.

Beweis: Theilt man die Kugelzone von der Höhe h durch gleichlaufende Ebenen in unendlich viele Zonen, deren Oberflächen $f_1 f_2 \ldots$ sein mögen, so ergiebt sich nach der allgemeinen Gleichung (340) als Abstand des Schwerpunktes der Gesammtoberfläche von O:

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots}{f_1 + f_2 \cdots} = \frac{\Sigma (fx)}{\Sigma (f)}.$$

Ist für eine solche Zone die Bogenlänge b und der mittlere Halbmesser y, so folgt als Fläche:

$$f = 2 y \pi b;$$

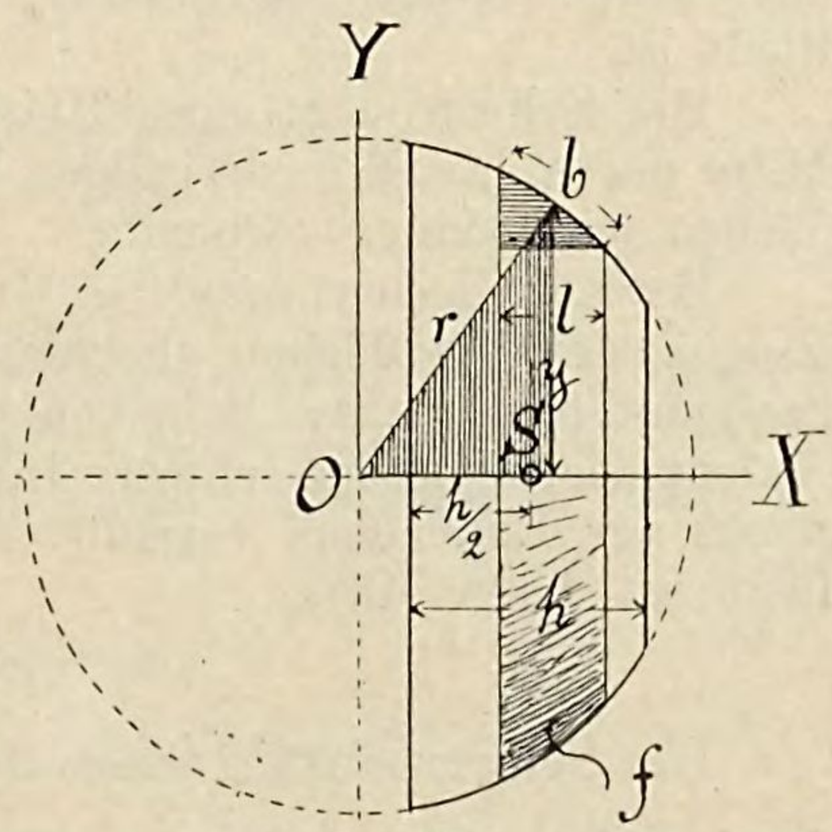


Fig. 227.

danach ist:

$$x_0 = \frac{\Sigma(2\,y\,\pi b\,x)}{\Sigma(2\,y\,\pi b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 367$$

oder, da nach den beiden bezeichneten ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{b}{l} = \frac{r}{y}, \qquad by = rl,$$

$$x_0 = \frac{\Sigma(2\pi r l x)}{\Sigma(2\pi r l)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 368$$

und, wenn die Konstanten vor das Summenzeichen gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{2\pi r\,\Sigma(l\,x)}{2\pi r\,\Sigma(l)} \\ x_0 &= \frac{\Sigma(l\,x)}{\Sigma(l)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 369$$

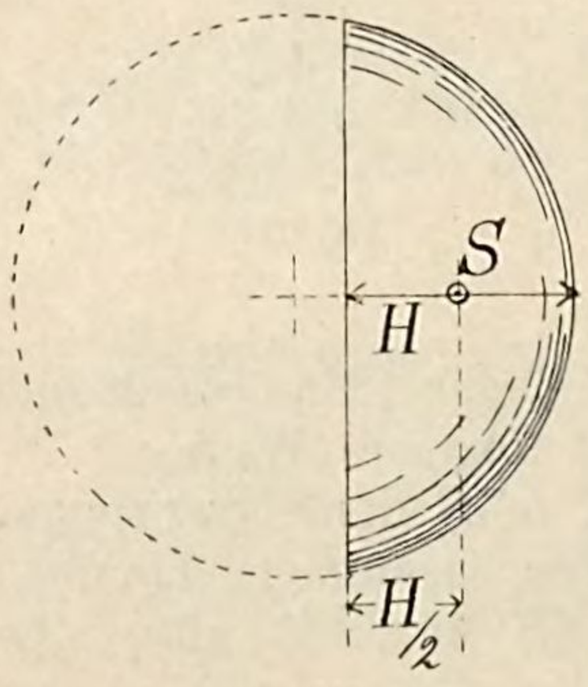


Fig. 228.

Die letzte Gleichung ist die Schwerpunktsgleichung einer Linie (welche aus den Theilen l besteht), also im vorliegenden Falle der Höhe h der Zone (Gleich. 337). Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt aber auf deren Mitte. Also liegt auch der Schwerpunkt der Zone (Fläche), von welcher wir ausgingen, auf der Mitte ihrer Höhe h.

Auf diese Weise ist die Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche zurückgeführt auf diejenige einer Linie.

Der Schwerpunkt S einer Kugelhaube liegt auf der Mitte der Höhe H (Fig. 228).

3.

Schwerpunkte von Körpern.

§ 199.

Unter den hierunter betrachteten Körpern sind entweder geometrische oder solche Körper verstanden, in denen der Stoff ganz gleichartig vertheilt ist.

Der Schwerpunkt eines Prismas oder eines Cylinders liegt auf der Mitte der Achse, d. i. derjenigen Linie, welche die Schwerpunkte der Endflächen miteinander verbindet.

Beweis: Zerlegt man das Prisma oder den Cylinder durch Ebenen, welche den Endflächen gleichlaufend sind, in sehr dünne Scheiben und bestimmt für jede der Scheiben die Schwerpunkte, so bilden diese in ihrer Aufeinanderfolge eine schwere Linie, welche von Schwerpunkt bis Schwerpunkt der Endflächen verläuft. Der Schwerpunkt dieser schweren Linien liegt auf deren Mitte.

§ 200.

Der Schwerpunkt S einer Pyramide oder eines Kegels liegt auf $\frac{1}{4}$ derjenigen Linie, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der

Spitze verbindet oder auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche ab gerechnet.

Beweis: Man theile die Pyramide durch gleichlaufend zur Grundfläche ABC gelegte Ebenen in unendlich dünne Scheiben, bestimme für letztere die Schwerpunkte (Siehe Fig. 229), so bilden diese in ihrer Aufeinanderfolge die Schwerlinie HD. Man wiederhole dasselbe Verfahren für ABD als Grundfläche, so ergiebt sich als Schwerlinie FC. In S, dem Durchschnittspunkte der genannten Schwerlinien, liegt der Schwerpunkt der Pyramide.

Nun verhält sich:

$$\frac{HS}{SD} = \frac{HF}{CD} = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{3}, \quad \ldots\ldots 370$$

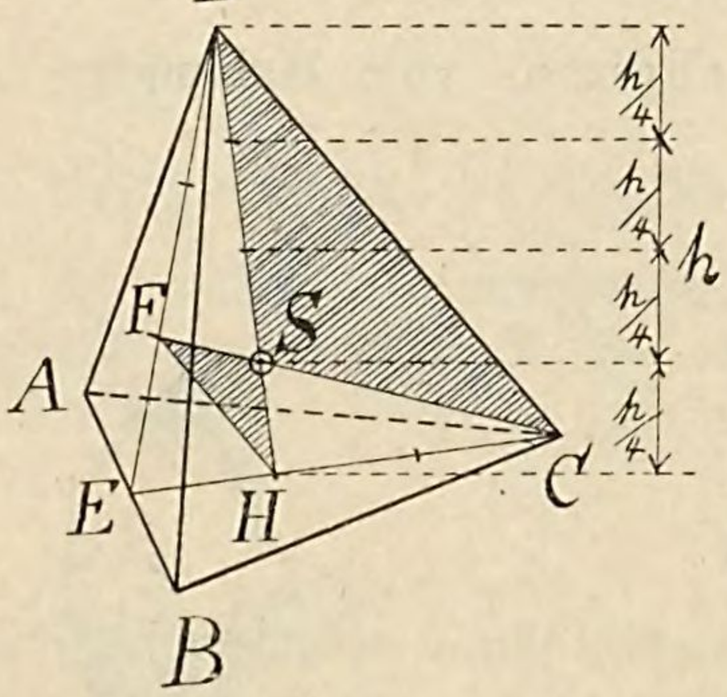
folglich ist:

$$HS = \frac{1}{3} SD,$$

$$HS = \frac{1}{4} HD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 371$$

Somit liegt der Schwerpunkt auch auf dem ersten Viertel der Höhe von der Grundfläche ab gerechnet.

Dasselbe gilt auch für die vielseitige Pyramide, sowie für den Kegel, der als eine Pyramide von unzählig viel Seiten anzusehen ist.



F .

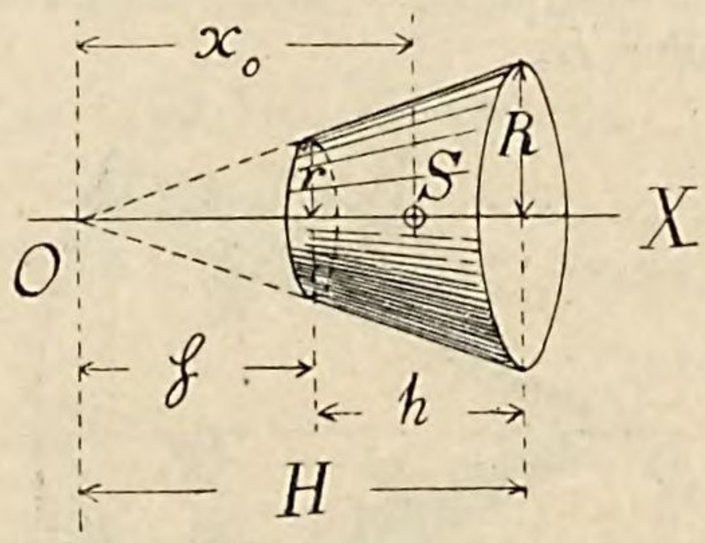


Fig. 230.

§ 201.

Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels (Fig. 230). (Man vergleiche hiermit auch das Verfahren, welches zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Ringstückes eingeschlagen wurde. (§ 196 Fig. 224.)

Es werde bezeichnet mit:

K_R der ganze Kegel bis zur Spitze O,

$x_R = \frac{3}{4} H$ dessen Schwerpunktsabstand von O,

K_r der abgeschnittene Theil von der Spitze bis zur Fläche,

$x_r = \frac{3}{4}$ ℌ dessen Schwerpunktsabstand von O,

$K = K_R - K_r$ der fragliche abgestumpfte Kegel,

x_0 der gesuchte Abstand des Schwerpunktes dieses abgestumpften Kegels von der Spitze O.

Nach der allgemeinen Gleichung 343:

$$x_0 = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots}$$

ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$x_0 = \frac{K_R x_R - k_r x_r}{K_R - K_r} \quad \dots\dots\dots 371$$

oder nach Einführung der gegebenen Grössen:

$$x_0 = \frac{3}{4} h \frac{R^2 - 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad \dots\dots 372$$

Für die abgekürzte Pyramide, deren grössere Endfläche mit A und deren kleine Endfläche mit a bezeichnet werden, ist:

$$x_0 = \frac{3}{4} h \frac{A + 2\sqrt{Aa} + 3a}{A + \sqrt{Aa} + a} \quad \dots\dots 373$$

§ 202.

Schwerpunkt S eines Kugelausschnittes vom Halbmesser R und der Höhe H.

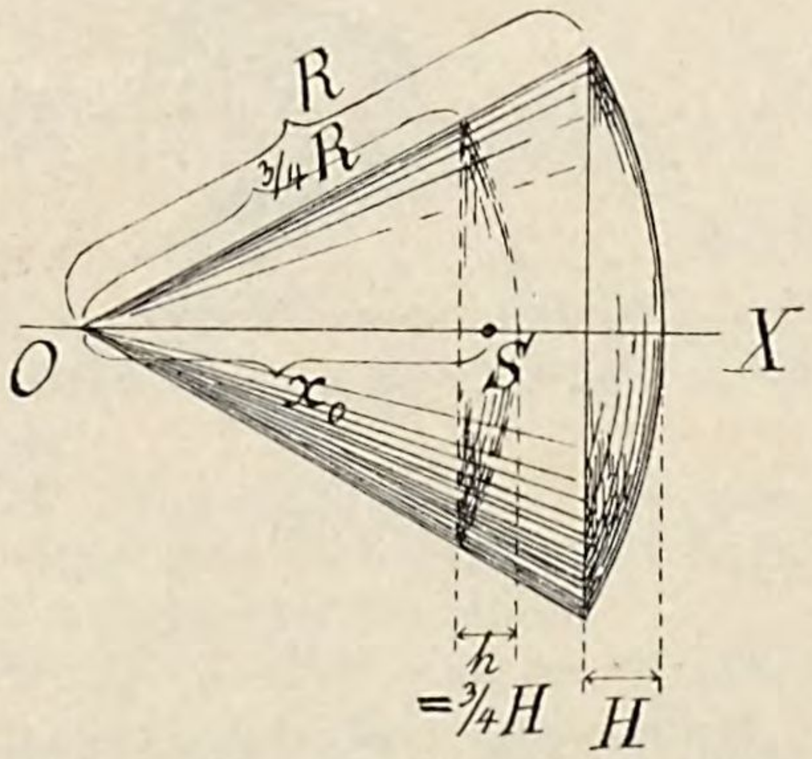


Fig. 231.

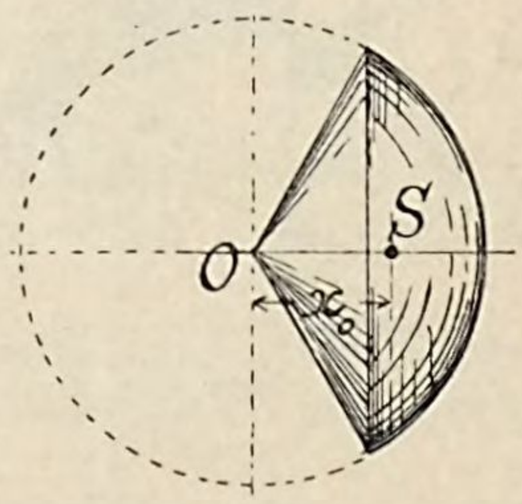


Fig. 232.

Man zerlege den Kugelausschnitt in kleine Kegel, deren Grundflächen mit der Kugeloberfläche, deren Spitzen mit dem Mittelpunkte O der Kugel zusammenfallen; bestimme für diese Kegel die Schwerpunkte (Fig. 231), so bilden diese in ihrer Nebeneinanderfolge eine schwere Kugelhaube vom Halbmesser $r = \frac{3}{4} R$ und von der Höhe $h = \frac{3}{4} H$. Der Schwer-

punkt dieser Kugelhaube, welcher auf der Mitte ihrer Höhe h liegt, ist dann der Schwerpunkt des Kugelausschnittes.

Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{3}{4} R - \frac{h}{2} \\ x_0 &= \frac{3}{4} R - \frac{3}{8} H. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 374$$

Beispiel 95: Für $R = 1$ m und $H = 0{,}5$ m ist:

$$x_0 = \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{3}{8} \cdot 0{,}5 = 0{,}5625 \text{ m}.$$

Beispiel 96: Für die Halbkugel ist $H = R$, folglich:

$$x_0 = \frac{3}{8} R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 375$$

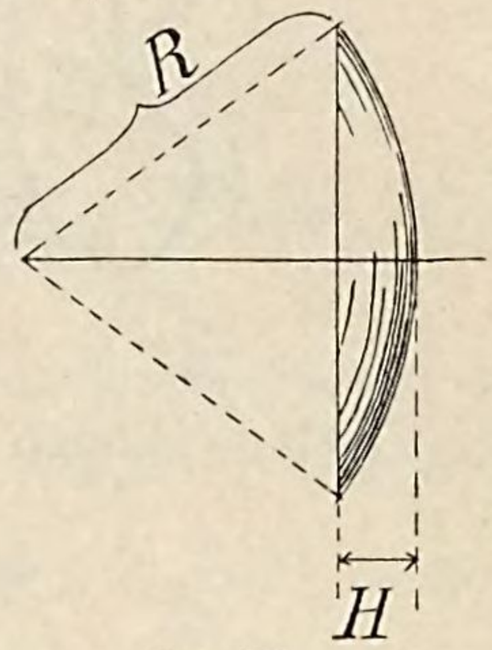


Fig. 233.

§ 203.

Für den Kugelabschnitt (Fig. 233) von der Höhe H und dem Kugelhalbmesser R (welcher als Unterschied eines Kugelausschnittes und eines Kegels aufgefasst werden kann) ist:

$$x_0 = \frac{3}{4} \frac{(2R - H)^2}{3R - H} \quad \ldots\ldots \quad 376$$

b.

Schwerpunkt ungleichartiger Gebilde (Körper).

Ist der Körper ungleichartig und unregelmässig, so kann dessen Schwerpunkt in der oben (§ 184) angedeuteten Weise durch Versuch bestimmt werden.

B.

Inhaltsbestimmungen von Flächen und Körpern nach der Regel von Pappus und Guldin. (Guldins Regel. Barycentrische Methode.)

§ 204.

Eine sehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte haben Pappus und Guldin gemacht, um die Oberflächen und Inhalte von Körpern zu bestimmen. Die Sätze, auf die wir im Folgenden näher eingehen, sind zuerst von Pappus, einem Geometer Alexandriens in der Vorrede des VII. Buches seiner 1588 zuerst veröffentlichten „Collection mathématique“ angegeben; ausführlicher behandelt aber von dem gelehrten Jesuiten Guldin, in dessen Werke „De centro gravitatis“, lib. II et III. 1635. (Siehe auch Jullien, Problèmes de mechanique rationelle, I Tome, 1866. S. 42.)

Bewegt sich eine beliebige ebene Linie $L = abcde$ (Erzeugende) stets senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung $ABC\ldots$ (Leitlinie) fort, so beschreibt sie eine Oberfläche. Diese Oberfläche wird erhalten als

Produkt aus der Erzeugenden *abcde* und dem Wege w, den der Schwerpunkt derselben während der Bewegung zurücklegt (Fig. 234).

Bewegt sich eine beliebige ebene Fläche $F = abcde$ (Erzeugende) stets senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung $ABC\ldots.$ (Leitlinie) fort, so beschreibt sie einen Körper. Der Rauminhalt desselben wird erhalten als Produkt aus der erzeugenden Fläche und dem Wege des Schwerpunktes dieser Fläche (Fig. 234). (Herstellung von Formen mittelst Schablone.)

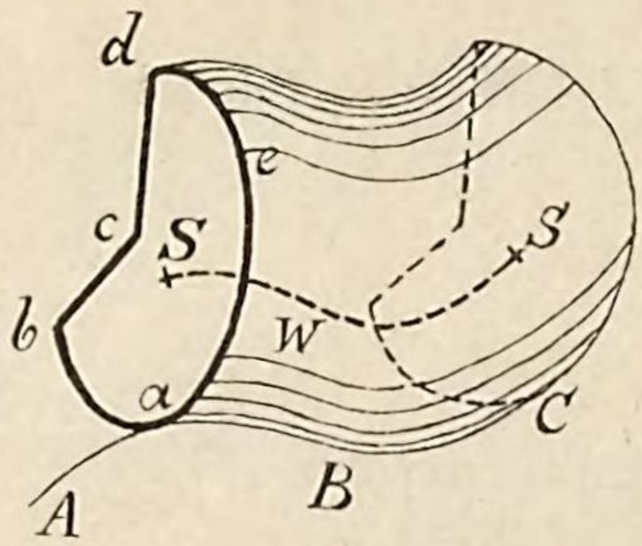


Fig. 234.

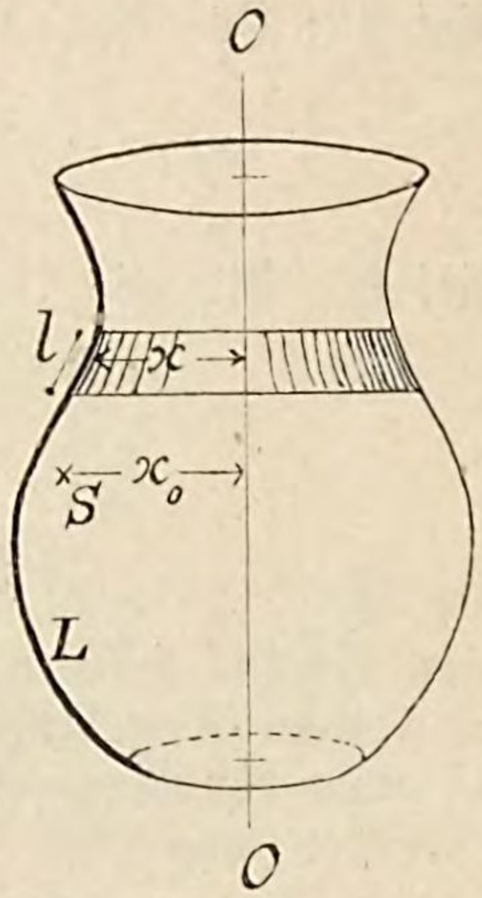


Fig. 235.

§ 205.

Rotiren die Linien, bezw. Flächen um Achsen, so werden die erzeugten Rotationsoberflächen bezw. Inhalte nach derselben Regel gefunden.

Beweis: Die Umdrehungs-Oberfläche, welche der Linien-Theil l der Fig. 235 bei einer vollen Umdrehung um die Achse OO beschreibt, ist:

$$f = l \cdot 2x\pi;$$

folglich die Gesammt-Oberfläche, die von sämmtlichen Linientheilen $l_1 l_2 l_3 \ldots.$, in welche L zerlegt gedacht werden kann, beschrieben wird:

$$F = \Sigma(f) = \Sigma(l \cdot 2x\pi) = 2\pi\Sigma(lx).$$

Nun ist aber nach den allgemeinen Gleichungen für die Lage des Schwerpunktes S einer Linie (Gleichung 337):

$$\Sigma(lx) = \Sigma(l) \cdot x_0 = Lx_0;$$

daraus folgt:

$$F = 2\pi \cdot Lx_0$$

oder:

$$\boxed{F = L \cdot 2x_0\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 377$$

d. h. in Worten: die Oberfläche F ist gleich der Erzeugenden *(L)* mal Weg des Schwerpunktes $(2\ x_0\pi)$, was zu beweisen war.

Um die Länge der beliebig gekrümmten Linie L durch den Versuch zu ermitteln, giebt man einem dünnen Drahte möglichst genau die Form der gegebenen Linie und misst dann die Länge dieses wiederum gerade gestreckten Drahtes. Auch die Lage des Schwerpunktes lässt sich durch Versuch ermitteln.

§ 206.

Der körperliche Inhalt, welchen der Flächentheil f während einer vollen Umdrehung beschreibt, ist nach der Figur:

$$k = f \cdot 2x\pi;$$

folglich der gesammte körperliche Inhalt:

$$K = \Sigma(k) = \Sigma(f \cdot 2x\pi) = 2\pi\Sigma(fx).$$

Nun ist aber nach Gleichung 340:

$$\Sigma(fx) = F \cdot x_0,$$

danach folgt: $K = 2\pi F x_0,$

oder: $K = F \cdot 2x_0\pi \quad . \quad . \quad 378$

d. h. der Umdrehungskörper K ist gleich dem Vielfachen aus der erzeugenden Fläche F und dem Wege des Schwerpunktes $(2x_0\pi)$.

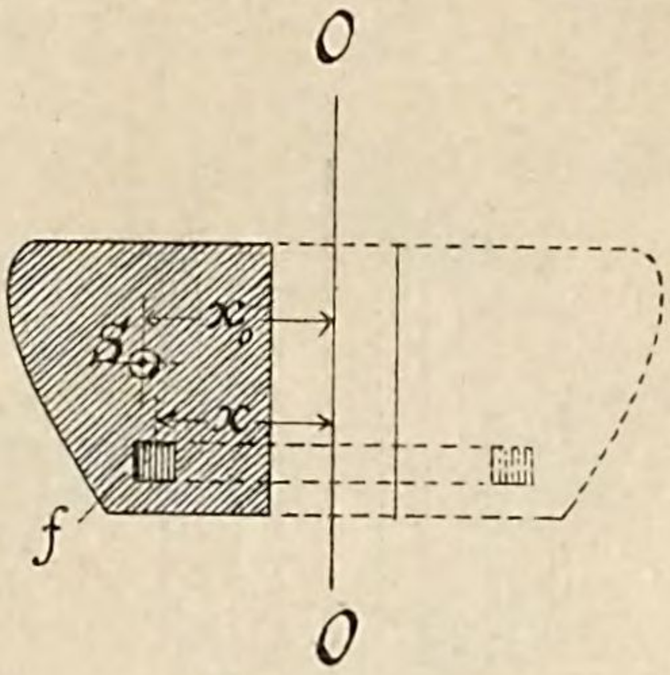


Fig. 236.

Auch hier lassen sich Flächen und Schwerpunkte der Fläche durch den Versuch ermitteln.

Ist die Umdrehung nicht eine vollständige, erfolgt sie also nicht um 2π, sondern nur um den Bogen $2\widehat{\delta}$, so heissen die betreffenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F &= L \cdot 2x_0\widehat{\delta} \\ K &= F \cdot 2x_0\widehat{\delta}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 379$$

z. B. für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ Umdrehung, d. i. für einen Centriwinkel von 180^0, 90^0, 60^0, wäre:

$$\widehat{\delta} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{6} \text{ zu setzen.}$$

§ 207.

Oberflächen.

Beispiel 97: Mantelfläche eines abgestumpften Kegels.

Eine Gerade L (Erzeugende) wird um die Achse $O\,O$ gedreht, mit welcher ihre Richtung den Winkel a einschliesst und von welcher ihr oberes Ende um die Länge r absteht. Es ist die Mantelfläche des hierbei beschriebenen abgestumpften Kegels zu bestimmen (Fig. 237):

$$F = L \cdot 2x_0\pi.$$

$$F = L \cdot 2\left(r + \frac{L \sin a}{2}\right)\pi \quad . \quad . \quad 380$$

Für $L = 0{,}5$ m, $r = 0{,}2$ m, $a = 30^0$ ist die Mantelfläche $F = 2{,}04$ m.

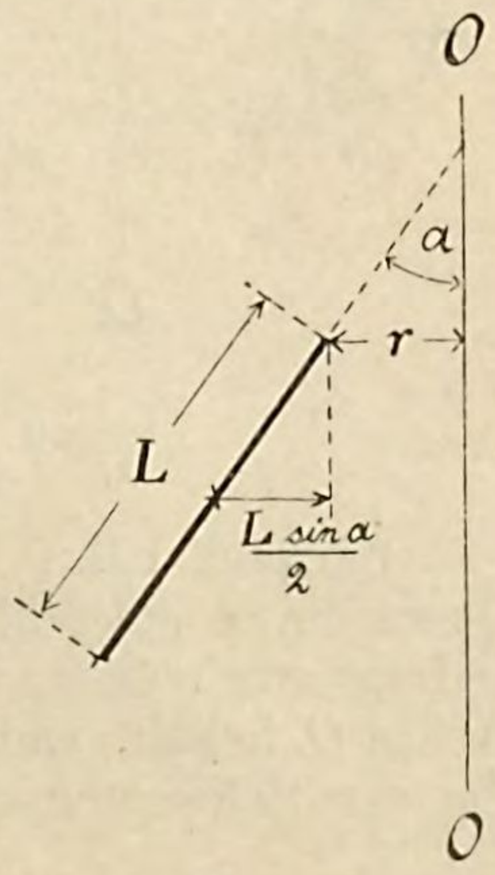


Fig 237.

Beispiel 98: Die Mantelfläche eines Cylinders entsteht für $a = 0$, also sin $a = 0$, ist somit (Fig. 238):

$$F = L \cdot 2r\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 381$$

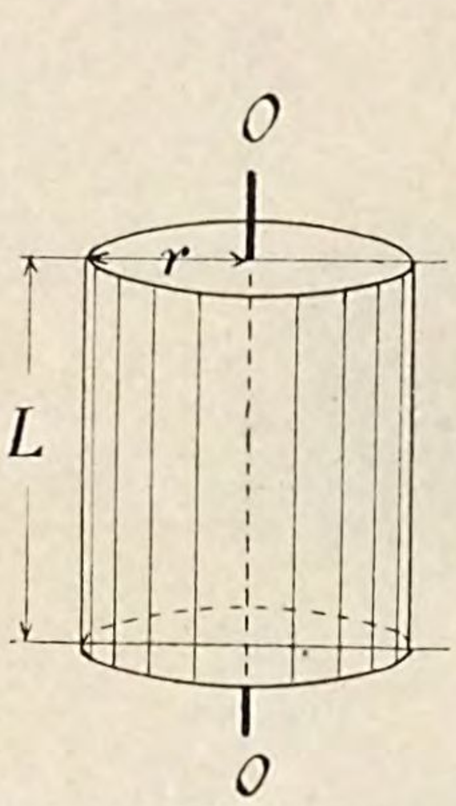


Fig. 238.

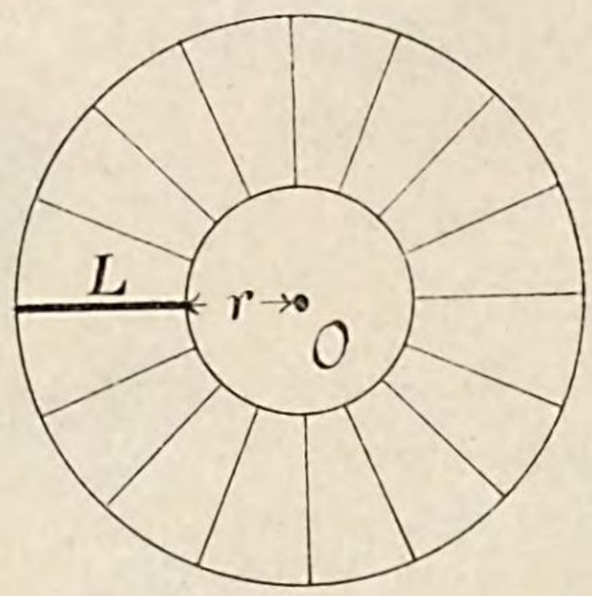


Fig. 239.

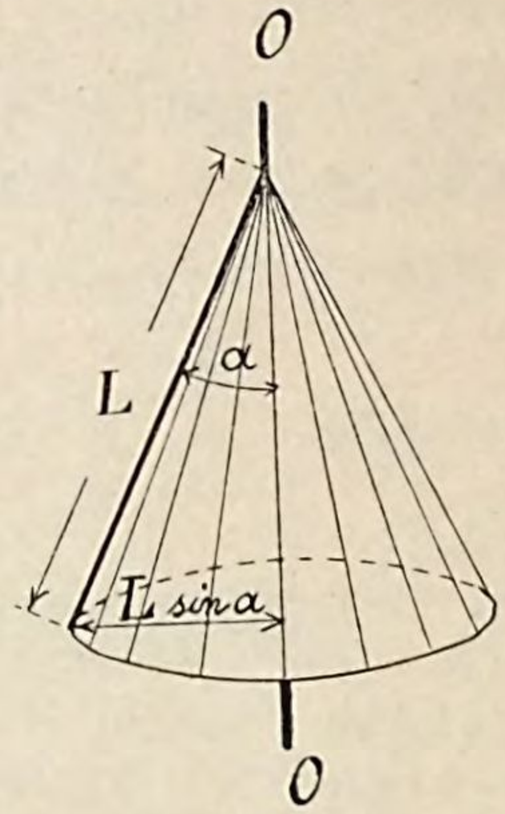


Fig. 240.

Beispiel 99: Die Oberfläche eines ebenen Ringes entsteht für $a = 90^0$, also sin $a = 1$, ist demnach (Fig. 239):

$$F = L \cdot 2\left(r + \frac{L}{2}\right)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 382$$

Beispiel 100: Die Mantelfläche eines vollen Kegels entsteht für $r = 0$, ist demnach (Fig. 240):

$$F = L \cdot 2 \cdot \frac{L \cdot \sin a}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 383$$

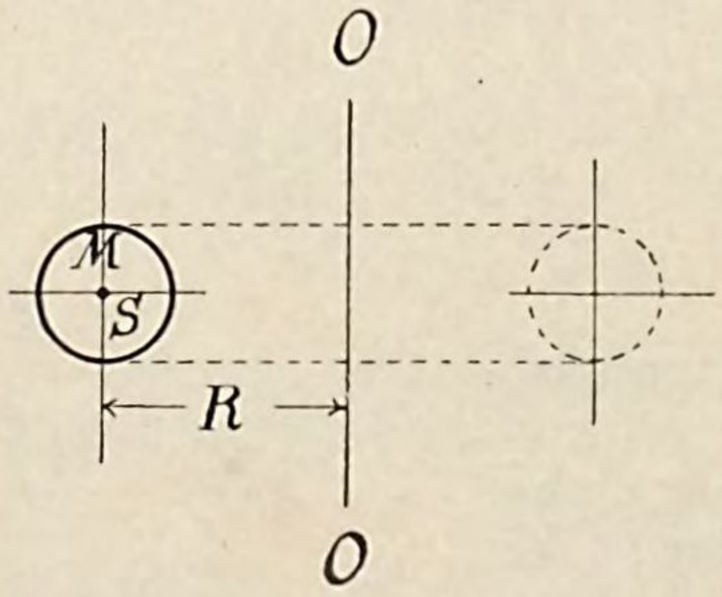


Fig. 241.

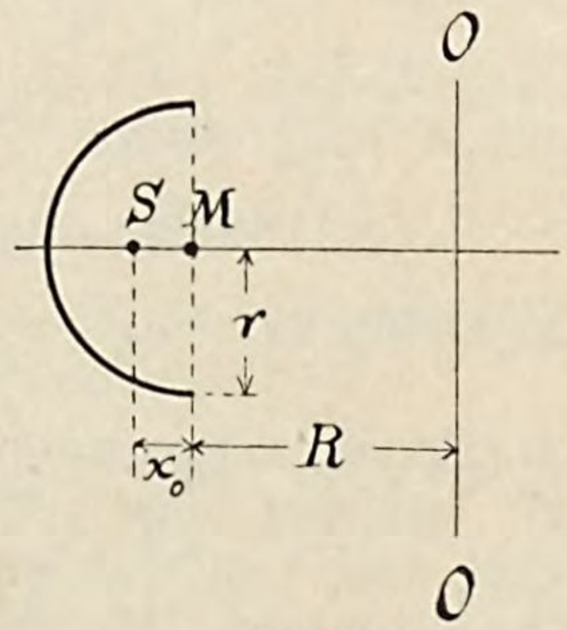


Fig. 242.

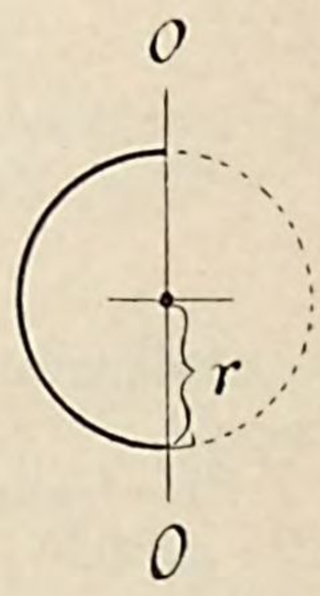


Fig. 243.

Beispiel 101: Die Oberfläche eines Kreisringes von kreisförmigem Querschnitte entsteht, wenn eine Kreislinie $L = 2r\pi$ um eine Achse so gedreht wird, dass ihr Mittelpunkt M stets denselben Abstand R von der Achse O behält, und ihre Ebene stets senkrecht zur Drehbewegung bleibt. Da der Schwerpunkt S mit M zusammenfällt, ist nach Fig. 241:

$$F = 2r\pi \cdot 2R\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 384$$

Beispiel 102: Die Erzeugende ist nur eine Halbkreislinie $L = r\pi$. Der Abstand des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte M ist nach dem Früheren $x_0 = \frac{2r}{\pi}$ (Gleich. 351), folglich nach Fig. 242:

$$F = r\pi \cdot 2\left(\frac{2r}{\pi} + R\right)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 385$$

Beispiel 103: Die Kugeloberfläche ergiebt sich aus Gleich. 385 für $R = 0$ und ist nach Fig. 243:

$$F = r\pi \cdot 2 \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi,$$

$$F = 4 \cdot r^2\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386$$

d. h. die Kugeloberfläche ist gleich dem Vierfachen des grössten Kugelkreises.

§ 208.

Körperliche Inhalte.

Beispiel 104: Die erzeugende Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck. Die eine Kathete h bleibt stets der Achse OO parallel und hat von dieser den Abstand R. Die Richtung der anderen Kathete r schliesst folglich 90^0 mit der OO ein. Für eine volle Umdrehung ist (Fig. 244):

$$K = \frac{r \cdot h}{2} \cdot 2x_0\pi,$$

$$= \frac{r \cdot h}{2} \cdot 2\left(R + \frac{r}{3}\right)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 387$$

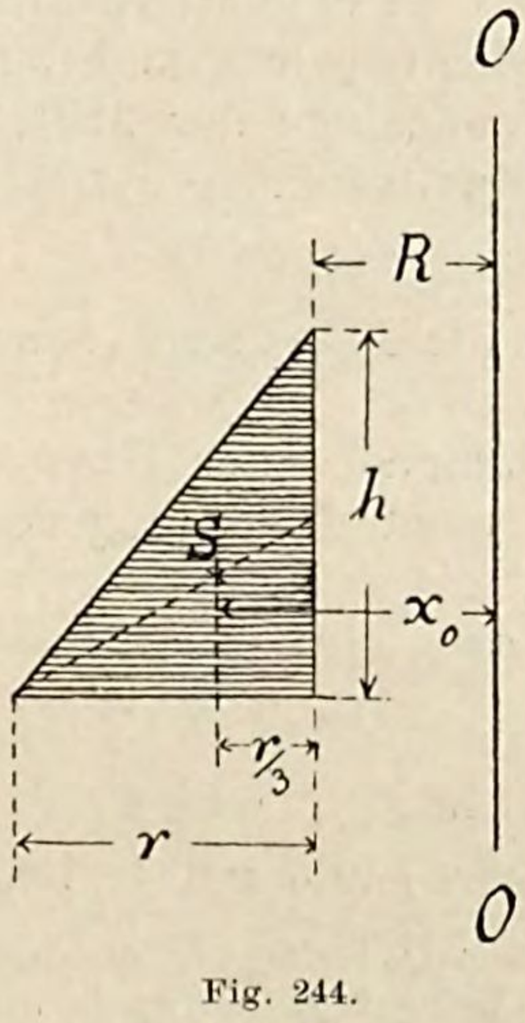


Fig. 244.

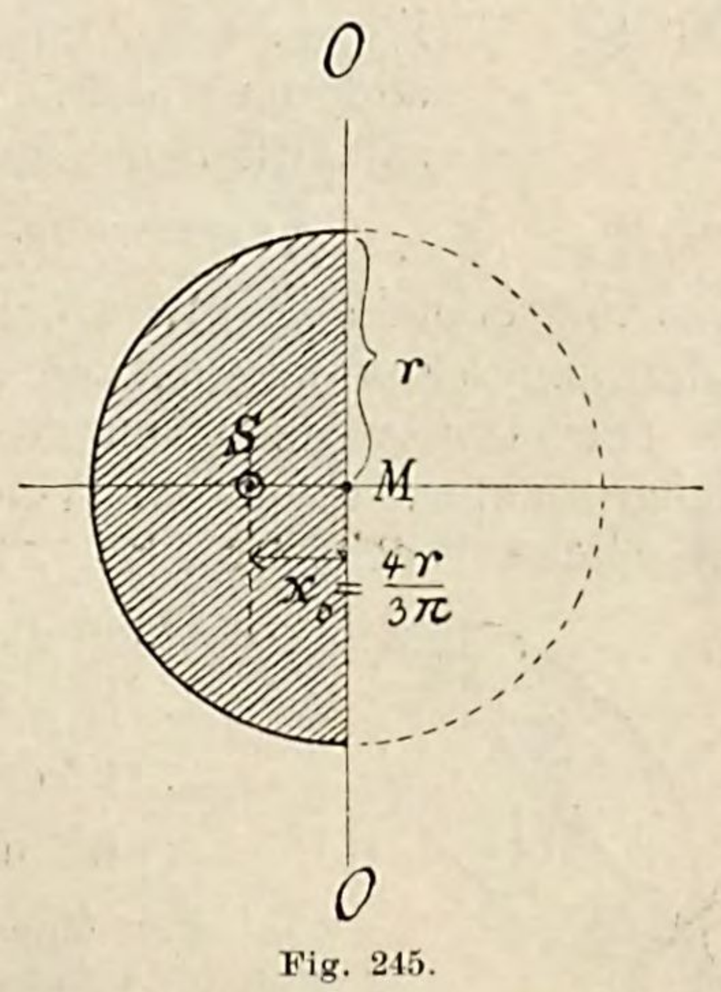


Fig. 245.

Beispiel 105: Der Inhalt eines Kegels ist für $R = 0$;

$$K = \frac{r \cdot h}{2} \cdot 2\,\frac{r}{3}\pi,$$

$$= \frac{1}{3}r^2\pi h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 388$$

Beispiel 106: Der Inhalt des oben (Gleichung 384) beschriebenen Kreisringes ist:

$$K = r^2\pi \cdot 2R\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 389$$

Beispiel 107: Der Inhalt der Kugel ist, da nach dem Früheren (Gleich. 361) der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche vom Mittelpunkte $x_0 = \frac{4r}{3\pi}$ war (Fig. 245),

$$K = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\,\frac{4r}{3\pi}\,\pi,$$

$$K = \frac{4}{3}\,r^3\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 390$$

C.

Bewegungserscheinungen an unterstützten Körpern.

a.

Unterstützung in **einem** Punkte oder in **einer** Drehachse.

§ 209.

Alle Körper, also auch die in der Technik verwendeten, müssen mindestens in einem Punkte unterstüzt werden, wenn sie gegen Fallen gesichert oder an dem ihnen angewiesenen Orte erhalten werden sollen.

Der Stützpunkt muss in dem Schwerpunktslothe liegen, wenn nur das eigene Gewicht in Frage kommt, anderenfalls in der Wirkungslinie der Mittelkraft aus sämmtlichen am Körper auftretenden Kräften.

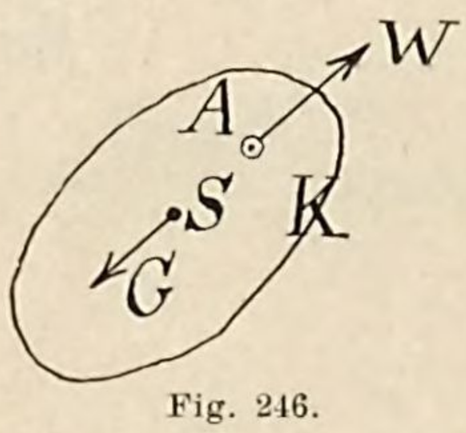


Fig. 246.

Es sei ganz allgemein (Fig. 246):

G die in S angreifende Kraft, welche auch als Mittelkraft aus mehreren Kräften angesehen werden kann,

W der in dem Unterstützungspunkte A auftretende, zur Herstellung des Gleichgewichtes, d. h. zur Verhütung einer Bewegungsveränderung erforderliche Wechseldruck.

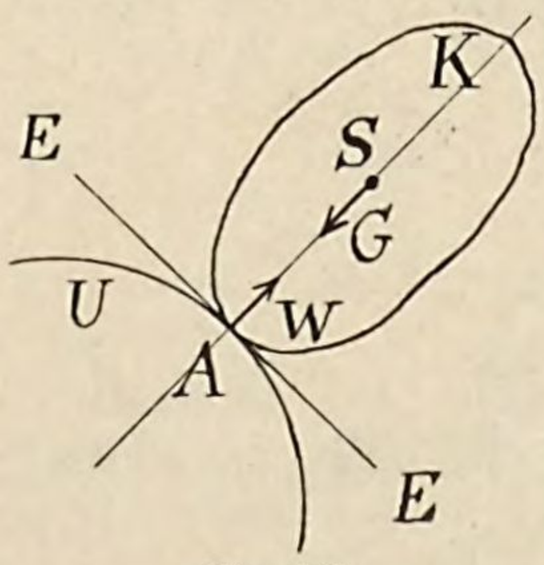


Fig. 247.

Dann muss (§ 149) stets:

1. $W = G$,
2. W entgegengesetzt G wirken,
3. W in derselben Linie mit G liegen.

Für einen auf einer Unterlage U in einem einzigen Punkte A unterstützten Körper K ist noch hinzuzufügen, dass die Richtungslinie SA senkrecht stehen muss zu der Ebene EE, die zugleich den Körper K und die Unterlage U in A berührt (Fig. 247).

Durch die Bedingung 1. ist die Grösse, durch 2. die Richtung, durch 3. die Lage des erforderlichen Widerstandes bestimmt.

§ 210.

Das eben Gesagte gilt auch für den besonderen Fall, wenn G das Eigengewicht und S der Schwerpunkt des Körpers ist.

Es müssen auch jetzt, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, selbstredend A und S mit dem Schwerpunktslothe zusammenfallen.

In diesem besonderen Fall nennt man den Gleichgewichtszustand:

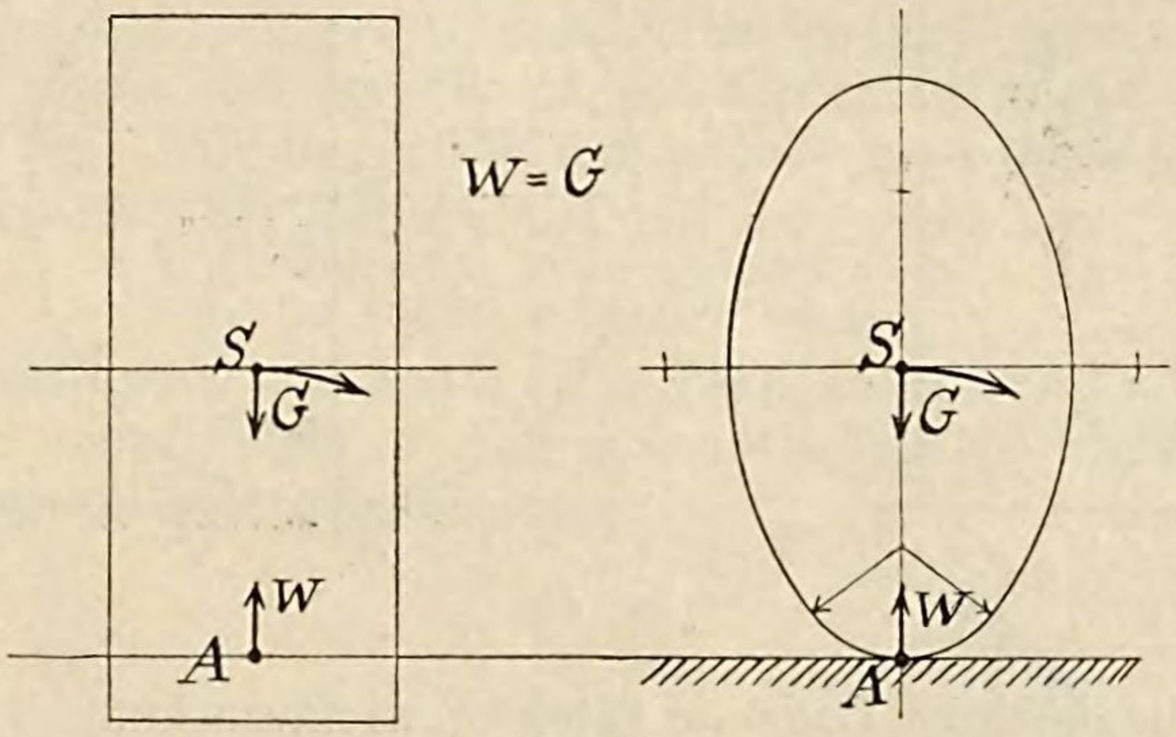


Fig. 248.

1. hinfällig (unsicher, labil) (Fig. 248), wenn bei einer Drehung um A aus der Gleichgewichtslage der Schwerpunkt S fällt (der Körper umschlägt und die folgende Gewichtslage [2] aufsucht);

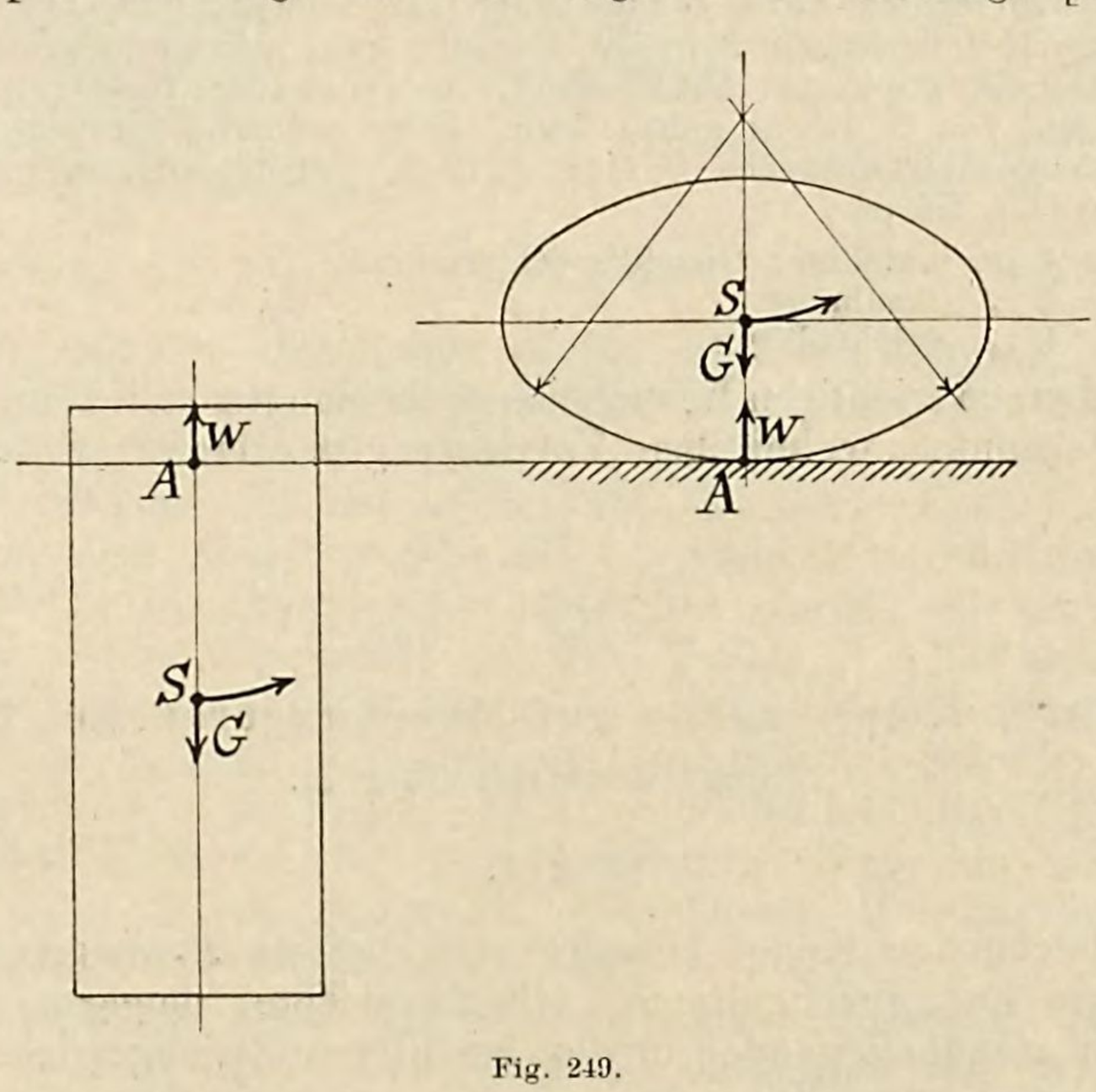


Fig. 249.

2. standhaft (sicher, stabil), wenn bei der Drehung um A der Schwerpunkt S gehoben werden muss und der Körper, sich selbst überlassen, dieselbe Gleichgewichtslage immer wieder aufsucht (Fig. 249);

3. gleichgültig (indifferent), wenn bei der Drehung um A der Schwerpunkt S weder fällt noch steigt, vielmehr der Körper in jeder Lage, in die man ihn bringt, verharrt (Fig. 250).

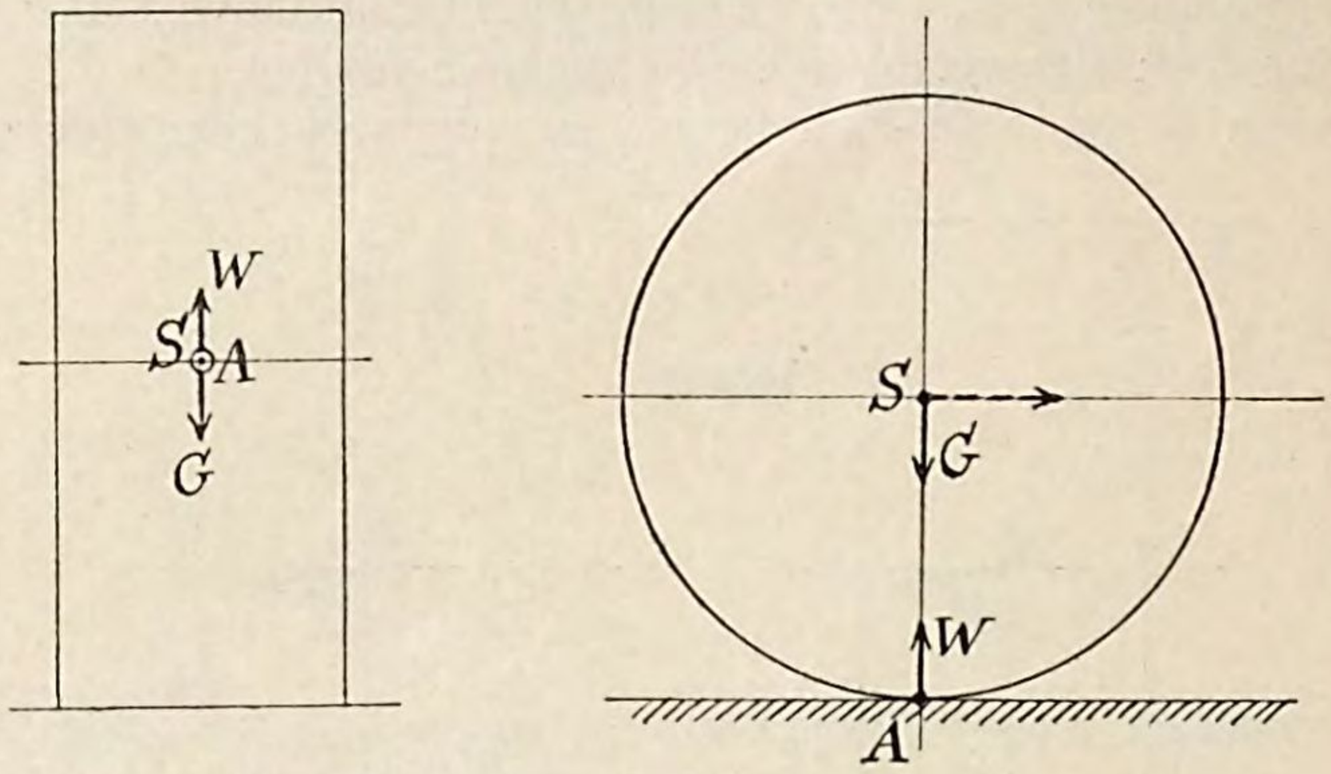


Fig. 250.

S hat die höchste Lage im Gleichgewichtszustande 1,
S „ „ tiefste „ „ „ 2,
S „ immer dieselbe Höhenlage in Bezug auf A im Gleichgewichtszustande 3.

Die in dieser Fassung gegebenen Erklärungen gelten für alle Fälle, sowohl für einen in einer wagerechten Achse A aufgehängten als auch für einen durch eine wagerechte Unterlage U unterstützten Körper. Dasselbe kann keineswegs behauptet werden von den sonst meist gegebenen Erklärungen, in denen das Hauptgewicht auf die gegenseitige Lage von S und A gelegt wird. Denn während im letzteren Falle in allen drei Gleichgewichtszuständen S über A liegt, befindet sich bei dem an einer Achse A hängenden Körper,

S über A im hinfälligen Gleichgewichtszustande (1),
S unter A „ standhaften „ (2),
S in A „ gleichgültigen „ (3).

Diese überaus wichtigen Bewegungserscheinungen sollen im Folgenden an einigen bekannten, technischen Vorrichtungen erläutert werden.

a.

Die betrachteten Körper ruhen auf einer wagerechten Unterlage.
S liegt demnach über A.

§ 211.

Eine gleichartige Kugel befindet sich auf einer wagerechten Ebene in jeder Lage im „gleichgültigen“ Gleichgewichte, dagegen ein Ei entweder in der standhaften oder in der hinfälligen Gleichgewichtslage. Am unsichersten würde dasselbe stehen, wenn es auf die Spitze gestellt wird.

Bei der gleichartigen Kugel fallen S und der Mittelpunkt M zusammen. Wäre dagegen die obere Kugelhälfte leichter, läge also S unterhalb M (Fig. 251), so müsste S bei der Drehung um A gehoben werden, diese befände sich somit im standhaften Gleichgewichte:

Die Standfähigkeit wird um so grösser, je tiefer S und je höher M, der Mittelpunkt der unteren Abrundungsfläche, zu liegen kommt.

Anderenfalls würde (Fig. 251) der Gleichgewichtszustand ein hinfälliger werden, wenn der Mittelpunkt M_2 der unteren Abrundung unterhalb S zu liegen käme. Es würde dann der Schwerpunkt, bei irgend einer Drehung des Körpers um A, **fallen.**

Ersetzte man die obere leichtere Hälfte der Kugel durch ein Hohlgefäss, so würde dadurch der Gleichgewichtszustand nicht geändert. Ein solches Gefäss würde sich deshalb immer wieder aufrichten, wenn man es auf die Seite legt. Nur im gefüllten Zustande möchte es umschlagen.

Für solches sogen. „Stehauf“ (Fig. 251) gilt das Verschen:

Trink' mich aus und leg' mich nieder,
Steh' ich auf, so füll' mich wieder!

Ein Hollundermarksäulchen h (Fig. 252), an dessem Ende ein schwerköpfiger Nagel eingetrieben ist, nimmt auch immer wieder die in der Figur verzeichnete Lage an.

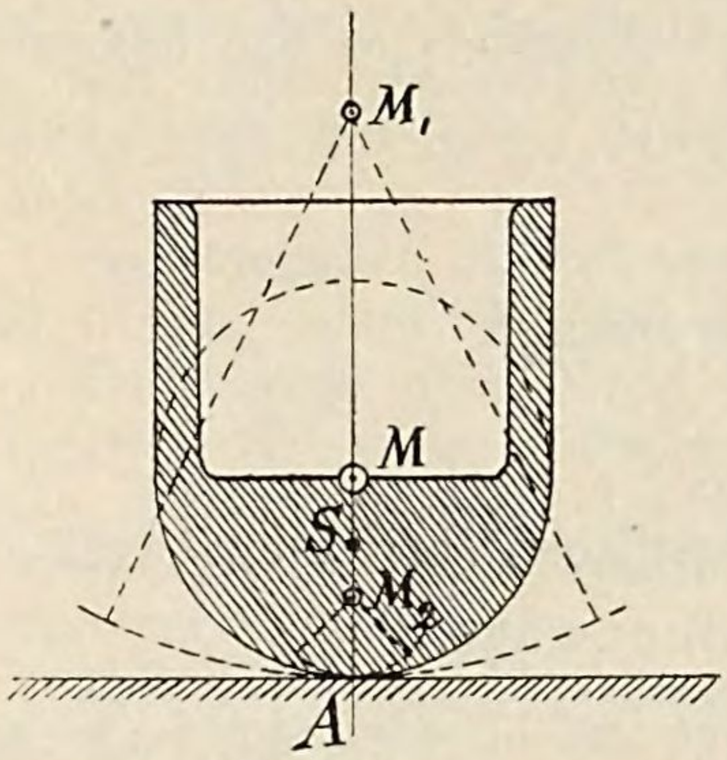


Fig. 251.

Fig. 252.

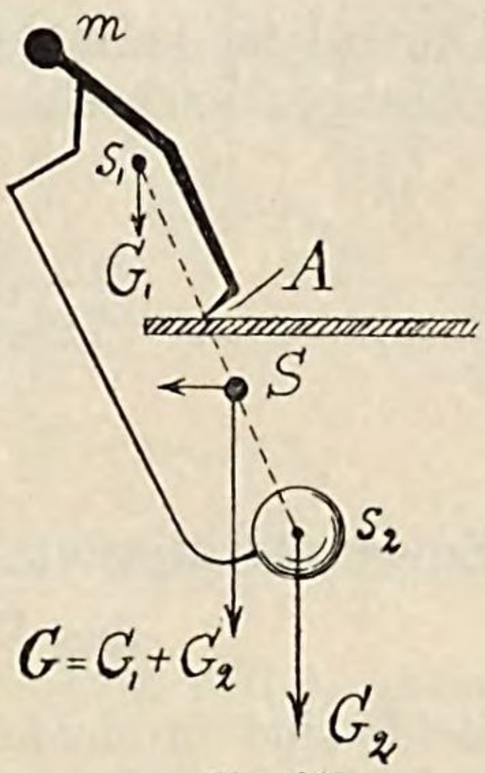


Fig. 253.

Je mehr sich der Mittelpunkt M der unteren Abrundung dem Unterstützungspunkte A nähert, desto unsicherer wird unter sonst gleichen Verhältnissen der Gleichgewichtszustand.

Deshalb befindet sich der in Fig. 253 auf seiner Fussspitze stehende Mann m, mit dem Schwerpunkte bei s_1, offenbar im hinfälligen Gleichgewichte. Die Spitze könnte s. z. s. angesehen werden als eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Punkte A selbst zusammenfällt.

Erst wenn man mit dem Manne m einen schweren Körper, dessen Schwerpunkt bei s_2 liegt, fest verbindet, so dass der Schwerpunkt S des Ganzen unterhalb A zu liegen kommt, geht das hinfällige Gleichgewicht in ein standhaftes über. Der Mann pendelt so lange hin und her, bis S lothrecht unter A sich eingestellt, mit anderen Worten, bis S seine tiefste Lage eingenommen hat.

Ebenso läuft mit Sicherheit bei der sogen. „Seilbahn“ die Rolle r mit dem darunter hängenden Fördergefässe auf dem straff gespannten Seile s entlang. Es könnte r, entsprechend vergrössert, auch das Rad eines sogen. Zweirades (Velocipedes) sein. Der Radfahrer würde bei einem derartigen unten angebrachten Gewichte mit grosser Sicherheit auf dem Seile entlang fahren.

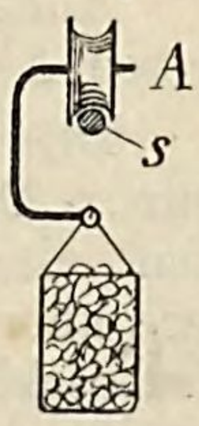


Fig. 254.

Die im nebenstehenden Bildchen (Fig. 255) dargestellte, leicht herzustellende Vorkehrung zeigt in überraschender Weise, wie man das hinfällige Gleichgewicht eines Körpers K durch passend mit ihm verbundene Gewichte GG in standhaftes Gleichgewicht verwandeln kann.

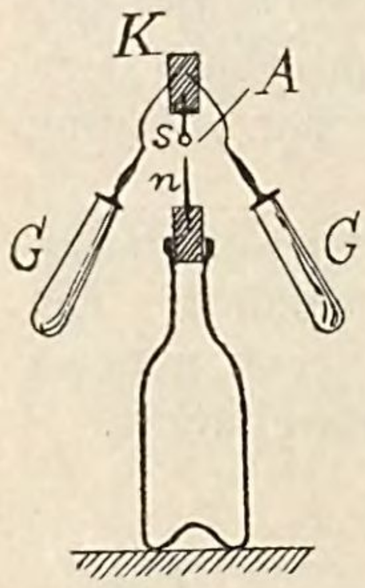


Fig. 255.

Die Nähnadel n ist mit der Spitze nach oben in den Kork einer Flasche gesteckt. s ist eine in einen anderen Kork K gesteckte Stecknadel, deren nicht zu glatter Kopf bei A auf die Nähnadelspitze sich stützt. Für sich allein befindet sich der Kork K offenbar in so unsicherem Gleichgewichte, dass er herunterfallen wird. Sobald man jedoch die beiden Gabeln GG mit den nach unten gekehrten schweren Griffen in den Kork K steckt, erhält sich letzterer mit ziemlicher Sicherheit auf der Nadelspitze A. Der Schwerpunkt S des beweglichen Theiles liegt unterhalb A und muss steigen beim Verlassen der Gleichgewichtslage.

Die zuletzt betrachteten Fälle sind als Uebergänge zu den folgenden Betrachtungen anzusehen.

β.

Die Körper sind aufgehängt.

§ 212.

Zu den wichtigsten hierher gehörigen künstlichen Vorrichtungen zählen: das Pendel und die Balkenwage.

Beide sind in einem Punkte A aufgehängt und befinden sich im standhaften (stabilen) Gleichgewichtszustande.

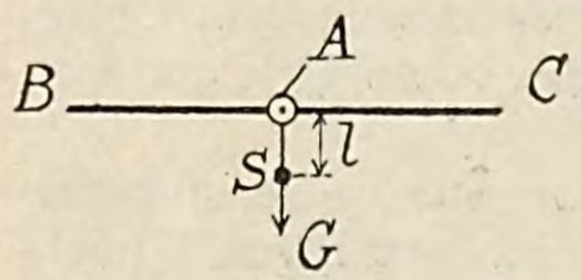


Fig. 256.

Man könnte die Balkenwage auffassen als ein sehr kurzes Pendel l, welches am Unterstützungspunkte A nach rechts und links mit je einem wagerechten Arme von gleicher Länge ($BA = AC$) versehen ist. Das Pendel hat die träge Masse der schweren Arme mit in Bewegung zu setzen, die Schwingungsdauer wächst deshalb hier mit Abnehmen der Pendellänge l. Für l = Null würde der Balken sich im „gleichgültigen“ Gleichgewichte befinden und nun bei Mehrbelastung des einen Balkens zwar eine grosse „Empfindlichkeit“ zeigen, d. h. einen grossen Ausschlag geben, aber dafür auch gar nicht mehr schwingen. — Hieraus ist noch zu folgern, dass der Schwerpunkt S einer Wage unter dem Aufhängepunkte liegen muss. Feinere Wagen sind mit einer Vorrichtung versehen, durch welche der Schwerpunkt S verlegt, also die Länge l, und damit die Empfindlichkeit der Wage, verändert werden kann.

Auch dem Zwecke nach haben das Pendel und die Balkenwage eine grosse Aehnlichkeit. Beide dienen zum Messen.

Das Pendel wird bei den Pendeluhren zum Messen der Zeit benutzt. Die Länge des Sekundenpendels am Meeresspiegel zu London dient als Yard = 0,914 m den Engländern als Längeneinheit. Insbesondere aber ist das Pendel die zuverlässigste Vorrichtung zum Messen der Erdbeschleunigung, bezw. der Masse der Erde. Von ihm ist eingehend bereits oben gehandelt. (§§ 134, 287 und Gl. 259, 267.)

Die Wage dient zum Messen des Druckes, den die Körper in Folge der Erdbeschleunigung auf ihre Unterlage (Wagschale) ausüben, oder besser gesagt, zum Vergleichen der Massen der Körper. Die Wage kann aber auch überhaupt zum Messen der Kräfte benutzt werden.

§ 213.

Die **gewöhnliche, zweiarmige Balkenwage** (Fig. 257) besteht aus einem Balken (Hebel) BC, der in der Mitte eine in einer Stahl- oder Achatpfanne ruhende Stahl-Schneide A hat, und an dessen beiden Enden C und B ebenfalls Schneiden angebracht sind, auf denen die Schalen EE zur Aufnahme der zu vergleichenden Massen (Gewichte) hängen.

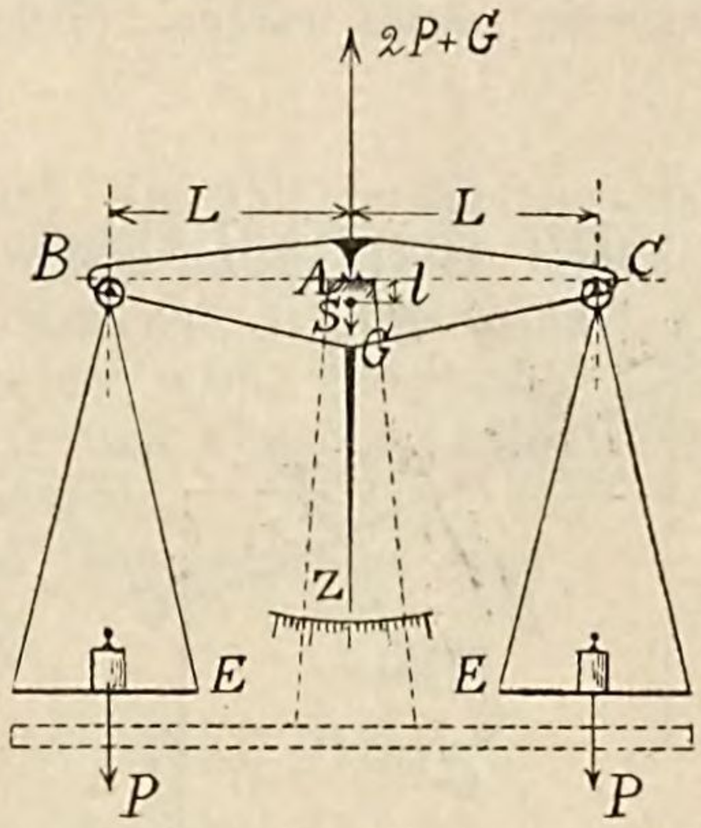


Fig. 257.

Diese drei Schneiden A, B, C müssen gleichlaufend sein und sollen bei mittlerer Belastung der Wagschalen in ein und derselben wagerechten Ebene sich befinden. Hierbei liegt S um l unter A.

Bei kleineren Belastungen kommen B und C und damit S höher zu liegen, die Empfindlichkeit der Wage wächst. Bei grösseren Belastungen dagegen liegen, in Folge der Durchbiegung des Balkens, B und C tiefer als A, damit vergrössert sich l, d. h. die Empfindlichkeit der Wage vermindert sich.

Hat die Wage gleiche Hebelarme, wie es sein sollte, genügt sie also der Gleichung:

$$AB = AC = L,$$

so stellt sich der Balken wagerecht bei genau gleicher Belastung der Schalen, oder derselbe schwingt um die Gleichgewichtslage.

Mit dem Balken ist noch ein rechtwinklig zu ihm stehender Zeiger (Zunge Z) fest verbunden, dessen lothrechte Stellung die wagrechte Lage des Balkens anzeigt.

Bei feinen Wagen ist unmittelbar unter der Zeigerspitze eine (in Millimeter eingetheilte) Skala angebracht, an der die Grösse der Ausschläge oder Pendel-Schwingungen abgelesen werden kann.

Nach der Grösse des (einem bestimmten Ueberschussgewichte entsprechenden) Ausschlages schätzt man die Empfindlichkeit der Wage.

§ 214.

Haupterfordernisse einer gleicharmigen Wage sind:

1. dass $AB = AC = L$ ist und der Zeiger bei unbelasteten oder auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagschalen „einspielt“, d. h. auf die Mitte (den Nullpunkt) der Skala sich einstellt, oder um diese Mitte nach beiden Seiten hin um gleich viele Theilstriche hin- und herschwingt,

2. dass die Wage eine genügende Empfindlichkeit zeigt, also bei ungleicher Belastung einen entsprechend grossen Ausschlag giebt.
3. dass der Zeiger immer wieder auf die Mitte einspielt, wenn die Mehrbelastung entfernt, oder wenn der Wagebalken nach dem „Arretiren“ wieder ausgelöst wird.

Die Schwingungsdauer wächst mit der Empfindlichkeit, kann also zur Schätzung der letzteren dienen. Bei der gewöhnlichen Form der Wage ist die Schwingungsdauer zwischen 10 und 15 Sekunden, bei den kurzarmigen Bunge'schen Wagen zwischen 6 bis 10 Sekunden, zu wählen. Eine grössere Schwingungsdauer verursacht Zeitverlust und bedingt meistens Unregelmässigkeiten der Einstellung, die den grösseren Ausschlag nutzlos machen. (Siehe auch Kohlrausch, Leitfaden der Physik. 1887. 22.)

§ 215.

Die Empfindlichkeit der Wage.

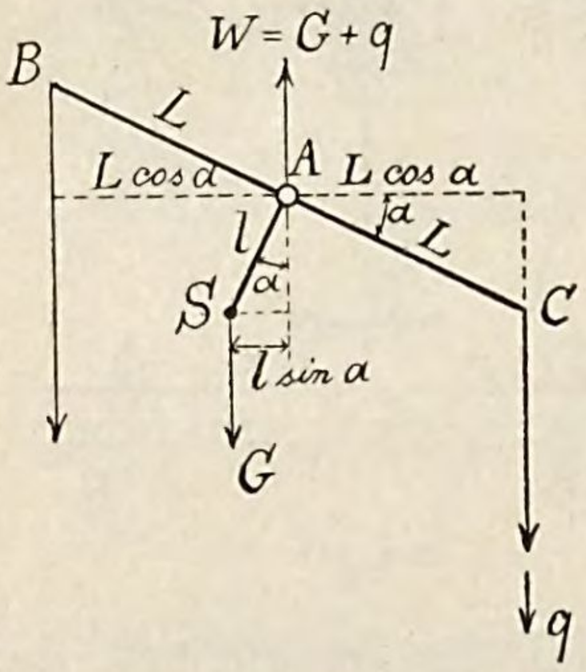


Fig. 258.

Ist, wie die Figur andeutet:

L die Länge der Arme,
G das Eigengewicht des beweglichen Theiles der Wage (Arme, Wagschale),
l der Abstand des Schwerpunktes S (Angriffspunkt von G) von A,
q die Mehrbelastung der rechten Seite, und
a der Winkel, um den in Folge dieser Mehrbelastung sowohl L als auch l sich aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage herausdrehen, so ergiebt sich nach dem Satze von den statischen Momenten (in Bezug auf A als Drehpunkt) für das Gleichgewicht:

$$qL\cos a - Gl\sin a = 0,$$

$$1.\quad \boxed{\operatorname{tg} a = \frac{qL}{Gl}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 391$$

$$2.\quad q = G\,\frac{l}{L}\operatorname{tg} a,$$

oder:

$$3.\quad \frac{\operatorname{tg} a}{q} = \frac{L}{Gl}.$$

Nach 1 ist die Grösse des Ausschlages a zu berechnen, der der Mehrbelastung entspricht.

Aus 2 geht hervor, dass man für eine bestimmte Wage die Mehrbelastung aus dem Ausschlage a berechnen kann, dass also Gewichtsbestimmung hier auf Winkelmessung hinausläuft.

Ist die Mehrbelastung q in Milligramm gegeben, so misst das Verhältniss $\frac{\operatorname{tg} a}{q}$ den Ausschlag für ein Milligramm.

Dieses Verhältniss kann demnach als Maass der Empfindlichkeit einer Wage angesehen werden.

Eine Wage ist hiernach um so empfindlicher:

1. je grösser L, oder
   je länger die Arme sind,
2. je kleiner G, d. h.
   je leichter die Wage an sich ist und je leichter die Körper sind, die man miteinander vergleicht;
3. je kleiner l ist, d. h.
   je näher der Schwerpunkt S des beweglichen Theiles der Wage dem Drehpunkte A liegt.

§ 216.

Die Schnellwage (oder römische Wage) (Fig. 259) besteht aus dem um den Unterstützungspunkt A drehbaren, zweiarmigen, aber ungleicharmigen Wagebalken (Hebel) BAD. An dem kurzen Arme hängt die Wagschale vom Gewichte w, an dem längeren Arme hängt das Laufgewicht P. Die Wage dient dazu mittelst ein und desselben kleinen Gewichtes P verschiedene grössere Lasten zu wägen.

Für die unbelastete Wage (Fig. 259) ist Gleichgewicht, wenn:

$$1.\quad w \cdot r = P \cdot a.$$

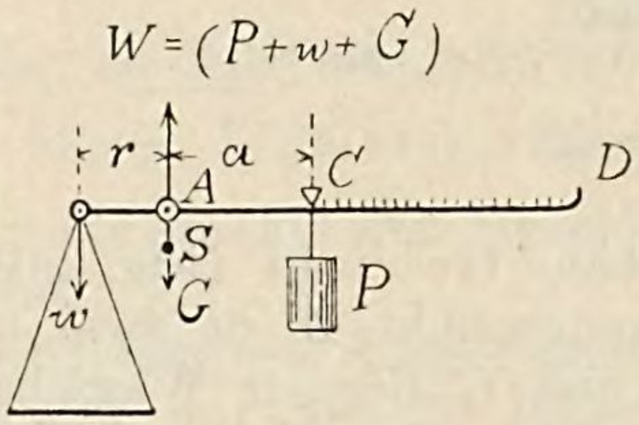


Fig. 259.

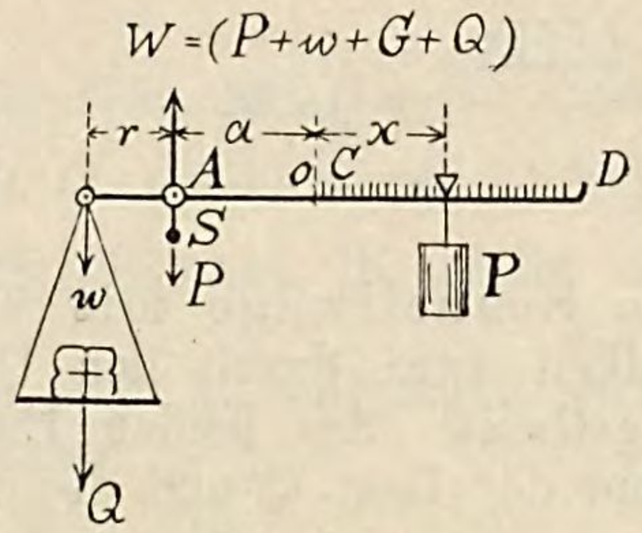


Fig. 259 a.

Ist die Wagschale mit dem Körper vom Gewichte Q belastet (Fig. 259 a), und P soweit nach rechts verschoben, bis der Wagebalken sich wieder in der wagerechten Gleichgewichtslage befindet (was an einer mit dem Wagebalken bei A verbundenen lothrechten Zunge erkannt wird), so gilt die Gleichung:

$$(w + Q)\, r = P(a + x),$$

oder:

$$2.\quad wr + Qr = Pa + Px,$$

wird in diese Gleichung für wr der Werth aus Gleichung 1 eingesetzt, so folgt:

$$Qr = Px,$$

$$3.\quad \boxed{Q = \left(\frac{P}{r}\right) \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots\ 392$$

In der Gleichung 3 ist das Verhältniss $\left(\frac{P}{r}\right)$ für dieselbe Wage ein unveränderlicher Werth, also die Last Q bestimmt durch die Länge x,

um welche das Laufgewicht P nach rechts zur Herstellung des Gleichgewichtes verschoben werden musste.

Bei dieser Wage läuft demnach das Wägen auf Längenmessen hinaus.

Die Theilstriche des Wagebalkens, bis zu denen das Laufgewicht verschoben werden musste, geben unmittelbar das Gewicht Q an.

§ 217.

Die sogen. dänische Wage oder Schnellwage mit laufendem Unterstützungspunkte (Fig. 260).

Bei dieser ist das Gewicht P unveränderlich, dagegen der Unterstützungspunkt A verschiebbar. Derjenige Punkt, bis zu dem man die unterstützende Schneide A zu verschieben hat, wenn der Wagebalken einspielen soll, trägt zugleich diejenige Zahl, die das Gewicht der abzuwägenden Last Q angiebt.

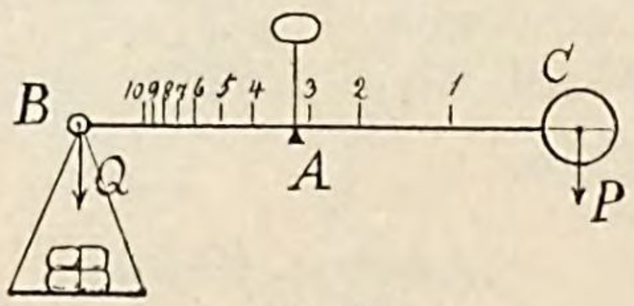


Fig. 260.

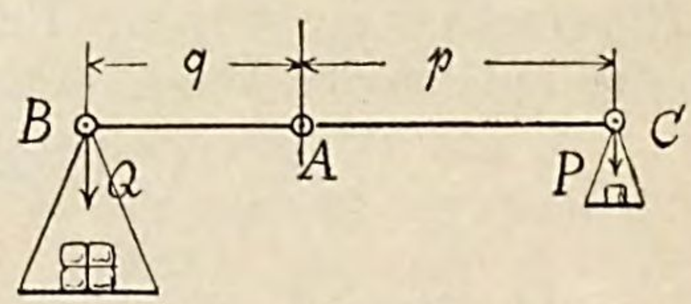


Fig. 261.

§ 218.

Die Schnellwage mit verjüngtem Gewicht (Fig. 261). Der Wagebalken wird durch den Unterstützungspunkt A in zwei ungleiche Theile getheilt. An beiden Enden B und C hängen Wagschalen zur Aufnahme der Last Q und des Gewichtes P. Dann ist nach der Figur:

$$Q \cdot q = P \cdot p,$$

$$Q = P \cdot \frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 393$$

Für $\frac{p}{q} = 10$ würde die Wage eine sogen. Decimalwage sein, d. h. die zu wägende Last wäre 10 mal grösser als das aufgelegte, zum Einspielen der Wage erforderliche Gewicht.

§ 219.

Roberval's Wage. Man könnte bei der vorhergehenden Wage auch die Wagschalen oberhalb der Punkte B und C anbringen. Nur müsste man, vielleicht durch die Führungen D E das Herunterfallen der Schalen verhindern (Fig. 262). Uebrigens würde es ganz gleichgültig sein, an welchen Stellen der Schalen man Last Q und Gewicht P aufsetzte, beide würden stets so wirken, wie wenn sie in den Punkten B und C angriffen.

Anstatt der Führungen wandte Roberval die Verbindungsstange FG an (Fig. 263), so dass seine Wage ein Rechteck bildet, dessen 4 Seiten durch Ge-

lenkbolzen $BCGF$ miteinander verbunden sind und bei A und A_1 feste, wagerechte Drehachsen haben.

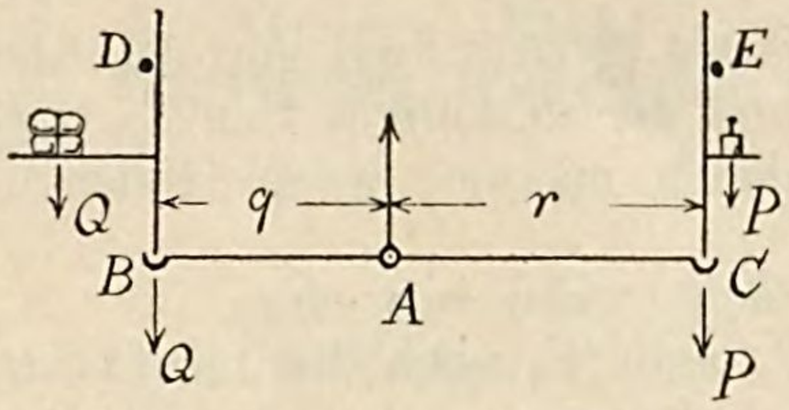


Fig. 262.

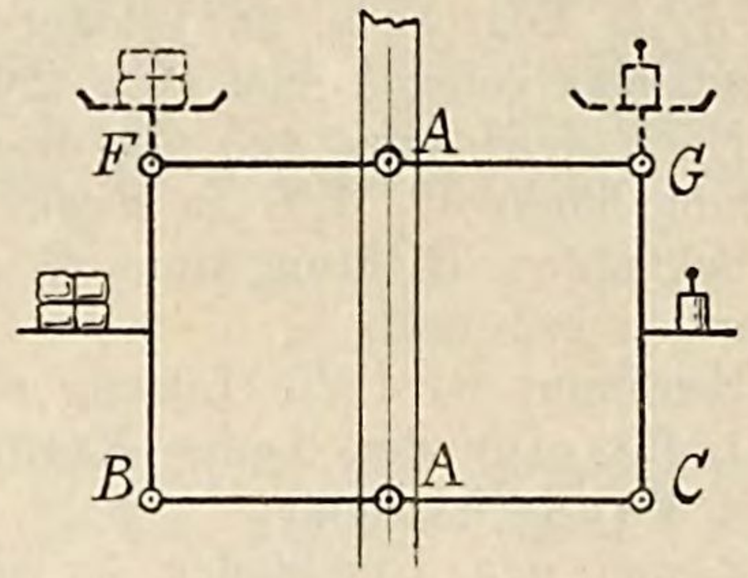


Fig. 263.

Einfacher noch ist es, die Wagschalen über den Punkten G und F anzubringen, wie die punktirten Linien der Fig. 263 andeuten.

b.

Unterstützung in **zwei** Punkten oder in **zwei** gleichlaufenden Drehachsen.

§ 220.

Liegen $A_1\, A_2\, S$ senkrecht übereinander (Fig. 264), so ist zunächst:

$W_1 + W_2 = W =$ und entgegengesetzt G. (Siehe auch § 209.)

Aber die Grösse der einzelnen Drücke W_1 und W_2 bleibt durchaus unbestimmt.

Je nachdem der Körper **zuerst** in A_1 oder A_2 unterstützt wird, überhaupt je nach der Art der Befestigung, kann:

oder:

$$W_1 = G \quad \text{und} \quad W_2 = 0$$
$$W_2 = G \quad \text{„} \quad W_1 = 0$$

sein. Ebensowohl können aber auch W_1 und W_2 alle Werthe zwischen G und Null annehmen, welche der Bedingung:

$$W_1 + W_2 = G$$ genügen.

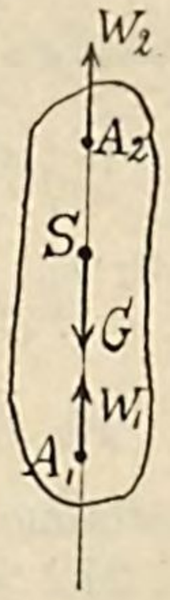


Fig. 264.

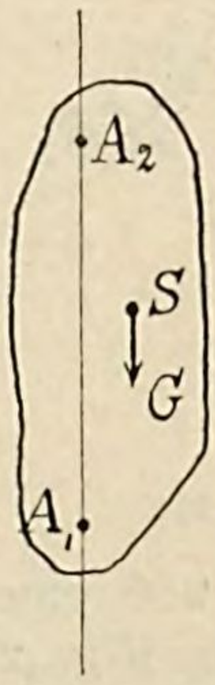


Fig. 265.

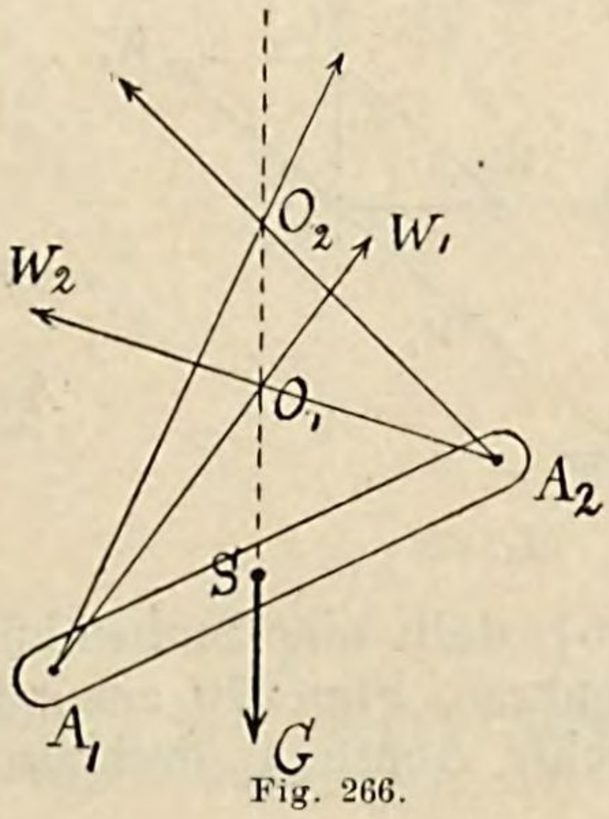


Fig. 266.

§ 221.

Auch dann bleibt die Unbestimmtheit, wenn S seitlich von der Lothlinie $A_1 A_2$ liegt (Fig. 265), oder wenn A_1 und A_2 nicht mehr lothrecht übereinander gelegen sind (Fig. 266).

Nach dem Satze von den drei Kräften (§ 151) folgt nur, dass sich die Richtungslinien $W_1 W_2 G$ in irgend einem der unzähligen Punkte $O_1 O_2 \ldots$ der bekannten Richtungslinie G schneiden müssen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll.

Bestimmt wird die Lösung erst dann, wenn entweder:

1. für eine der beiden Kräfte W_1 und W_2 noch die Richtung bekannt ist, oder:
2. aus den Umständen zu schliessen wäre, dass die Kräfte parallel sind.

§ 222.

Ist z. B. die Unterstützung in A_2 derart, dass hier nur ein senkrecht zur Stützfläche gerichteter Gegendruck W_2 zu Stande kommen kann, so ist damit der Durchnittspunkt O und nach dem Satze von den drei Kräften die Grösse und Richtung der einzelnen Kräfte W_1 W_2 bestimmt.

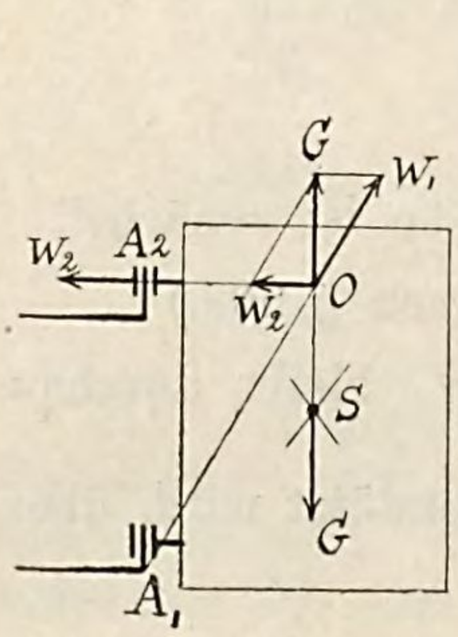


Fig. 267.

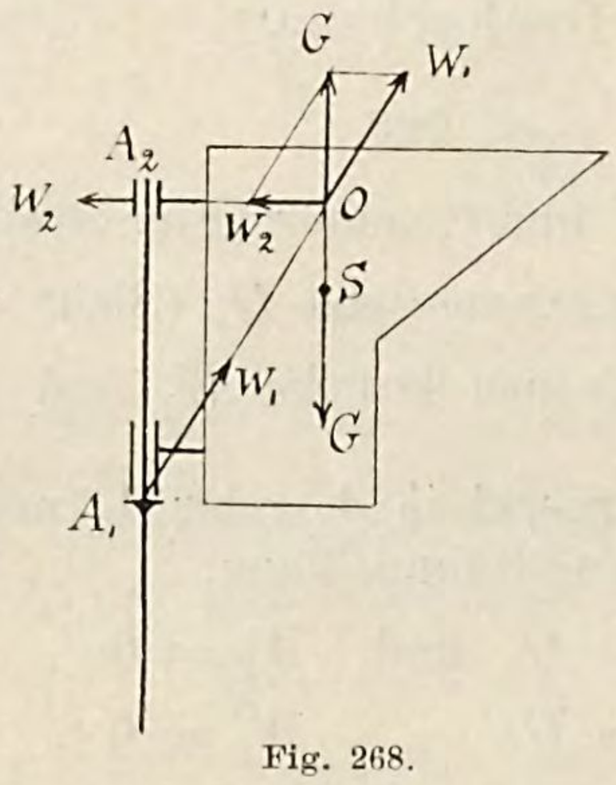


Fig. 268.

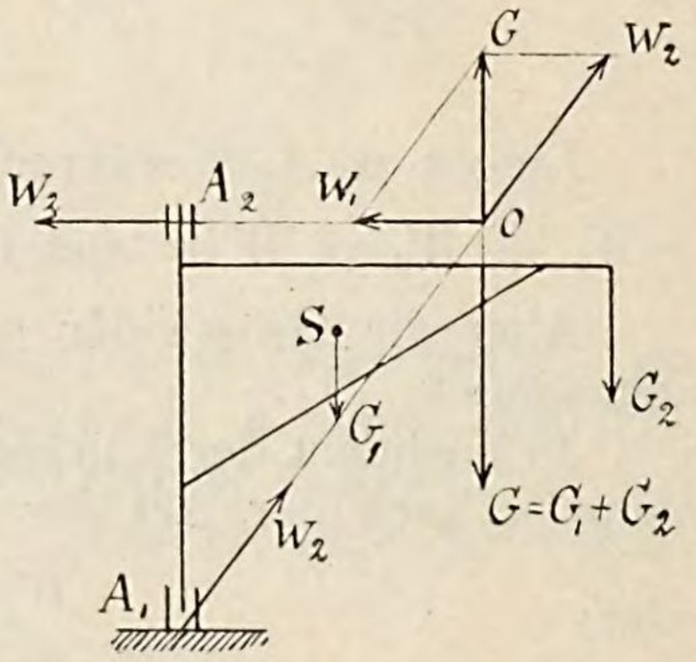


Fig. 269.

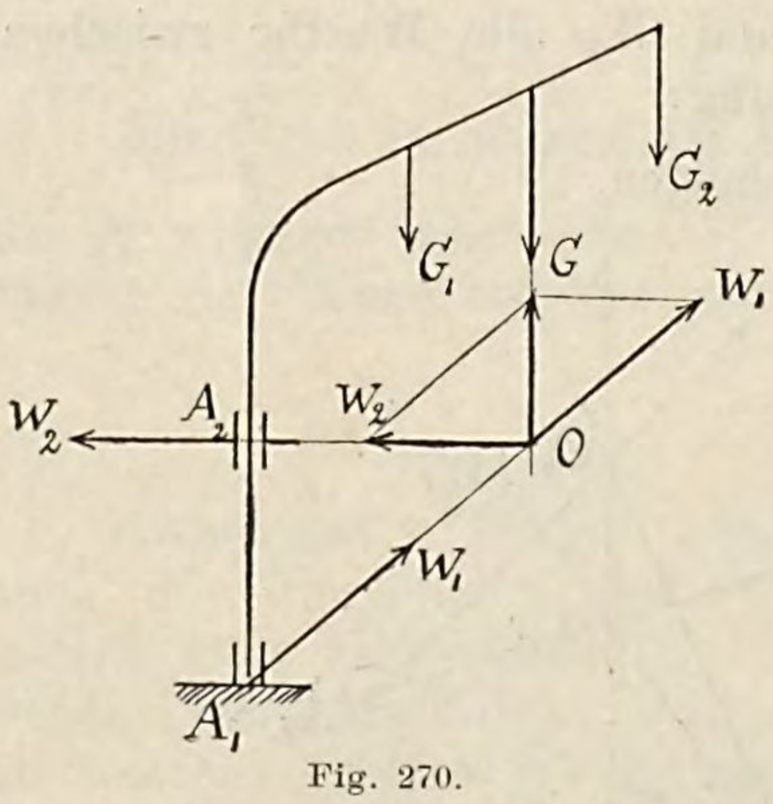


Fig. 270.

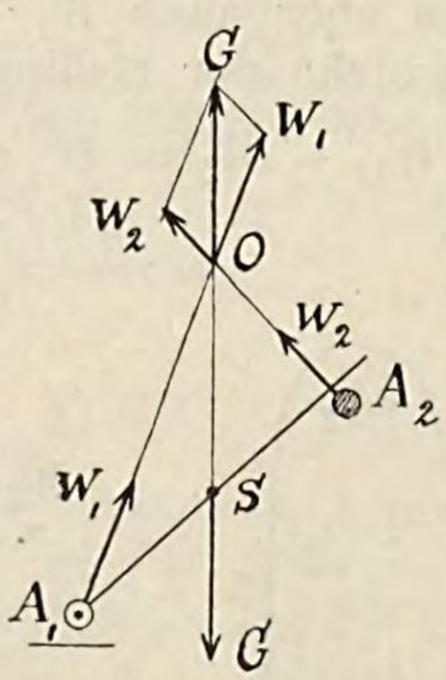


Fig. 271.

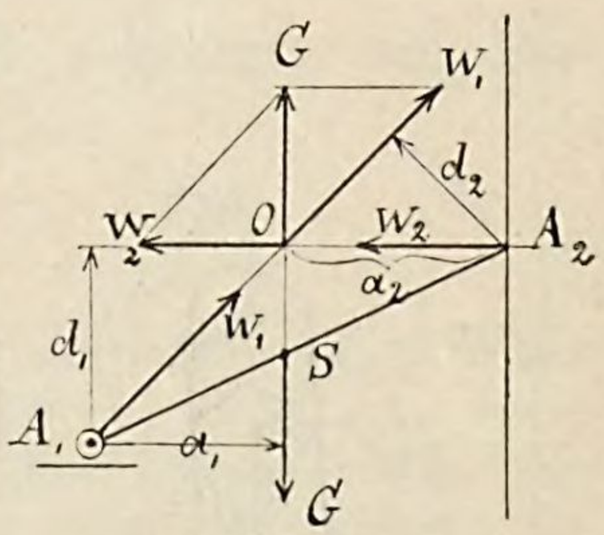


Fig. 272.

Fig. 267 stellt eine Stubenthür, Fig. 268 eine Wetterfahne, Fig. 269 einen Hüttenkran, Fig. 270 einen Uferkran, Fig. 271 und 272 je eine um die wagerechte Achse A_1 drehbare Fallthür dar.

Verfahren: Man ziehe durch den Durchschnittspunkt O die Linie $A_1 O$, trage G von O aus in umgekehrter Richtung (hier nach oben) auf und mache G zur Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten in die vorgeschriebenen Kraftrichtungen hineinfallen, so sind diese Seiten W_1 und W_2 der Grösse, Richtung und Lage nach die gesuchten in A_1 und A_2 auftretenden Widerstände (Siehe die verschiedenartigen Figuren 267—272).

§ 223.

Auch durch Rechnung findet man die Grösse der gesuchten Kräfte W_1 und W_2. Legen wir zum Beispiel die Fig. 272 zu Grunde. Für A_2 als Drehachse ist für das Gleichgewicht:

$$W_1 \cdot d_2 - G \cdot a_2 = 0,$$

$$W_1 = G \frac{a_2}{d_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 394$$

Um W_2 zu bestimmen, nimmt man A_1 als Drehachse an und erhält dann:

$$W_2 = G \frac{a_1}{d_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 395$$

Auch die in den beiden letzten Fig. 271 und 272 ganz allgemein veranschaulichten Fälle finden in der Technik (z. B. bei den Sparren-Verbindungen der Baukunst) vielfach Anwendung (Fig. 273).

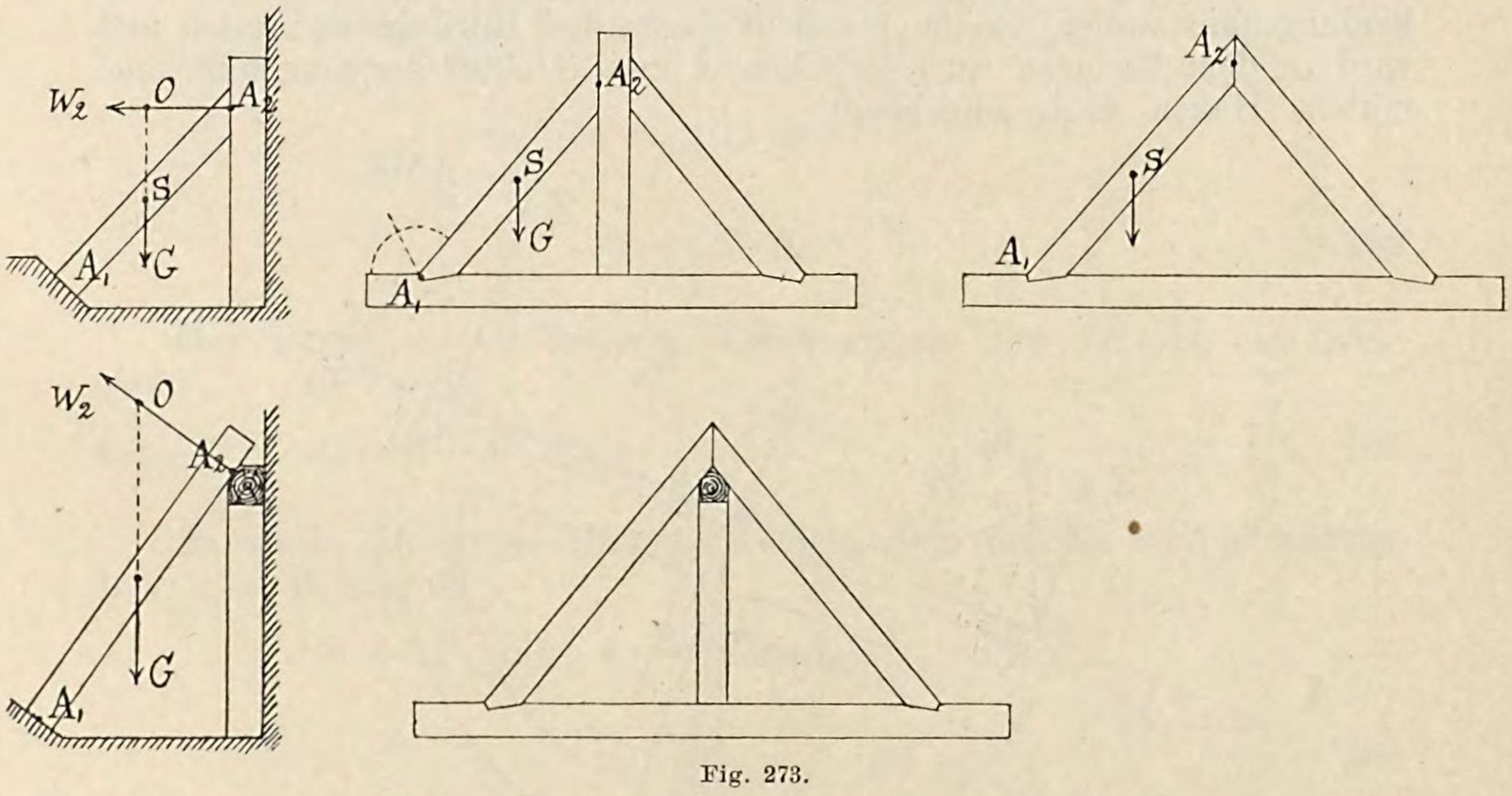


Fig. 273.

§ 224.

Zerlegt man die unbestimmten Kräfte W_1 und W_2 der obigen Fig. 266, sowie das gegebene Gewicht G, dessen Angriffspunkt S in der Verbinden-

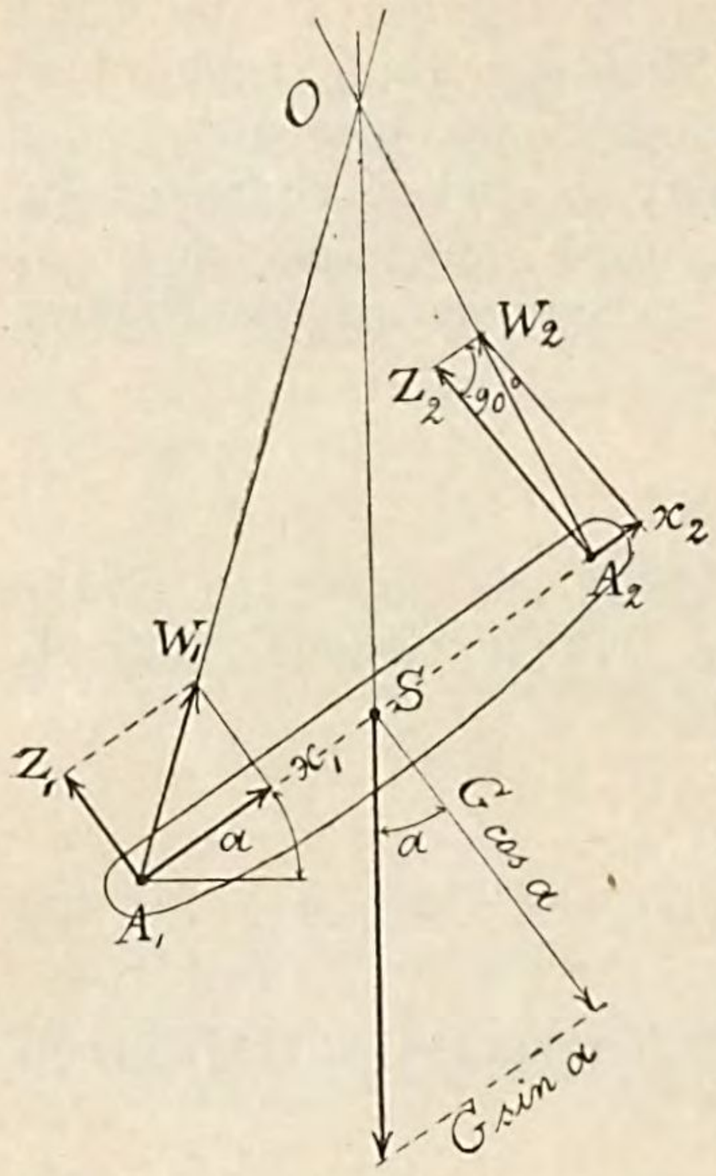


Fig. 274.

den $A_1 A_2$ liegen mag in der Richtung $A_1 A_2$ und senkrecht hierzu (Fig. 274), so sind wohl bestimmt die parallelen Komponenten Z_1 und Z_2, denn es ist für A_2 als Drehpunkt:

$$Z_1 = \frac{G \cos a}{A_1 A_2} A_2 S \quad . \quad . \quad . \quad 396$$

und für A_1 als Drehpunkt:

$$Z_2 = \frac{G \cos a}{A_1 A_2} A_1 S \quad . \quad . \quad . \quad 397$$

aber vollständig unbestimmt bleiben immerhin die Einzelwerthe x_1 und x_2. Von diesen wissen wir nur, dass ihre algebraische Summe: $x_1 + x_2 = G \cdot \sin a$ ist. . . 398

Dieser Fall, mit der Verallgemeinerung, dass S nicht in der Verbindenden $A_1 A_2$ liegt, soll im Folgenden bei Besprechung eines für den Markscheider wichtigen Apparates etwas näher beleuchtet werden.

§ 225.

Der Hängegradbogen.

Der Hängegradbogen (Fig. 275) bezweckt die Neigung a der Verbindungslinie zweier Punkte A und B gegen den Horizont zu messen und wird zu dem Ende an einer zwischen A und B straff gespannten Schnur mittelst Haken $A_1 A_2$ aufgehängt.

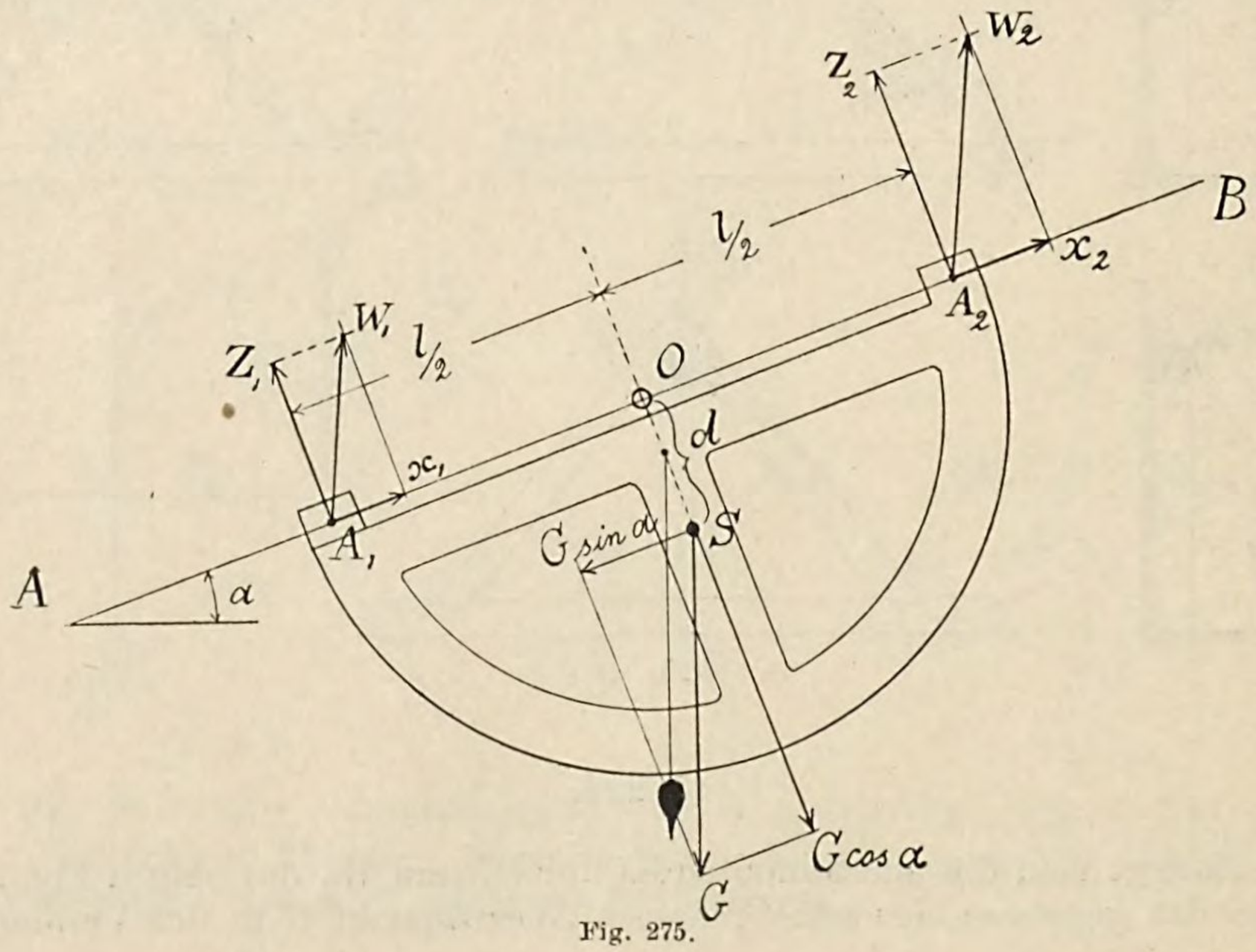


Fig. 275.

G sei das Gewicht des Gradbogens, L das in C aufgehängte Loth.

Die Messung wird um so unsicherer, je mehr der Winkel a von Null Grad abweicht. Denn die Schnur bildet schon an sich keine gerade Linie, sondern eine Kettenlinie und wird ausserdem noch durch die ungleichen Drucke der Haken aus der Linie $A\,B$ herausgedrängt.

Nur für $a = 0$ ist die Kettenlinie genau in ihrer Mitte parallel der Verbindenden AB und es giebt deshalb der hier aufgehängte Gradbogen die gesuchte Richtung AB an.

In jedem anderen Falle jedoch wird nicht mit Sicherheit diejenige Stelle angegeben werden können, an welcher die Schnur bei aufgehängtem Gradbogen parallel AB ist (wie es doch sein sollte). Aber es sollen hier doch die Regeln aufgestellt werden, nach denen die Drücke der Haken auf die Schnur sich vertheilen.

Nach vorgenommener Zerlegung der Kräfte (Fig. 275) in der bekannten Weise ergiebt sich nach den Bedingungssätzen für das Gleichgewicht (§ 178):

1. $P_x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x_1 + x_2 = G \cdot \sin a \quad . \; . \; . \quad 399$

2. $P_z = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad z_1 + z_2 = G \cdot \cos a \quad . \; . \; . \quad 400$

3. $(\mathfrak{M}_y) = 0$ (für O als Drehpunkt) $\quad z_1 \dfrac{l}{2} - z_2 \dfrac{l}{2} + G \cdot \sin a \cdot d = 0 \qquad 401$

Die Kräfte x_1, x_2, $G \cos a$ haben für den angenommenen Drehpunkt O keine Momente.

Aus der Gleichung 3. folgt als Ueberdruck des oberen Hakens über den unteren:

$$z_2 - z_1 = 2\,G \cdot \sin a \cdot \frac{d}{l}$$

$$z_2 = 2\,G \cdot \sin a \cdot \frac{d}{l} + z_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 402$$

Der Druck z_1 im unteren Haken ergiebt sich für A_2 als Drehpunkt:

$$4.\; z_1 l + G \cdot \sin a \cdot d - G \cdot \cos a \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 403$$

Es würde der untere Haken gar nicht mehr auf die Schnur drücken, d. h. $z_1 = 0$ sein, für:

$$0 + G \cdot \sin a \cdot d - G \cdot \cos a \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{l}{2\,d} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 404$$

Es würde sogar z_1 negativ werden, d. h. der untere Haken von der Schnur abspringen, falls man ihn hier nicht befestigte, für:

$$\operatorname{tg} a > \frac{l}{2\,d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 405$$

Sollten die Drücke z_1 und z_2 stets gleich gross ausfallen, so müsste man dem Hängegradbogen eine solche Gestalt geben, dass der Schwerpunkt S mit dem Schwerpunkte O zusammenfällt oder, mit anderen Worten, man müsste dafür sorgen, dass:

$$d = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 406$$

wird, denn dann ist nach der Gleichung 3:

$$z_2 - z_1 = 2G \cdot \sin a \frac{O}{l} = 0$$

$$z_1 = z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 407$$

§ 226.

Ist ein Balken (Fig. 276) so auf die beiden Stützen A_1 und A_2 gelegt, dass diese nur lothrechte Gegendrücke ausüben können, so ist kein Durchschnittspunkt O der beiden parallelen Auflagerdrücke W_1 und W_2 zu gewinnen und man erhält am einfachsten durch Rechnung mit Hülfe des Satzes von den statischen Momenten die Werthe W_1 und W_2.

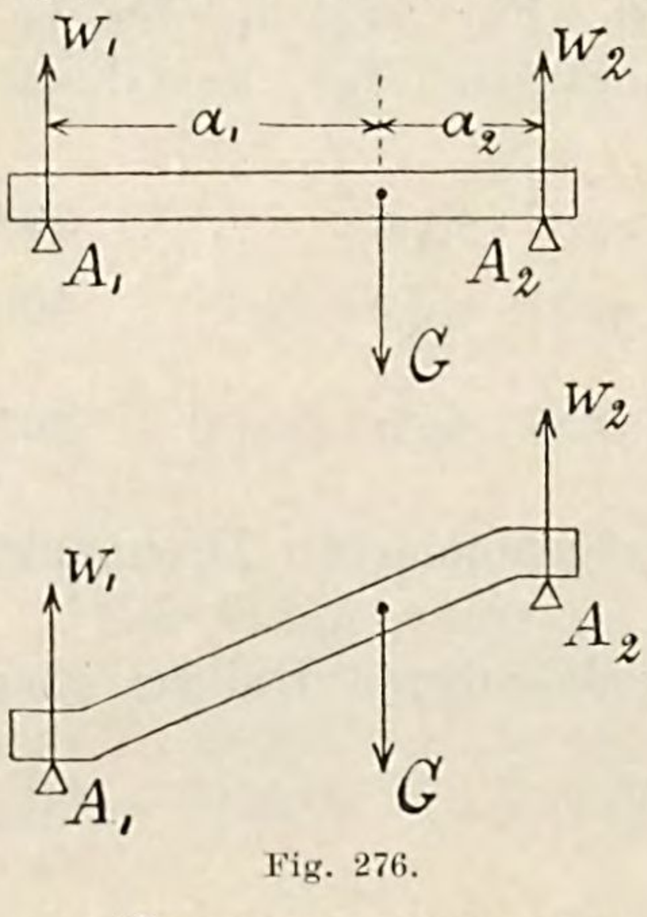


Fig. 276.

Für A_2 als Drehpunkt ist:

$$W_1 (a_1 + a_2) - G \cdot a_2 = 0$$

$$1. \quad W_1 = G \frac{a_2}{a_1 + a_2} \quad . \quad 408$$

Für A_1 als Drehpunkt:

$$W_2 (a_1 + a_2) - G \cdot a_1 = 0$$

$$2. \quad W_2 = G \frac{a_1}{a_1 + a_2} \quad . \quad 409$$

Zusammengenommen sind die beiden Gegendrücke der Unterstützungen:

$$W_1 + W_2 = G \frac{a_2 + a_1}{a_1 + a_2} = G; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 410$$

also gleich der Belastung (dem Eigengewichte) des Balkens. Aus den beiden Gleichungen 1 und 2 lässt sich die allgemein giltige Regel ableiten:

Ist ein Balken oder Hebel an seinen beiden Enden unterstützt und durch das Gewicht G in die beiden Abschnitte a_1 und a_2 zerlegt, so erhält man den **linken** Auflagedruck W_1, indem man den **rechten** Abschnitt a_2 durch die ganze Länge $(a_1 + a_2)$ theilt und mit diesem Verhältnisse $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ das Gewicht G multiplicirt. Für den rechten Auflagedruck gilt Entsprechendes.

Der Satz lässt sich auch folgendermassen zusammenfassen:

$$W_1 : W_2 : G = a_2 : a_1 : (a_1 + a_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 411$$

d. h. in Worten:

Die einzelnen parallelen Kräfte verhalten sich zueinander wie die Entfernungen zwischen den Angriffspunkten der beiden anderen Kräfte.

§ 227.

In ganz ähnlicher Weise sind die Auflagerdrücke zu bestimmen, wenn ausser dem Eigengewichte G noch die Gewichte $G_1 G_2 \ldots$ an dem Balken wirken.

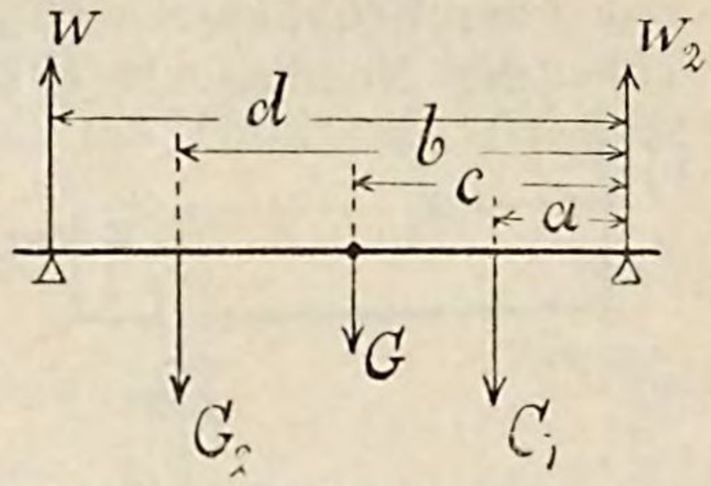


Fig. 277.

Aufgabe: Eine Achse ruht an den Enden in den Zapfen $A_1 A_2$, deren horizontaler Abstand d ist. Es sollen hier die Auflagerdrücke $W_1 W_2$ bestimmt werden, wenn in den Entfernungen ab Räder von den Gewichten $G_1 G_2$ aufgekeilt sind und das Eigengewicht der Achse im Abstande c angreift (Fig. 277).

Der Hebel.

§ 228.

Für alle jenen unzähligen Vorkehrungen der Technik, die man unter dem Sammelnamen „Hebel“ begreifen kann, gilt das, was wir im Vorangehenden unter „Bewegungserscheinungen an unterstützten Körpern“ kennen gelernt haben.

Hebel kann man jeden um einen Punkt oder Achse drehbaren Körper nennen, an dem Kräfte eine Drehung um diese Achse zu bewirken suchen.

§ 229.

Der einfache oder einarmige Hebel (Fig. 278). Bei diesem greifen die Kräfte nur auf einer Seite der Drehachse an, wie z. B. bei der Brechstange in Fig. 278. Die am freien Ende erforderliche Kraft ist:

$$W_2 = G \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

Im Drehpunkte wirkt:

$$W_1 = G \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} \qquad \ldots \quad 412$$

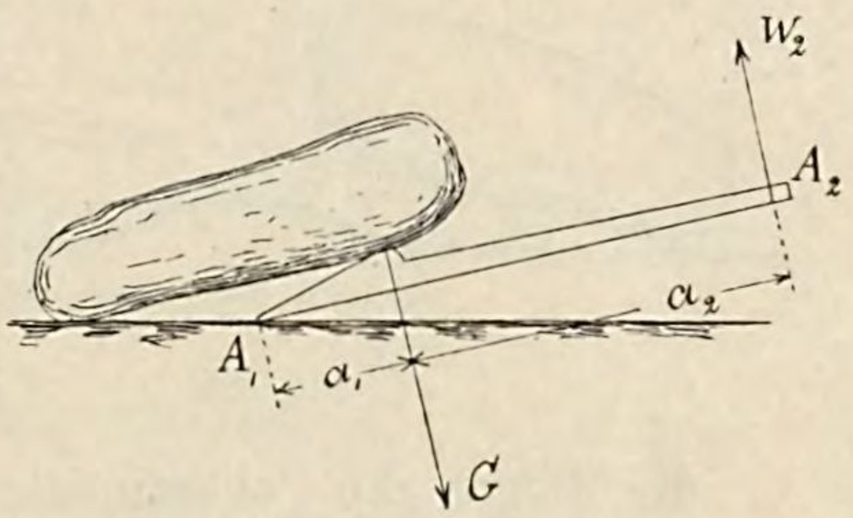


Fig. 278.

Es ist hierher zu rechnen:

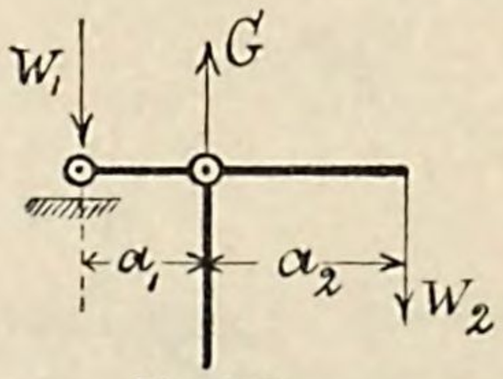


Fig. 279.

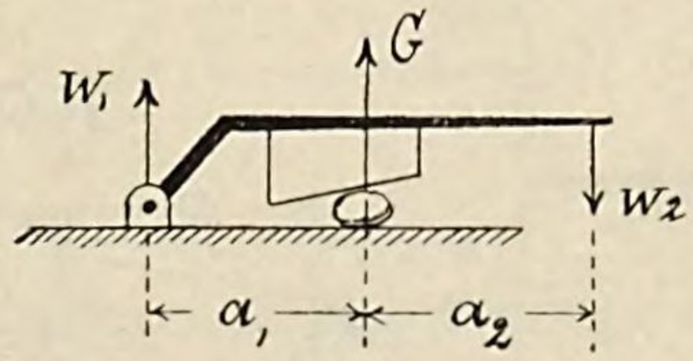


Fig. 280.

Der Schwengel einer Druckpumpe (Fig. 279), einer Feuerspritze, die Brot-, Zucker-, Tabak-, Häcksel-Schneide (Fig. 280),

der Stirn- und Brusthammer (Fig. 281),
der Schubkarren (Fig. 282),
der Nussknacker (Fig. 283).

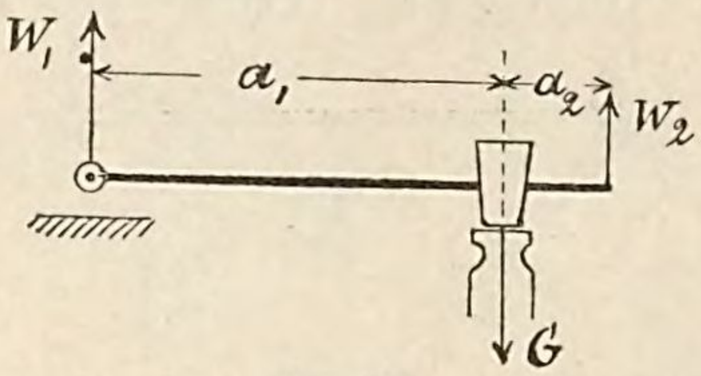


Fig. 281.

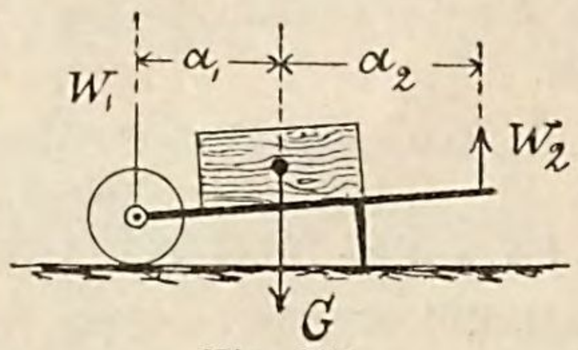


Fig. 282.

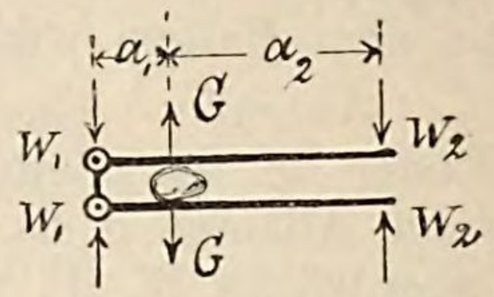


Fig. 283.

§ 230.

Der zusammengesetzte Hebel kann als ein Hebel angesehen werden, der aus zwei Hebeln besteht, die zu beiden Seiten der Drehachse sich erstrecken.

Die Kräfte (Kraft und Last) wirken auf beiden Seiten der Drehachse.

Auch die obige Brechstange lässt sich als zweiarmiger Hebel verwenden (Fig. 284):

$$W_2 = G\,\frac{a_1}{a_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 413$$

Bei dieser Anwendungsweise ist die zum Heben derselben Last G erforderliche Kraft W_2 grösser als oben, da ihr Hebelarm (hier der Nenner) kleiner ist. Hierher sind zu rechnen:

die Wagebalken (Fig. 285),
der Schwengel der Hubpumpe (Fig. 286),

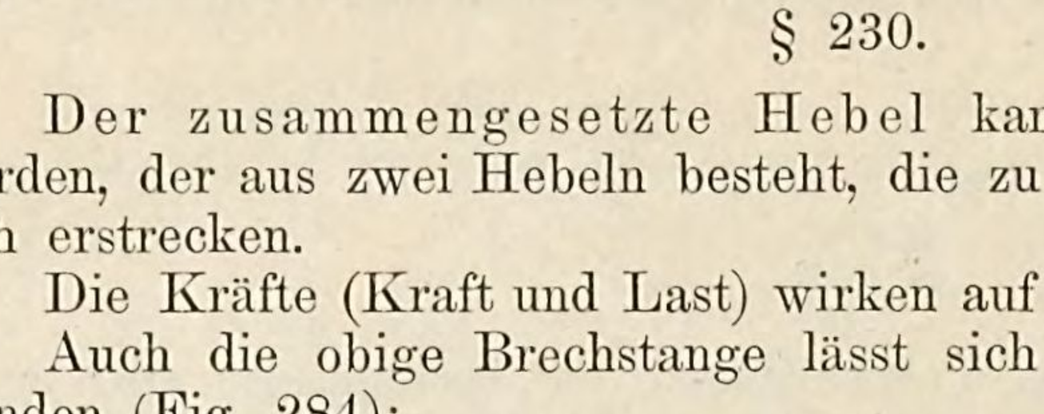


Fig. 284.

Fig. 285.

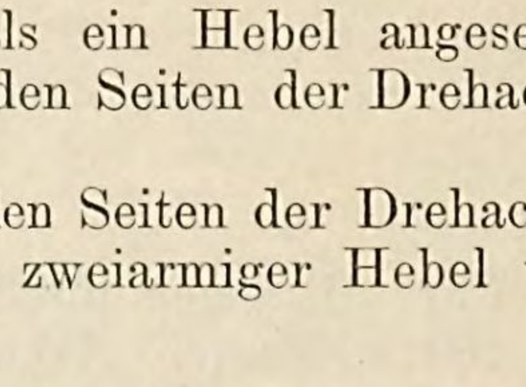


Fig. 286.

die Zange, die Scheere, die Schaufel. Ferner findet in der Technik der zusammengesetzte Hebel vielfach Anwendung in dem Getriebe, das man unter dem Namen Rad oder Kurbel an der Welle begreift (Fig. 287).

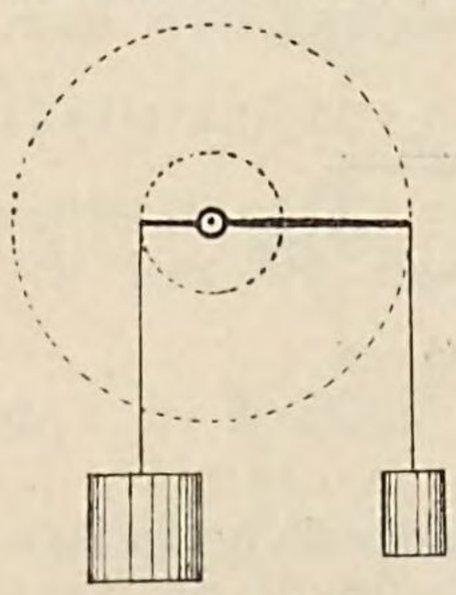


Fig. 287.

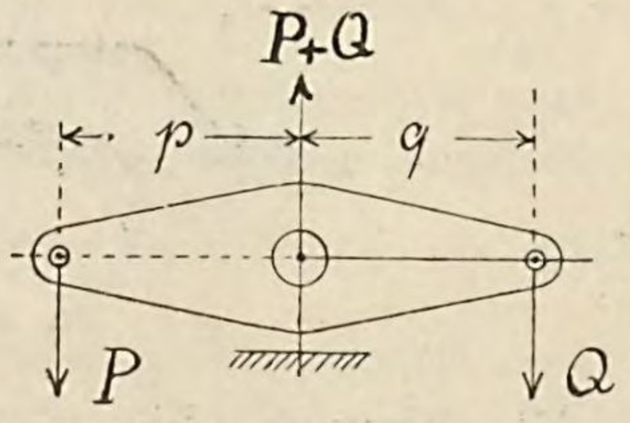


Fig. 288.

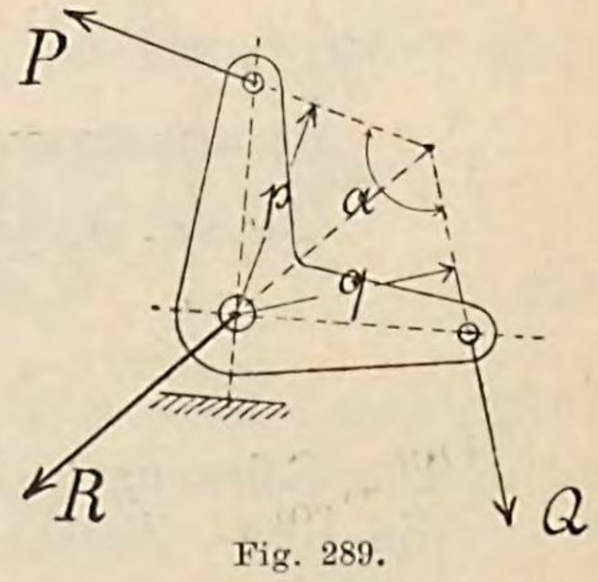


Fig. 289.

Im Grossen ausgeführt heisst der zusammengesetzte Hebel auch Balanzier (Fig. 288) und wenn die Hebelarme einen Winkel bilden Kunstwinkel (Fig. 289) und findet (auch als Kunstkreuz) vielfach Anwendung bei Wasserhaltungsmaschinen (Bergwerkspumpen) und Gebläsen. Nach der Fig. 289 ist:

$$Q = P\frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 414$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cos a} \quad \ldots\ldots \quad 415$$

und die drei Kräfte PQR müssen sich nach dem Satze von den drei Kräften in demselben Punkte O schneiden.

Noch einige andere technisch wichtige Anwendungen von ein- und zweiarmigen Hebeln.

§ 231.

Die Brückenwage. Dieselbe besteht in der Hauptsache aus einem wagerecht liegenden Boden (der sogen. Brücke) B, der, in den Punkten A_1 und A_2 unterstützt, zur Aufnahme der abzuwägenden Last G dient und als einarmiger Hebel anzusehen ist; aus dem einarmigen Hebel A_3 A_4, auf dem im Punkte A_2 die Brücke ruht, und aus dem zweiarmigen Hebel mit der Drehachse bei A, der zur Aufnahme der Wagschale und der beiden Zugstangen ZZ dient. Die Hebel ruhen in einem Gestelle E (Fig. 290).

Sie bezwecken grosse Lasten (selbst beladene Wagen) mittelst kleiner Gewichte leicht und ohne viel Umstände zu wägen.

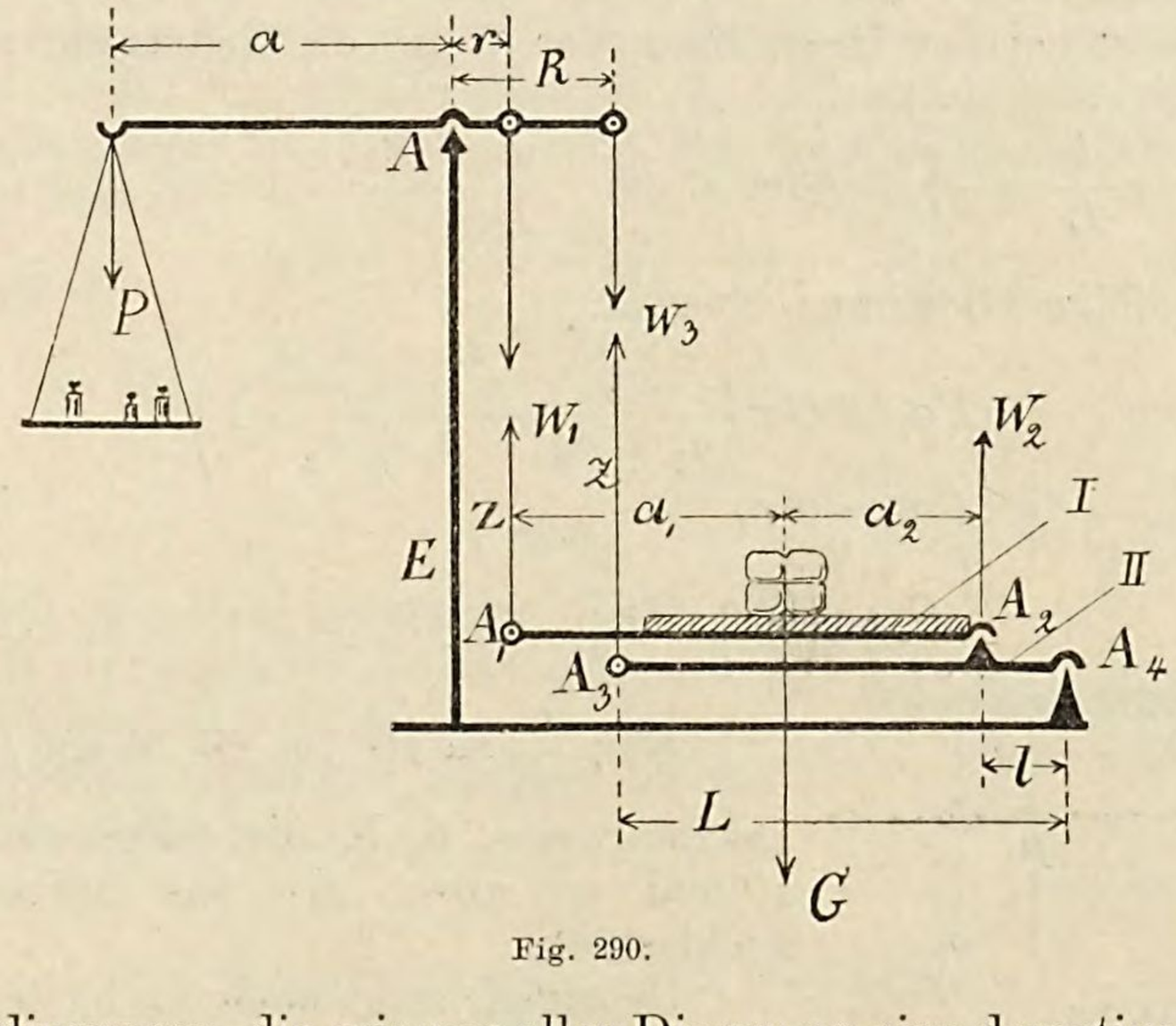


Fig. 290.

Die Bedingungen, die wir vor allen Dingen an eine derartige zusammengesetzte Wägevorrichtung zu stellen haben, sind:

1. Das Gewicht G der auf die Brücke aufgestellten Last muss sich durch die auf die Wagschale gelegten Gewichtsstücke P bestimmen lassen.

2. Es muss für diese Bestimmung gleichgiltig sein, an welcher Stelle der Brücke man die Last aufsetzt, d. h. es müssen die Abschnitte a_1, a_2, durch die vorläufig die Lage der Last bezeichnet ist, aus unseren mathematischen Betrachtungen wieder herausfallen.

Es gilt:

für den Hebel I:

$$W_1 = G \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2},$$

$$W_2 = G \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2},$$

für den Hebel II:

$$W_3 = W_2 \frac{l}{L},$$

$$= G \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{l}{L},$$

für den Hebel III:

$$Pa = W_1 r + W_3 R \text{ (für } A \text{ als Drehpunkt)},$$

$$= G \frac{a_2}{a_1 + a_2} r + G \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{l}{L} \cdot R$$

oder wenn man auf der rechten Seite $G \cdot r$ absondert:

$$Pa = Gr \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{R}{r} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 416$$

Wird jetzt bei der Herstellung der Wage die Bedingung erfüllt, dass sich verhält:

$$\frac{l}{L} = \frac{r}{R} \quad \text{oder dass:} \quad \frac{l}{L} \cdot \frac{R}{r} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 417$$

ist, so geht obige Gleichung über in:

$$Pa = Gr \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot 1 \right),$$

$$Pa = Gr,$$

$$G = \left(\frac{a}{r} \right) \cdot P \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 418$$

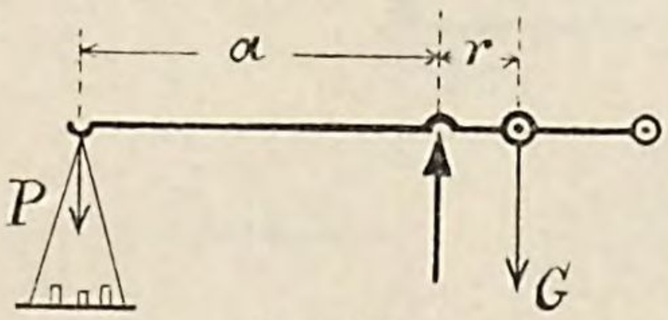


Fig. 291.

Für $\frac{a}{r} = 10$ ist die Wage eine sogen. Decimalwage, d. h. die aufgesetzte Last ist 10 mal so gross als das aufgesetzte Gewichtsstück.

Uebrigens zeigt noch die letzte Gleichung, dass die Vorrichtung so wirkt, wie wenn die Last an dem kurzen Hebelarme r aufgehängt wäre (Fig. 291).

Zu den Brückenwagen zählt man auch die neuerdings bei den Drahtseilbahnen beliebten Wägevorrichtungen, deren Lastträger aus einem kurzen Schienenstücke besteht, auf welches die Rollen der Fördergefässe auflaufen.

§ 232.

Der Hebel am Sicherheitsventile. Die Sicherheitsventile v der Dampfkessel, hydraulischen Pressen u. s. w. werden meist mittelst eines Hebels belastet. In nebenstehender Fig. 292 ist A_1 der Drehpunkt des Hebels, in den Punkten $A_2\,S\,A_3$ greifen die um die Gleichgewichtslage ringenden Kräfte (P nach aufwärts, G und Q nach abwärts) an. Durch das im Schwerpunkte S angreifende Eigengewicht G und durch das in A_3 aufgehängte Belastungsgewicht Q wird der Hebel so auf das Ventil gedrückt, dass sich dasselbe erst öffnet und den Dampf entweichen lässt, wenn der von unten gegen die Ventilfläche wirkende Druck P die zulässige Grösse überschreitet. Da sämmtliche Kräfte nur auf der einen Seite vom Drehpunkte A_1 angreifen, zählt der Hebel zu den einarmigen.

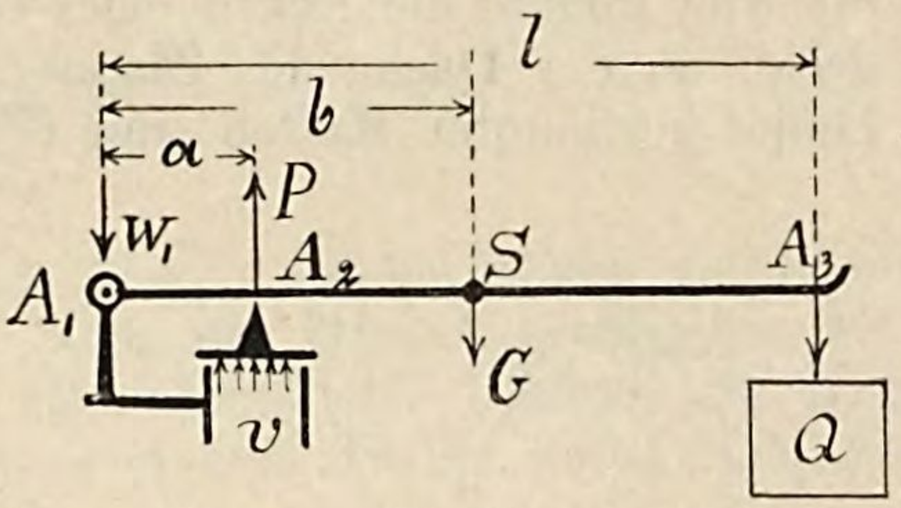


Fig. 292.

Für A_1 als Drehpunkt gilt:

$$Ql + Gb - Pa = 0$$

$$1.\ Q = \frac{P \cdot a - G \cdot b}{l}$$

$$2.\ l = \frac{P \cdot a - G \cdot l}{Q} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 419$$

Es lässt sich berechnen nach Gleichung 1 die erforderliche Belastung Q, nach Gleichung 2 die Länge l, wenn die übrigen Grössen bekannt sind. Wollte man auch den im Drehpunkte A_1 auftretenden Stützendruck W_1 wissen, so hätte man für A_2 als Drehpunkt die Gleichgewichtsbedingungsgleichung aufzustellen:

$$Q(l - a) + G(b - a) - W_1 a = 0,$$

um zu erhalten:

$$W_1 = \frac{Q(l - a) + G(b - a)}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 420$$

§ 233.

Aehnlich wie der betrachtete Hebel ist die sogen. freitragende Achse (Fig. 293), welche an dem einen Ende A_3 ein Zahnrad trägt, unterstützt. (Näheres hierüber im Maschinenbau zu finden.)

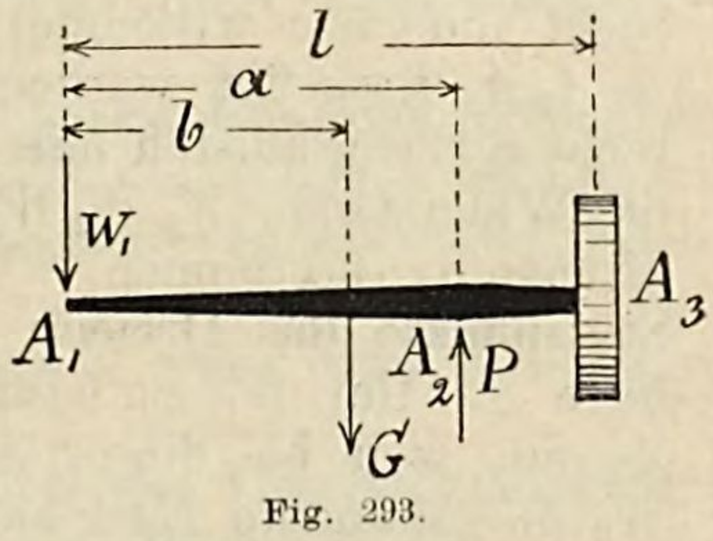


Fig. 293.

c.

Unterstützung in 3 Punkten.

§ 234.

Auch hier (Fig. 294) muss die aus den drei Widerständen $W_1\ W_2\ W_3$ in den drei festen Unterstützungen $A_1\,A_2\,A_3$ sich ergebende Mittelkraft W den oben aufgezählten drei Bedingungen entsprechen.

Liegen die Stützpunkte $A_1\,A_2\,A_3$ in einer geraden Linie (Fig. 294 und 295), so ist im allgemeinen die Bestimmung der einzelnen Widerstände unmöglich. Auch dann noch bleibt die Lösung unbestimmt, wenn die drei Punkte die Ecken eines Dreieckes bilden, z. B. die Angriffspunkte dreier an der Decke des Zimmers befestigter, zum Tragen einer Hängelampe bestimmter Ketten sind (Fig. 296).

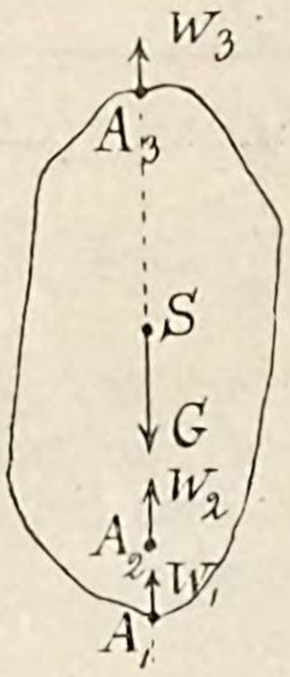


Fig. 294.

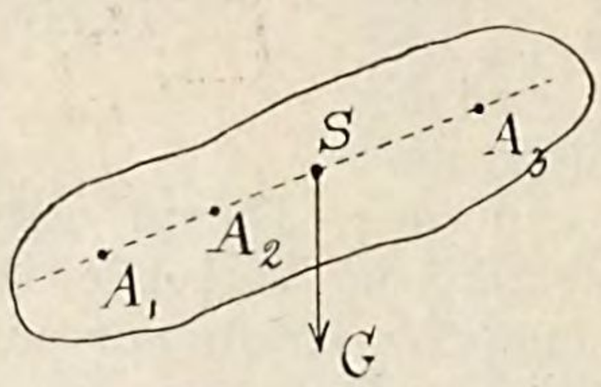


Fig. 295.

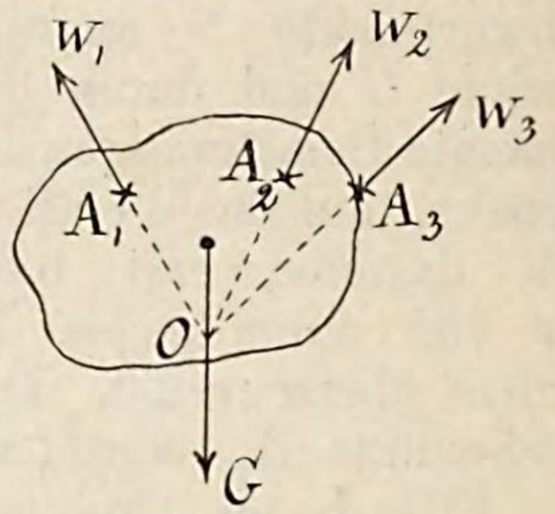


Fig. 296.

Nur soviel ist bestimmt, dass nach dem Satze von den vier Kräften sich $W_1\,W_2\,W_3$ in irgend einem Punkte O des Schwerpunktslothes schneiden müssen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll.

Die Unbestimmtheit verschwindet erst, wenn noch die Richtung einer der drei Kräfte $W_1\,W_2\,W_3$ bestimmt und damit ein einziger Punkt O festgelegt ist, oder wenn anzunehmen ist, dass die Kräfte einander parallel laufen. Dann erst sind im ersteren Falle $W_1\,W_2\,W_3$ nach Grösse, Lage und Richtung durch die Seiten desjenigen Parallelopipedons bestimmt, welches die von O aus in umgekehrter Richtung aufgetragene Kraft G zur Diagonale hat (Fig. 88 § 80).

§ 235.

Sind die Unterstützungen derart, dass nur parallele (z. B. nur lothrecht aufwärts wirkende) Widerstände seitens der Unterstützungspunkte $A_1\,A_2\,A_3$ ausgeübt werden können, wie z. B. bei einem auf einer wagerechten Ebene aufstehenden, dreibeinigen Tische oder Schemel, so lassen sich die Widerstände $W_1\,W_2\,W_3$ leicht mit Hülfe des Satzes von den statischen Momenten bestimmen. Verzeichne zunächst durch Verbinden der drei Stützpunkte das Dreieck $A_1\,A_2\,A_3$ (Fig. 297). Innerhalb dieses Dreiecks liege S. Um W_1 zu bestimmen, nehme man als Drehachse die Linie $A_2\,A_3$ an, weil bei dieser Annahme die unbekannten Widerstände W_2 und W_3 die Momente Null haben und somit nicht auch noch als Unbekannte in der Gleichung erscheinen.

Fällt man jetzt von S und A_1 die Senkrechten a_1, b_1 auf die angenommene Drehachse, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} G\,a_1 - W_1\,b_1 &= 0 \\ W_1 &= G\,\frac{a_1}{b_1}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 421$$

Ebenso ergiebt sich für $A_1 A_3$ als Drehachse:

$$W_2 = G \frac{a_2}{b_2},$$

und für $A_1 A_2$ als Drehachse:

$$W_3 = G \frac{a_3}{b_3}.$$

Läge S ausserhalb des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ z. B. bei S_1, so würde ein Umkanten um die nächstliegende Seite $A_2 A_3$ des Dreieckes erfolgen: Der Umfang des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$ kann als unterstützter Umfang des Körpers (Tisches) angesehen werden. Was von dem Tische gesagt ist, gilt auch für einen Dreifuss (Fig. 298).

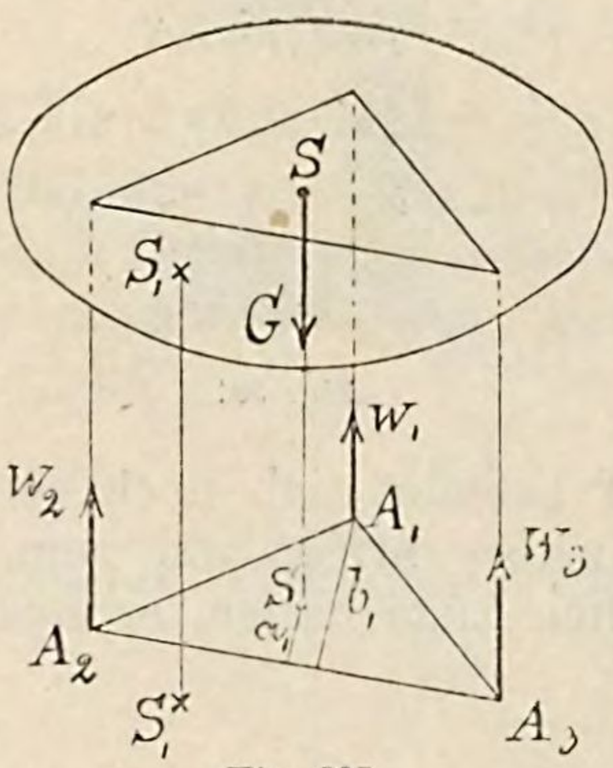


Fig. 297.

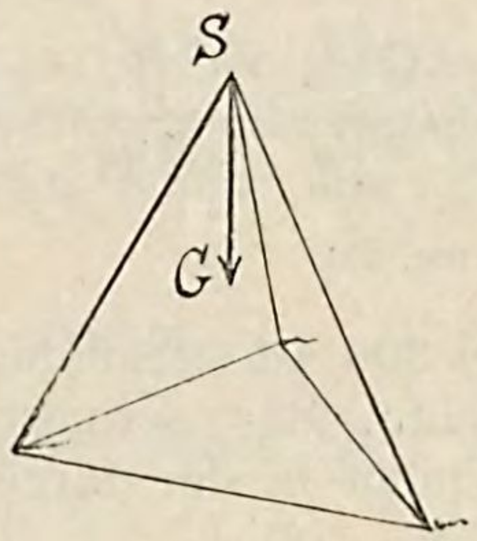


Fig. 298.

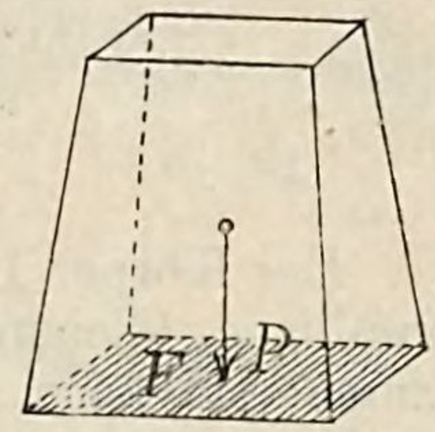


Fig. 299.

d.

Unterstützung in mehr als drei Punkten. Flächendruck. Stabilitätsmoment. Dynamische Stabilität.

§ 236.

Einleitende Bemerkungen. Ruht ein Körper in mehr als drei Punkten auf einer wagerechten Fläche, so lässt sich der Druck in den einzelnen Stützpunkten durchaus nicht mehr bestimmen.

Bei unseren Bauwerken (Mauern, Fabrikschornsteinen) und Maschinenkonstruktionen, welche in unzähligen Punkten aufruhen, trachten wir danach, dass der Druck sich möglichst gleichförmig auf die Unterstützungsfläche (Fundament) vertheilt.

Der auf die Flächeneinheit entfallende Druck heisst dann Flächendruck (specifischer Druck).

Wäre (Fig. 299) P kg der gesammte über die Unterstützungsfläche F qcm gleichmässig vertheilte Druck, so ist der Flächendruck:

$$p = \frac{P \text{ kg}}{F \text{ qcm}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 422$$

Auch verlangen wir im allgemeinen, dass unsere Bauwerke im stabilen Gleichgewichte sich befinden, d. i. standfähig sind. Sie sollen unter dem Einflusse der auf sie einwirkenden Kräfte nicht umkippen,

vielmehr noch eine besondere namhafte Kraftäusserung zum Umkanten erforderlich machen. Nur in vereinzelten Fällen, z. B. beim Fortschaffen eines Steinblockes wird ein Umkanten beabsichtigt. In gewisser Weise gelten auch hier die oben für das Gleichgewicht aufgestellten Bedingungen:

Das Schwerpunktsloth (bezw. die Richtungslinie der Mittelkraft P aus sämmtlichen Kräften) muss einen unterstützten Punkt A der Grundfläche, d. h. einen Punkt innerhalb des Umfanges der unterstützten Fläche des Körpers treffen. Unter Umfang ist die Verbindungslinie der äussersten Punkte dieser Fläche zu verstehen. Für die in der Fig. 301 schraffirte unterstützte Fläche F würde z. B. der Umfang $abcdef$ sein, wenn zwischen den Punkten c und d die punktirte Linie als geltend angesehen wird.

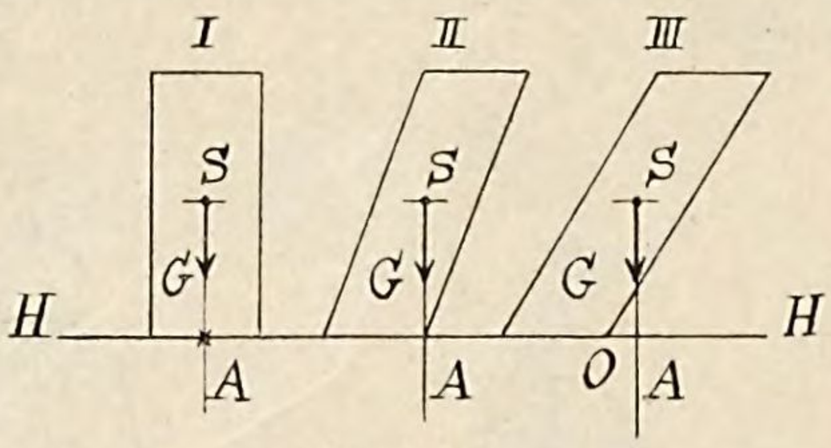


Fig. 300.

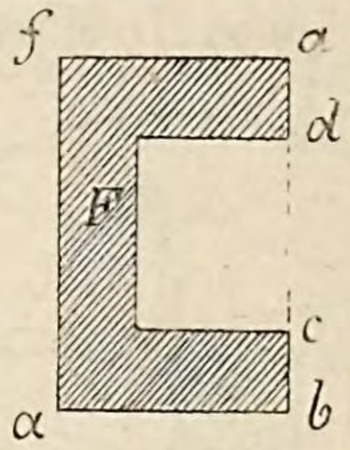


Fig. 301.

Der Körper I Fig. 300 ist standfähig; II befindet sich noch eben im hinfälligen Gleichgewichte, der geringste Anstoss bringt ihn zum Umkanten; III kann sich nicht in der dargestellten Lage halten, er muss um die Kante O umschlagen.

§ 237.

Stabilitätsmoment. Wirken die Kräfte G und P, deren Mittelkraft R ist, auf den Körper ein, so ist er an der Grenze des Umkantens, also im hinfälligen Gleichgewichte, wenn R durch O verläuft.

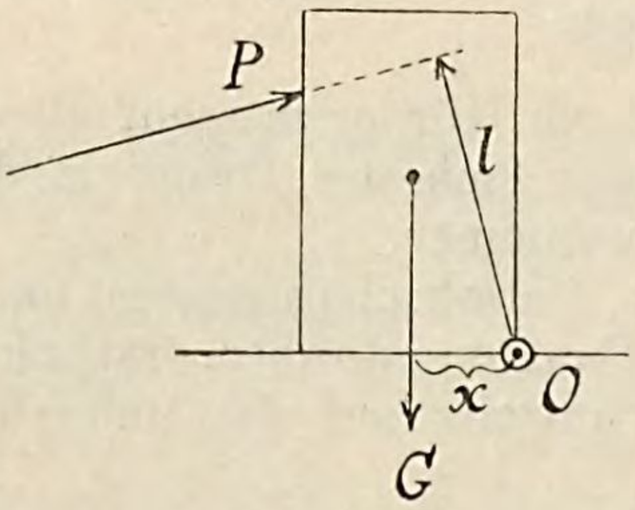


Fig. 302.

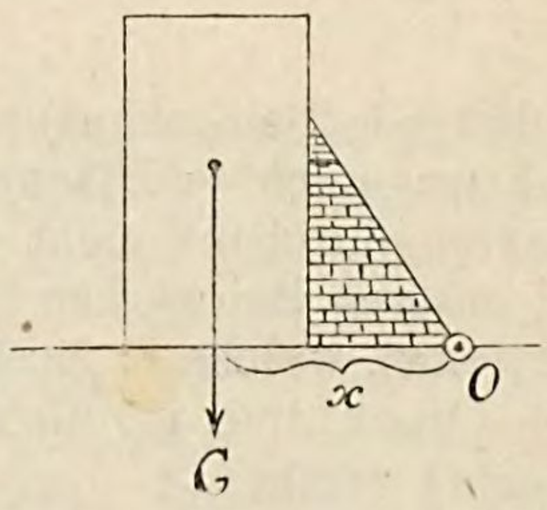


Fig. 303.

Dieser Zustand lässt sich auch durch die auf O als Drehungskante bezogene Momentengleichung:

$$G \cdot x = P \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 423$$

ausdrücken. Der geringste Zuwachs von Pl führt Umkanten herbei. Soll dagegen Standfähigkeit vorhanden sein, so muss die Umgleichung

$$Gx > Pl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 424$$

erfüllt werden.

Man nennt das statische Moment Gx das Stabilitätsmoment auf die Drehachse O. Dasselbe wächst mit G und x. Um x zu vergrössern, wendet man bei Mauerwerken Strebepfeiler an (Fig. 303).

§ 238.

Dynamische Stabilität. Um einen standfähigen Körper (Fig. 304) um die Kante O umzukanten, ist es erforderlich, den Schwerpunkt S senkrecht über diese Kante O in die Lage S_1 zu bringen, oder mit anderen Worten, das Gewicht G um die Höhe h zu heben. Die hierzu erforderliche mechanische Arbeit

$$A = G \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 425$$

heisst die dynamische Stabilität.

Dieselbe wächst mit G und ist um so grösser, je grösser h ist, d. h. je tiefer der Schwerpunkt liegt; was ohne weiteres aus den punktirten Linien der Figur hervorgeht.

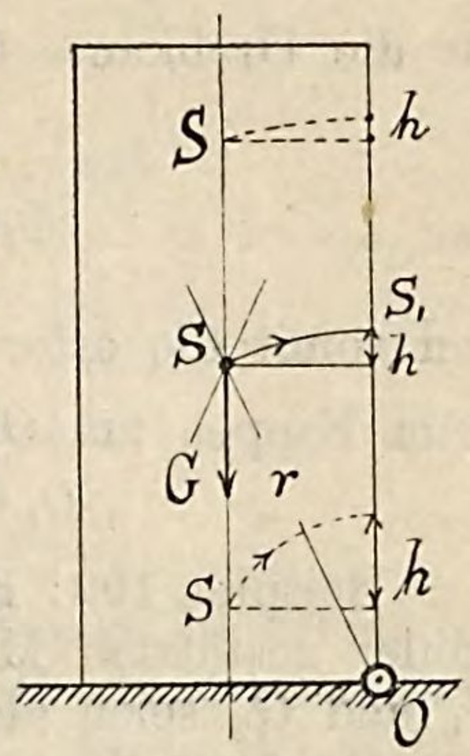


Fig. 304.

§ 239.

Beispiel 108: Ein prismatischer Block (Fig. 305) hat die

Breite $a = 1$ m,
Tiefe $a_1 = 2$ m,
Höhe $c = 2$ m
und das specifische Gewicht $\gamma = 3000$ kg/cbm,

also das Gesammtgewicht:

$$G = 3000 \cdot a \cdot a_1 \cdot c = 12\,000 \text{ kg}.$$

Derselbe soll einmal um die Kante OO, das andere Mal um die Kante $O_1 O_1$ umgekippt werden. Es ist die in beiden Fällen erforderliche mechanische Arbeit zu bestimmen.

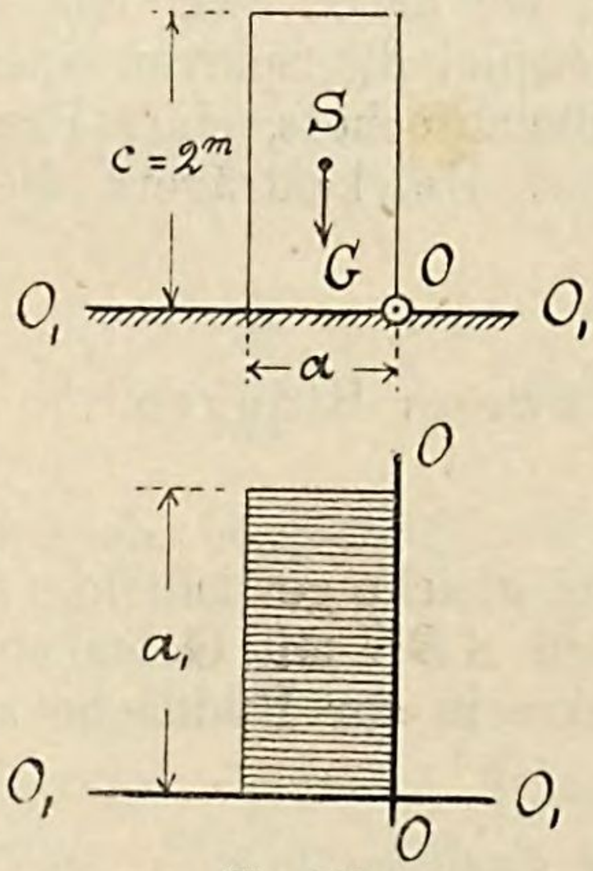


Fig. 305.

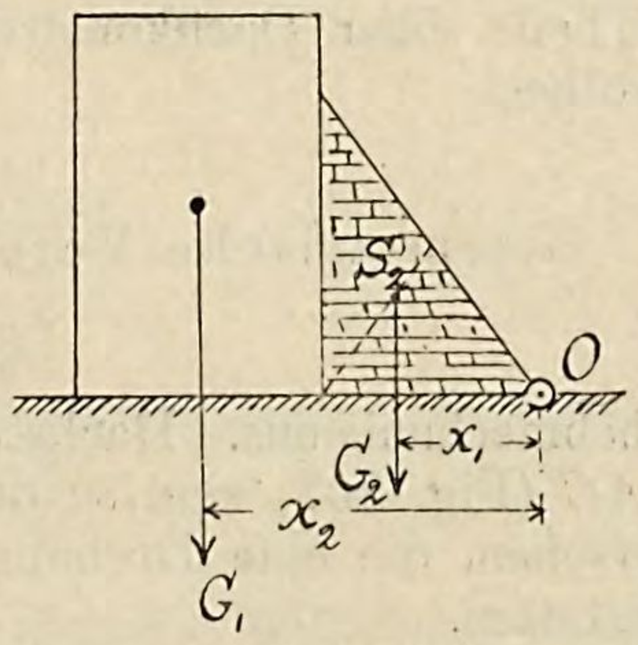


Fig. 306.

Allgemein ist für die Kante OO nach § 238:

$$h = r - \frac{c}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{2}$$

für die Kante $O_1 O_1$ sind a_1 und h_1 einzuführen, folglich ist:

für die Drehkante OO: $h = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2} - 2}{2} = 0{,}118$ m,

„ „ „ $O_1 O_1$: $h_1 = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2} - 2}{2} = 0{,}414$ m,

und somit die erforderliche mechanische Arbeit:

beim Kippen um OO: $A = 12\,000 \cdot 0{,}118 = 1416$ mkg,

„ „ „ $O_1 O_1$: $A_1 = 12\,000 \cdot 0{,}414 = 4968$ mkg.

Beispiel 109: Es ist das Stabilitätsmoment einer durch einen Strebepfeiler gestützten Mauer zu bestimmen (Fig. 306). O sei als Drehkante, G_1 und G_2 seien als Gewichte angenommen.

Dann ist das gesuchte Moment:

$$\left.\begin{aligned} M &= G_1 x_1 + G_2 x_2 \\ M &= M_1 + M_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 426$$

Regel: Das Stabilitätsmoment eines zusammengesetzten prismatischen Körpers ist gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Theile bezogen auf die gemeinsame Drehkante.

c.

Mehrere sich gegenseitig stützende Körper. Stangenverbindungen.*)

§ 240.

Einleitende Bemerkungen. In allen vorhergehenden Fällen handelte es sich stets um die Unterstützung eines einzelnen Körpers. Im Folgenden sollen auch solche Fälle betrachtet werden, bei denen zwei und mehrere Körper sich gegenseitig stützen, wie zum Beispiel die Sparren eines Dachstuhles, die Stangen des Kniehebels eines Steinbrechers, einer Presse, die einzelnen Theile einer Dachkonstruktion, eines Brückenträgers, die Steine eines Gewölbes.

a.

Symmetrische Verbindung zweier Stangen.

§ 241.

Kniehebmechanismus. Dachstuhl. Zwei gleiche gewichtslose Stangen AB und AC (Fig. 307) sind in den Punkten ABC mit Gelenken (Charnieren) versehen, die eine Drehung um senkrecht zur Bildfläche stehende Achsen gestatten.

---

*) Siehe auch Ritter, Techn. Mechanik, 1892, Seite 223 u. ff.

Durch die Kraft Q im Scheitelgelenk wird in B und C je eine horizontale und vertikale Gegenkraft H_1, H_2 bezw. V_1, V_2 wachgerufen, von denen wir nach den Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht (Gleichung 300, 301) zunächst wissen, dass:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ P_x = O = +H_1 - H_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H_1 = H_2 = H; \\ &2.\ P_z = O = +V_1 + V_2 - Q \quad . \quad . \quad . \quad V_1 = V_2 = V = \frac{Q}{2}. \end{aligned}\right\} \quad 427$$

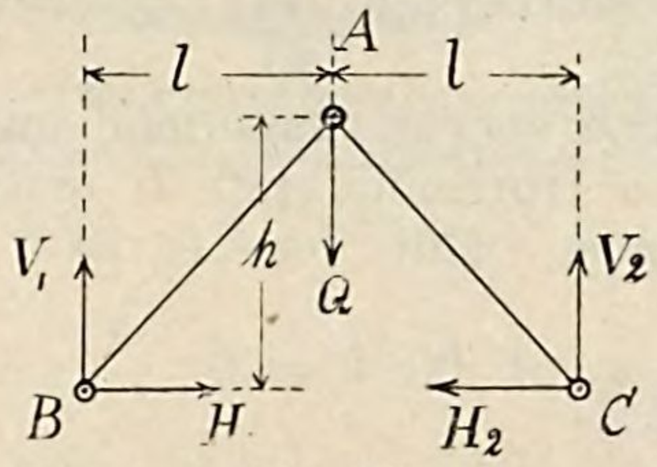


Fig. 307.

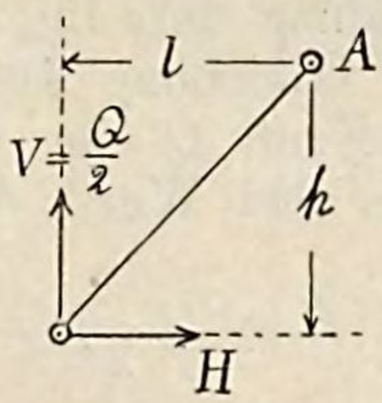


Fig. 308.

Um nun auch die Grösse von H durch Q ausgedrückt zu erhalten, ist noch eine Gleichung erforderlich. Für A als Drehpunkt (Drehachse) ergiebt sich z. B. für die linke Stange (für die rechte würde der Symmetrie wegen das Ergebniss dasselbe sein):

$$3.\ \mathfrak{M} = O = Vl - Hh \quad . \quad . \quad H = V\frac{l}{h} = Q\frac{l}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 428$$

Auch die Neigung a der Stange, sowie die Kraft P in der Richtung AB ist leicht zu ermitteln. Soll durch die Kräfte V und H keine Drehung der Stange um A herbeigeführt werden, was der angenommene Gleichgewichtszustand voraussetzt, so muss die Resultirende P aus V und H durch den angenommenen Drehpunkt A hindurchgehen. Dasselbe würde gelten, auch wenn die Stange AB beliebig gekrümmt wäre (Fig. 309 und 310). Folglich ist:

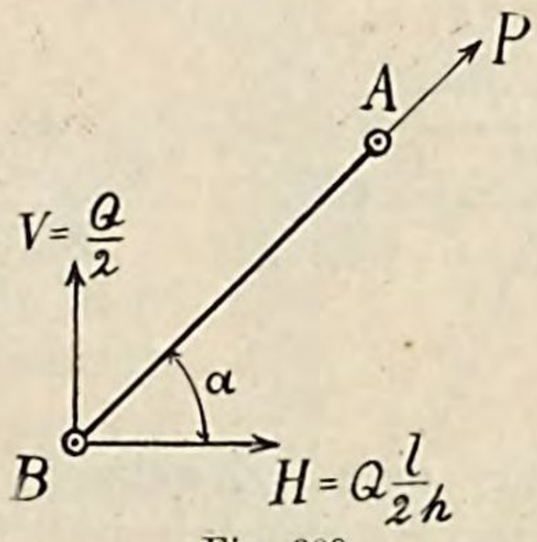


Fig. 309.

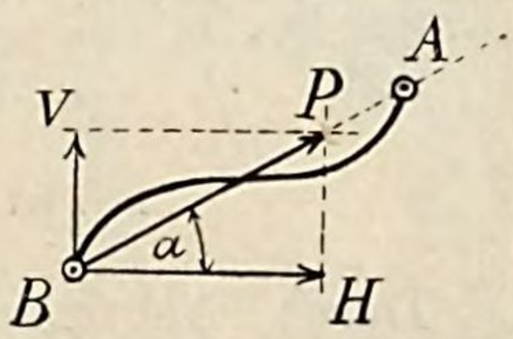


Fig. 310.

$$P = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(Q\frac{l}{2h}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 429$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{V}{H} = \frac{\frac{Q}{2}}{H} = \frac{h}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 430$$

Die letzte Gleichung in der Form:

$$\operatorname{tg} a \cdot H = \frac{Q}{2}$$

zeigt, dass für dieselben Stangen und dieselbe Belastung unzählig viele verschiedene Werthe von a und H der Gleichung genügen, dass aber

nach festgelegter Neigung a der Stange AB auch H einen ganz bestimmten Werth:

$$H = \frac{Q}{2 \operatorname{tg} a}$$

hat.

Später bei Besprechung einer Verbindung von mehreren Stangen (§ 249) wird darauf hingewiesen werden, dass der so für die Scheitelstangen festgelegte Werth des Horizontalschubes H überall in der Stangenverbindung derselbe ist.

Aus der Gleichung 428 geht noch hervor, dass man mittelst einer beschränkten Kraft Q eine sehr grosse Horizontalkraft H erzeugen kann, wenn man nur den Werth h klein genug wählt, denn es ist:

$$H = Q \frac{l}{2h} = Q \frac{l}{2 \cdot O} = \infty \text{ für } h = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 432$$

In solchen Gegenden, in denen durch Schnee und Wind die Dächer stark belastet werden, wendet man deshalb steile Dächer, d. h. grosses h an, um den Horizontalschub H, der auf Umkanten der Mauern wirkt, innerhalb zulässiger Grenzen zu halten.

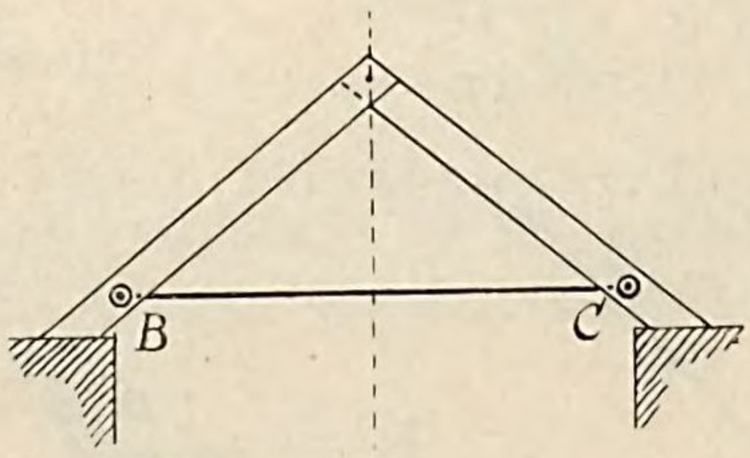


Fig. 311.

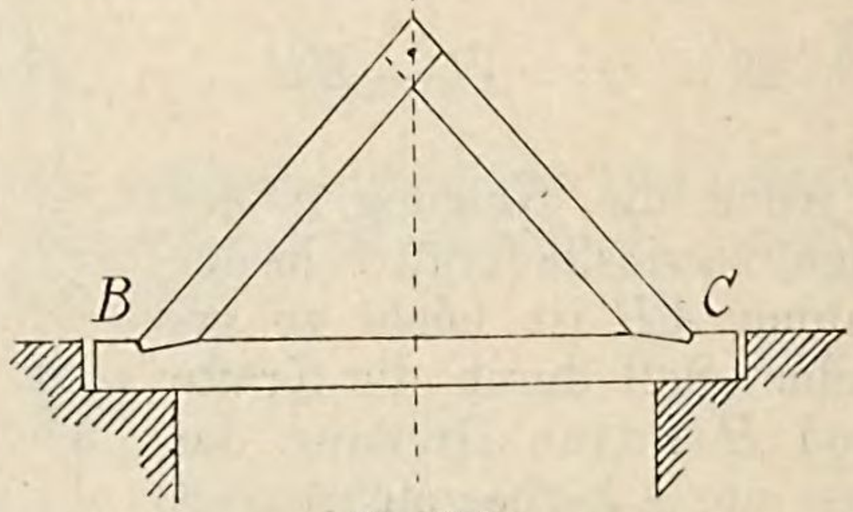


Fig. 312.

Durch Anbringung einer Zugstange oder eines Querbalkens BC (Fig. 311, 312) wird der Horizontalschub für die Gebäudemauer ganz aufgehoben, so dass diese nur den Vertikaldruck auszuhalten hat.

§ 242.

Auch für den Kniehebelmechanismus des beim Bergbau vielfach angewendeten Steinbrechers*) (Fig. 313) gelten die oben durchgeführten Betrachtungen. Die Kraft Q wird mittelst eines sogen. Excentriks E auf den Punkt A übertragen. Durch Hin- und Herbewegen der um F drehbaren Platte B des Brechmaules werden die bei D eingeworfenen Gesteinswände gleichsam zerkäuet. Durch die Stange G im Verein mit den Gummischeiben J wird die Platte B wieder zurückgezogen, damit das Getriebe bei A nicht den Zusammenhang einbüsst.

Die Kraft H zum Zerdrücken der Wände ergiebt sich aus der früheren Gleichung.

---

*) Nähere kurzgefasste Angaben über den Steinbrecher sind zu finden in des Verfassers Werke: Die Bergwerke, Aufbereitungsanstalten und Hütten etc. des Harzes unter der Ueberschrift: Die Aufbereitungsanstalten S. 254 u. ff.

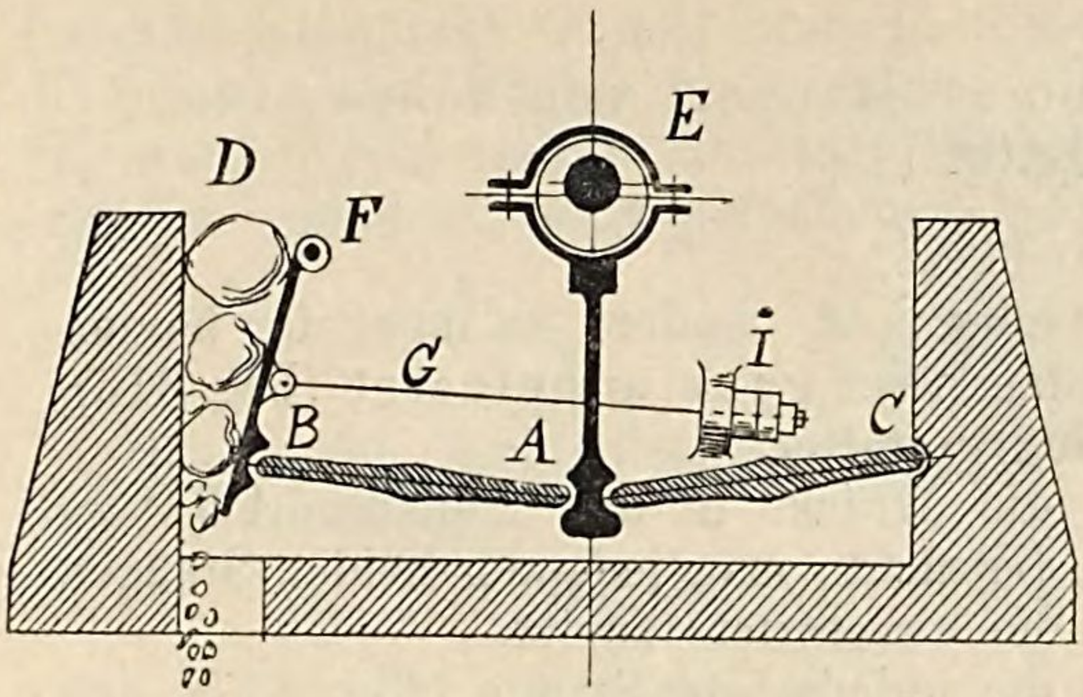
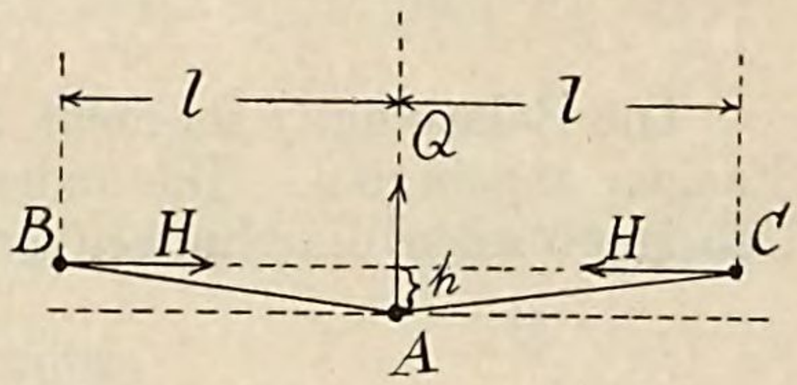


Fig. 313.



§ 243.

Auch bei den Pressen, den Stanz- und Prägwerken wird das Kniehebelgetriebe seiner vorzüglichen Wirkung wegen gern angewendet.

Nebenstehende Figur 314 zeigt die Verbindung zweier Kniehebel, um eine verstärkte Wirkung zu erzielen.

$$H = Q \cdot \frac{l}{2h}, \quad \ldots \ldots \quad 432$$

$$H_1 = H \cdot \frac{l_1}{2h_1} = Q \frac{l}{2h} \cdot \frac{l_1}{2h_1} \quad . \quad 433$$

Die Wirkung wird durch die nicht bei der Berechnung berücksichtigte Reibung, auf die erst in einem späteren Kapitel (§ 293 u. ff.) hingewiesen wird, erheblich vermindert.

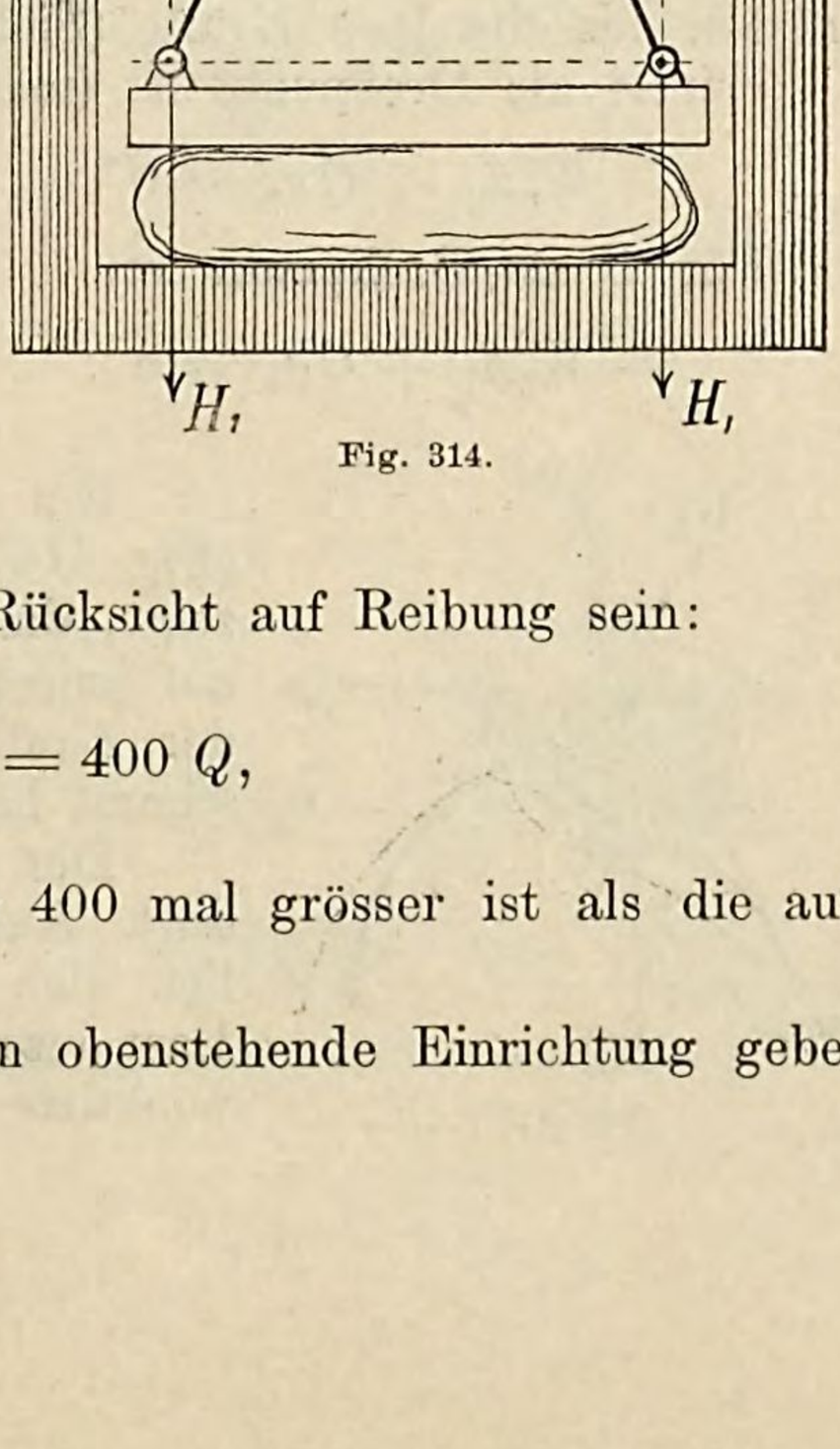


Fig. 314.

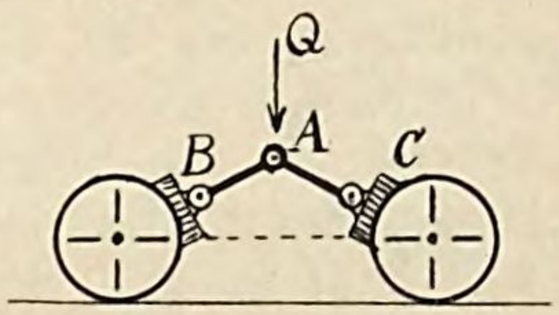


Fig. 315.

Für $\frac{l}{h} = \frac{l_1}{h_1} = 40$ würde ohne Rücksicht auf Reibung sein:

$$H_1 = Q \cdot \frac{40 \cdot 40}{4} = 400\ Q,$$

also eine Presskraft erzielt werden, die 400 mal grösser ist als die aufgewendete Kraft.

Einer Kniehebelbremse könnte man obenstehende Einrichtung geben (Fig. 315).

β.

Verbindung zweier beliebiger Stangen, von denen eine **unbelastet** ist.

§ 244.

Die Belastung Q sei nicht im Gelenke A, sondern an einer der beiden Stangen angebracht. Die andere Stange sei ganz unbelastet (Fig. 316). Uebrigens seien die Stangen beliebig gestaltet.

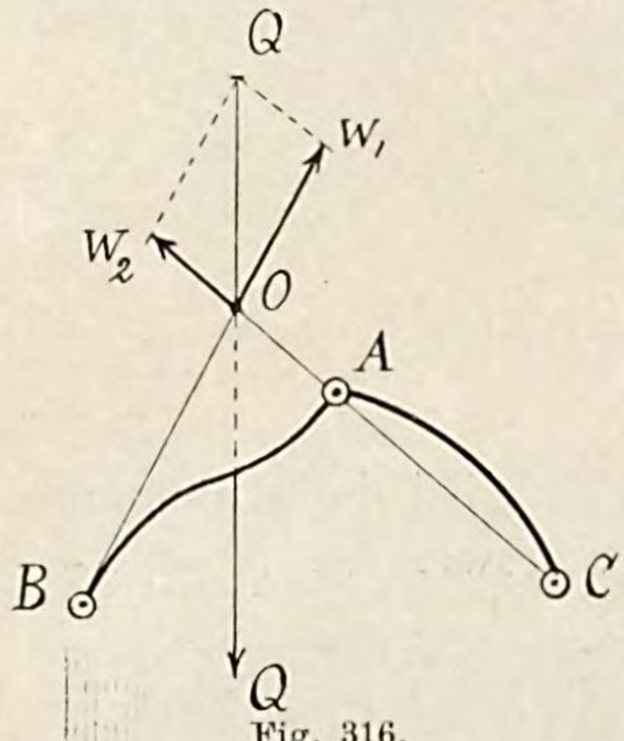


Fig. 316.

Um die Drücke in den Punkten ABC zu ermitteln, betrachte man jede der beiden Stangen für sich, die unbelastete zuerst.

Soll die unbelastete Stange (Fig. 317) sich im Gleichgewicht befinden, also weder um A noch um C, weder nach rechts noch nach links sich drehen, wenn die linke belastete Stange in A auf sie einwirkt, so ist das nur denkbar, wenn die Kraft W_2 in A eine solche Richtung hat, dass sie durch den anderen Punkt (natürlichen Drehpunkt) C verläuft. Denn ginge diese Kraft an C vorbei, so müsste sie um C Drehung veranlassen. Somit kennen wir für die unbelastete Stange die Richtung der vorhandenen Kraft W_2.

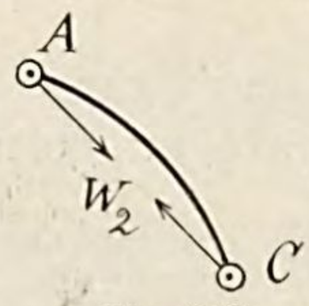


Fig. 317.

Dann aber sind nach dem Satz von den drei Kräften (§ 151 u. 222) auch alle übrigen Grössen leicht bestimmbar. Durch den Durchschnittspunkt O ist die Richtung von W_1, durch das Parallelogramm auch die Grösse von W_1 und W_2 festgelegt.

§ 245.

Auch durch Rechnung (und Konstruktion) findet man leicht die Grössen der einzelnen Kräfte (Siehe auch oben Fig. 250).

Für A als Drehpunkt ist (nach § 223):

$$W_1 d_2 - Q a_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad W_1 = Q \frac{a_2}{d_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 434$$

Für B als Drehpunkt ist:

$$- W_2 d_1 + Q a_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad W_2 = Q \frac{a_1}{d_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 435$$

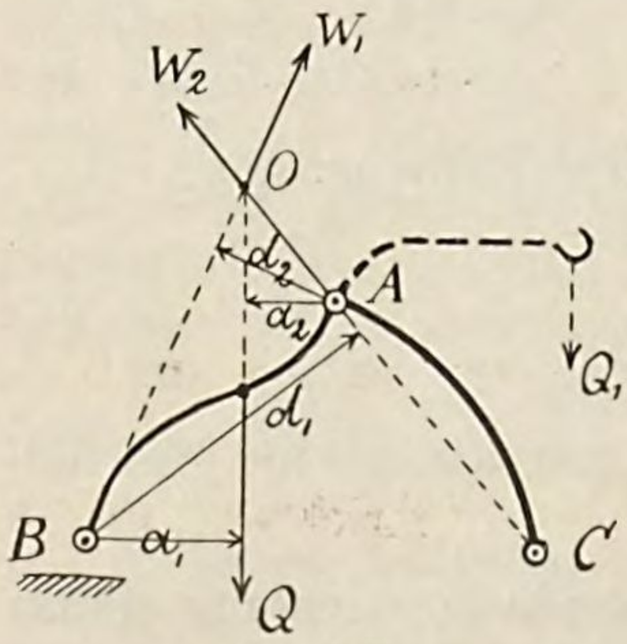


Fig. 318.

Ein einfacher Vergleich dieser Aufgabe (Fig. 318) mit der durch Fig. 272 dargestellten zeigt, dass die Lösung unserer Aufgabe genau auf jene hinausläuft, nachdem man die Richtung der Kraft W_2 in der unbelasteten Stange bestimmt hat.

Der Satz von den drei Kräften gilt hier wie dort. Auch würde die Betrachtung nicht wesentlich sich ändern, wenn der Angriffspunkt der Last ausserhalb A sich befände, wie es durch die punktirte Linie angedeutet ist. Nur müsste der

Durchschnittspunkt O jetzt auf der Lastlinie Q_1 ermittelt werden, und W_1 nach diesem Punkte hin verlaufen. Grösse und Richtung von W_1 und W_2 werden jetzt, selbst für den Fall, dass $Q_1 = Q$ sein sollte, ganz verschieden von den vorhin gefundenen Werthen sein (Siehe auch Fig. 320).

§ 246.

Das soeben Gefundene ist verwerthbar für eine Reihe technisch wichtiger Vorrichtungen.

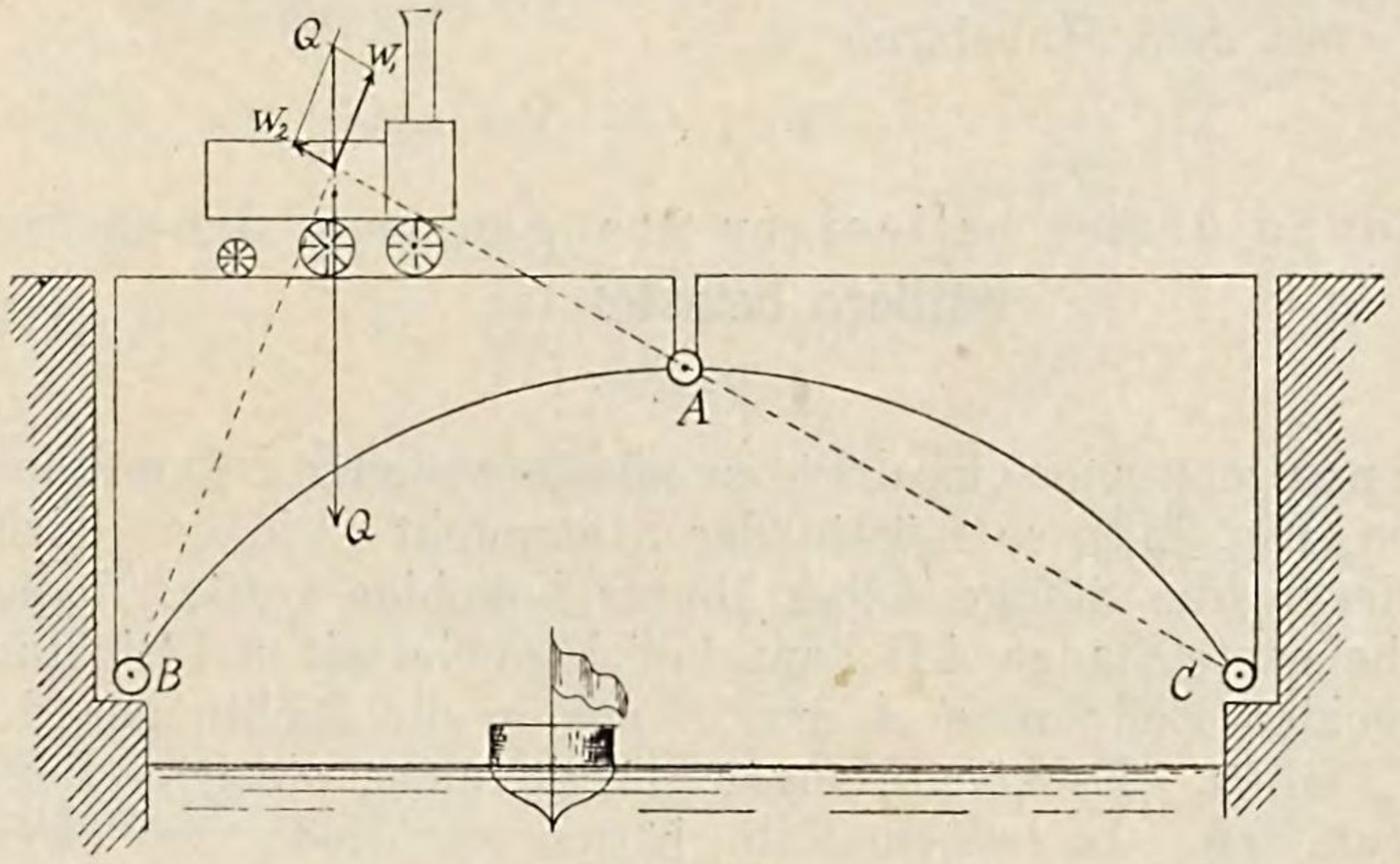


Fig. 319.

Dieselben Betrachtungen führen z. B. auf die Grössen und Richtungen der Kräfte in den drei Punkten ABC der durch Fig. 319 angedeuteten Charnierbrücke, von der die rechte Hälfte als die unbelastete gedacht ist.

Auch in der nebenstehenden Kranvorrichtung (Fig. 320) zum Abheben des Läufers einer Mahlmühle ist die ursprüngliche Figur wieder zu erkennen. Der Angriffspunkt der Last Q liegt ausserhalb des Scheitelgelenkes A. (Siehe auch Fig. 318). Die Stange AB ist als die unbelastete anzusehen.

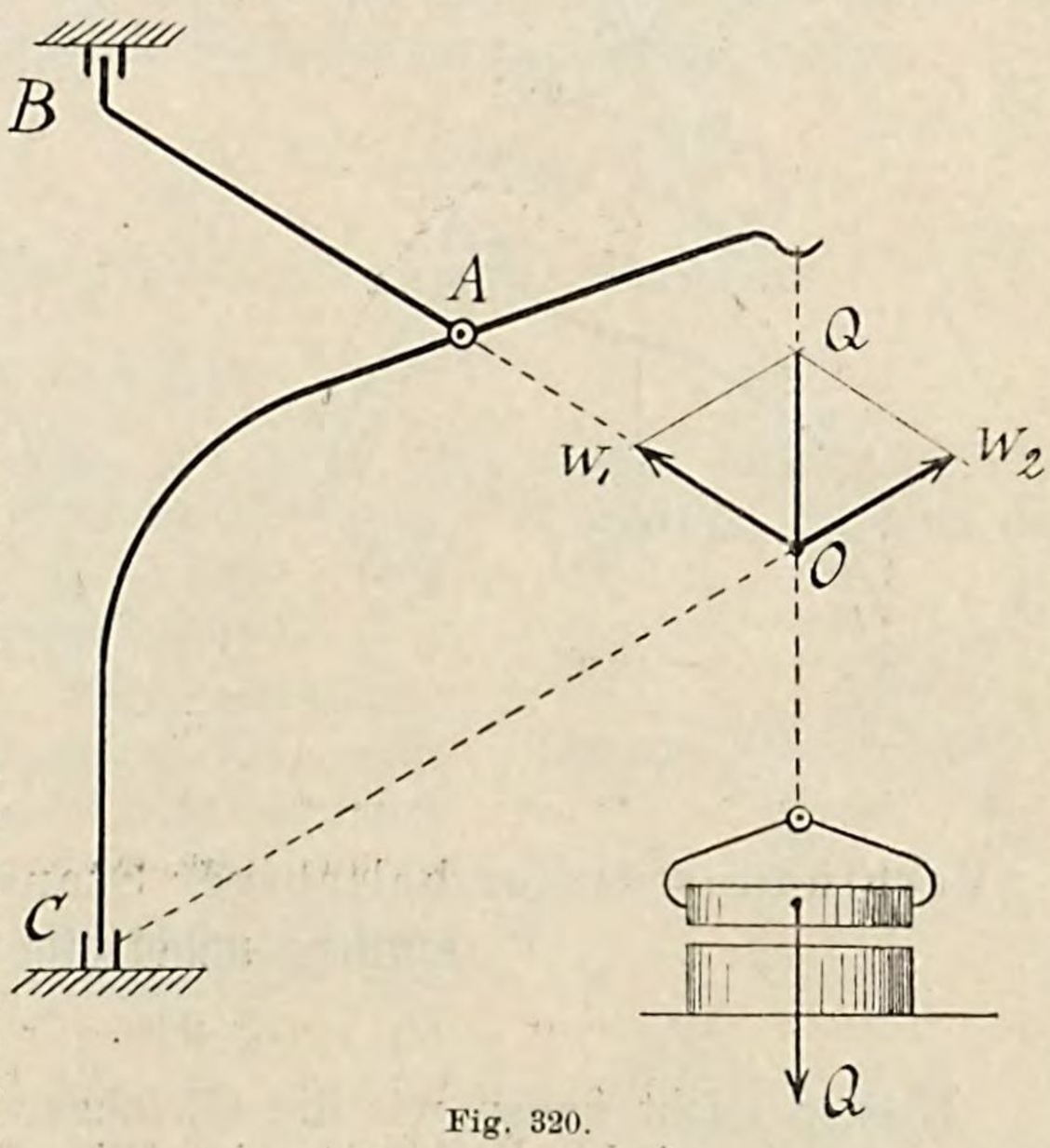


Fig. 320.

Der Vollständigkeit wegen und zur Verallgemeinerung der folgenden Betrachtungen sei hier ein für allemal kurz angedeutet, wie man die zwischen den Gelenkpunkten an der Stange angreifende Kraft Q auf die Gelenkpunkte „reduciren“ könnte. Aus der Fig. 321 ergiebt sich nämlich ohne weiteres (Siehe auch § 226):

$$\left.\begin{aligned} Q' &= Q\,\frac{a_2}{a_1 + a_2} \\ Q'' &= Q\,\frac{a_1}{a_1 + a_2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 436$$

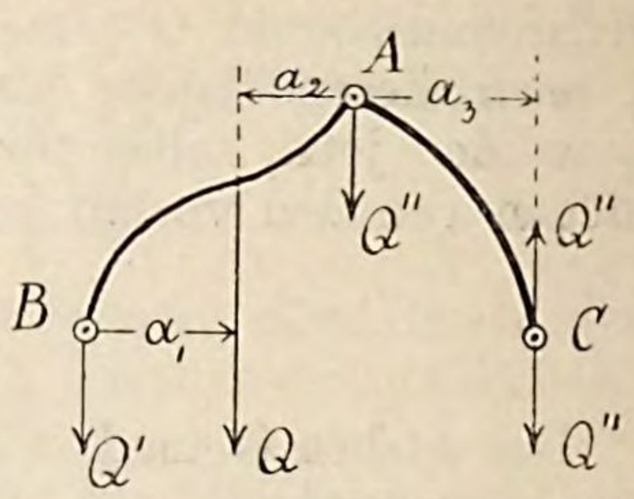


Fig. 321.

Durch Hinzufügen (§ 149) von zwei gleichen entgegengesetzten Kräften Q'' bei C, erhält man hier den nach abwärts gerichteten Druck Q''; dazu, für die Stange AC das Kräftepaar Q'' Q'' mit dem Hebelarme a_3.

γ.

Verbindung dreier beliebiger Stangen, von denen nur die **mittlere belastet** ist.

§ 247.

Wollte man jetzt noch eine dritte unbelastete Stange BD an die belastete AB anreihen (Fig. 322), so müsste der Stützpunkt D in der Richtung der Kraft W_1 liegen, die Stange selbst könnte beliebige Gestalt haben. Auch die einzige belastete Stange AB kann beliebige Gestalt und Richtung haben, wenn ihre beiden Endpunkte A und B nur in die Richtungen der Kräfte W_1 und W_2 fallen. Es könnte sogar AB in einen einzigen Punkt O zusammenschrumpfen. In letztem Falle hätten wir wieder nur zwei Stangen mit belastetem Scheitelgelenke (Fig. 323).

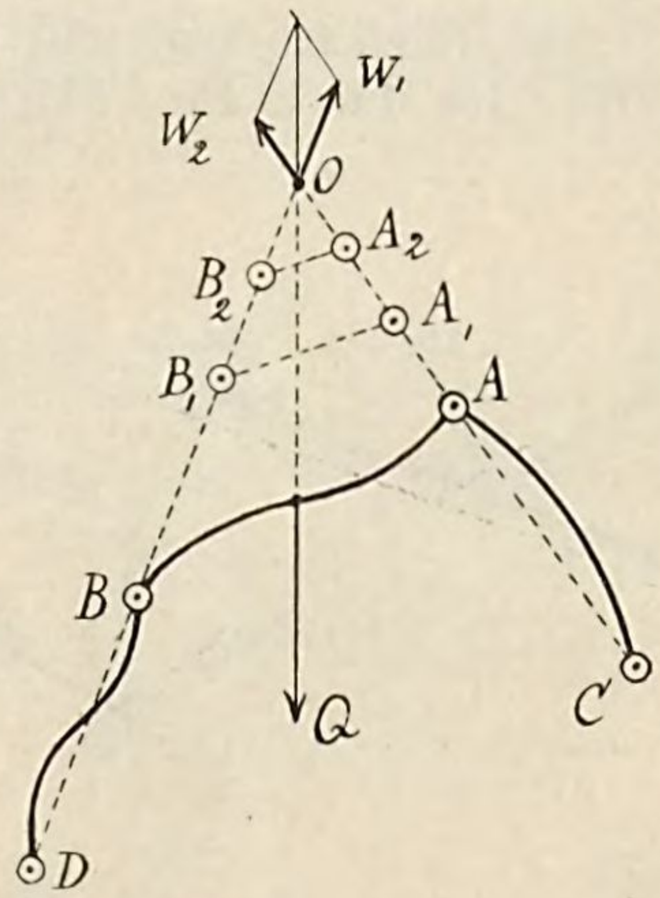


Fig. 322.

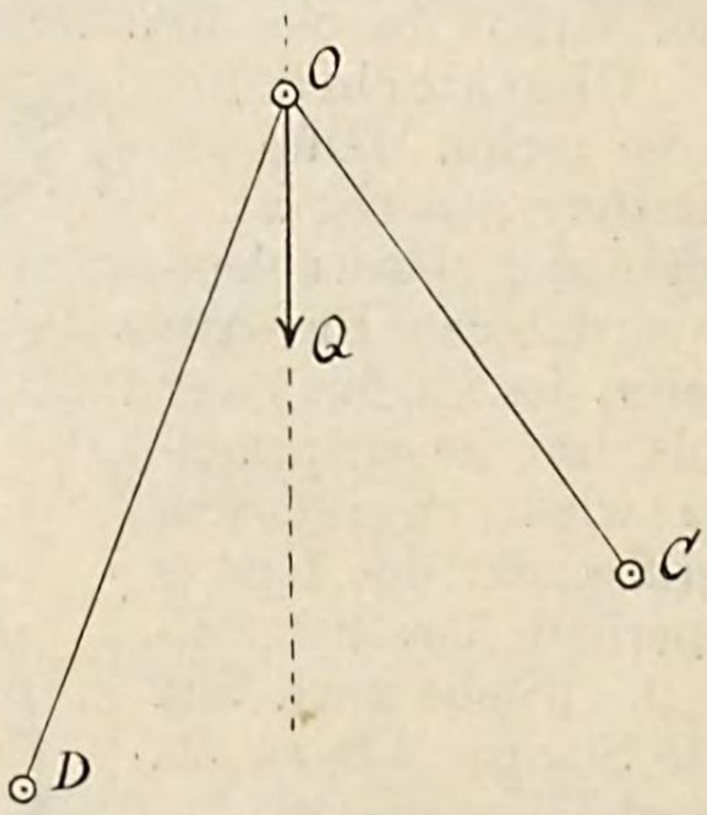


Fig. 323.

δ.

Verbindung dreier beliebiger Stangen, von denen nur die **mittlere unbelastet** ist.

§ 248.

Ebenso leicht finden wir die Gleichgewichtslage dreier Stangen, von denen nur die mittlere unbelastet ist (Fig. 324).

Zunächst müssen die Druckkräfte D_1 und D_2, welche die äusseren Stangen auf die mittlere unbelastete ausüben, in die Richtung der Ver-

bindenden AB fallen und gleich gross sein. D. h. es muss $D_1 = D_2 = D$ sein. Anderenfalls würde die unbelastete Stange, die in der Fig. 325 besonders gezeichnet ist, sich aus ihrer Gleichgewichtslage herausbewegen müssen. Durch diese Bedingung sind wieder die Punkte O_1 und O_2 festgelegt und unser Fall ist auf den von den drei Kräften zurückgeführt. Es empfiehlt sich für den vorliegenden Fall den Satz von den statischen Momenten anzuwenden.

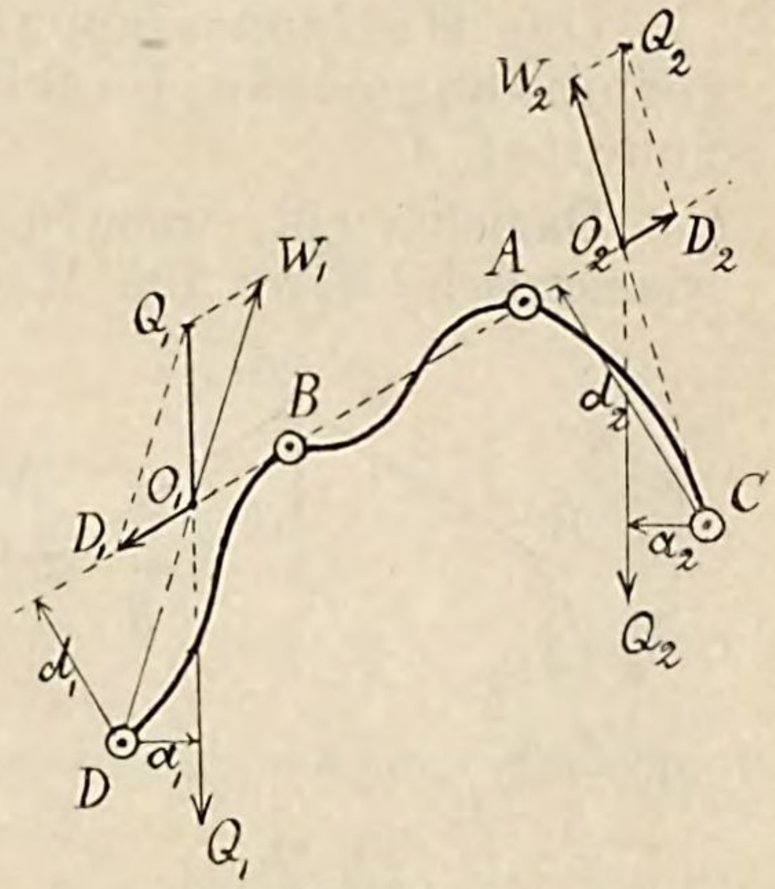


Fig. 324.

Eür D als Drehpunkt ist:

$$Q_1 a_1 - D_1 d_1 = 0 \ldots D_1 = Q_1 \frac{a_1}{d_1} \quad \ldots 437$$

Für C als Drehpunkt ist:

$$-Q_2 a_2 + D_2 d_2 = 0 \ldots D_2 = Q_2 \frac{a_2}{d_2} \quad \ldots 438$$

Nun aber ist die Gleichung zu erfüllen:

$$D_1 = D_2 = D = Q_1 \frac{a_1}{d_1} = Q_2 \frac{a_2}{d_2}, \ldots 439$$

woraus sich die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ergiebt:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{d_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{d_2} \quad \ldots \quad 440$$

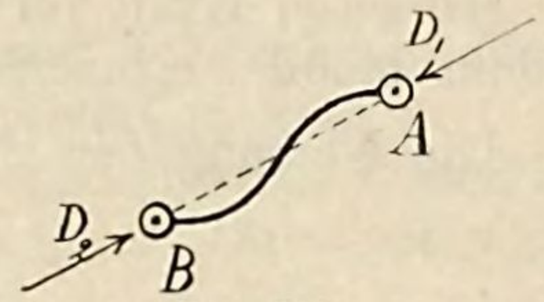


Fig. 325.

Die Belastungen Q_1 und Q_2 müssen demnach, wie nicht anders zu erwarten war, in einem bestimmten Verhältnisse zueinander stehen.

ε.

Symmetrische Verbindung von vier Stangen.

§ 249.

Wird im Punkte B der Fig. 307 noch eine Stange hinzugefügt, so müsste diese die punktirt gezeichnete Richtung BD erhalten, falls an der Belastung sich nichts änderte (Fig. 326). (Für die rechte Seite würde dasselbe gelten.)

Sobald aber in B eine Vertikalbelastung Q_1 hinzugefügt wird, muss dementsprechend auch die Stange BD geeignet gemacht werden, diesen Vertikaldruck zu übernehmen; d. h. sie muss um so steiler gestellt werden, je grösser Q_1 ist, was schon durch einen einfachen Versuch sich feststellen liesse.

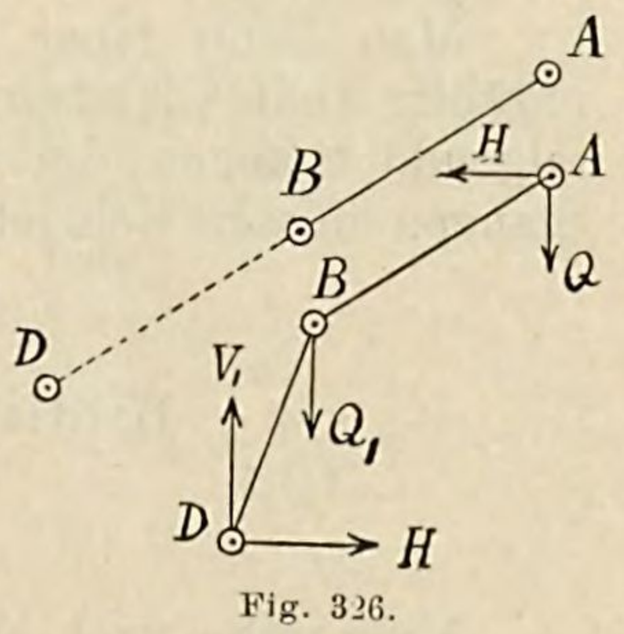


Fig. 326.

Der Vertikaldruck in D ist:

$$V_1 = \frac{Q}{2} + Q_1 \quad \ldots \quad 441$$

An dem Horizontalschube H hingegen wird durch das Hinzutreten der Vertikalkraft Q_1 nichts geändert. Dasselbe würde gelten, wenn abermals eine Stange und eine neue Belastung in D angereihet würde.

Der Horizontalschub H ist an allen Stellen der Stangenverbindung genau derselbe und gleich dem Horizontalschube im Scheitel A.

Dasselbe gilt, wenn die Stangenverbindung nach Fig. 327 eine unsymmetrische wäre: Der Horizontalschub in C ist genau so gross wie der Horizontalschub in D. Wem das ohne weiteres nicht einleuchtet, denke sich die Stangenverbindung in allen ihren Theilen starr (vielleicht mit gewichtslosem Blei umgossen). Dadurch kann der Gleichgewichtszustand, wenn er vorher bestand, nicht geändert werden. An diesem starren Körper wirkt nun in D eine Horizontalkraft von links nach rechts, in C eine Horizontalkraft von rechts nach links. Wäre eine dieser Kräfte grösser als die andern, so müsste der Körper im Sinne der grösseren Kraft fortschreiten. Ein solches Unding würde an ein Perpetuum mobile erinnern.

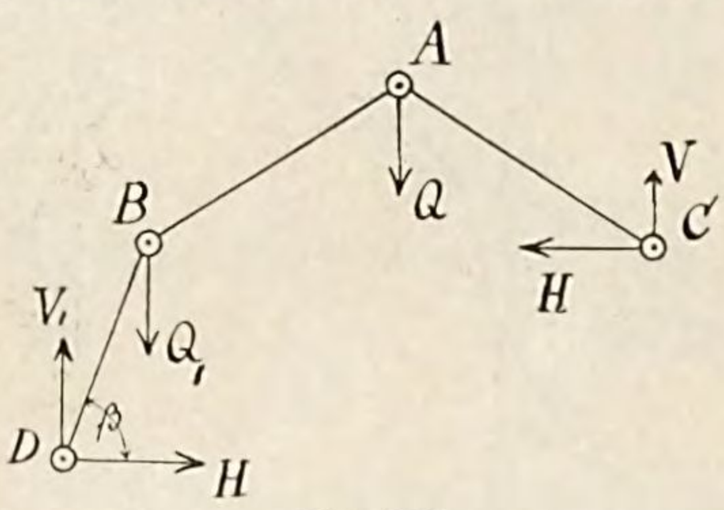


Fig. 327.

Die Neigung der Stange ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_1}{H} = \frac{\frac{Q}{2} + Q_1}{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 442$$

setzt man den für H durch die Gleichung 430 bestimmten Werth ein, so folgt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{Q}{2} + Q_1}{Q} 2 \cdot \operatorname{tg} a;$$

d. h. der Winkel β ist ausser von der Art der Belastung vor allen auch abhängig von der Neigung a, die man den Scheitelstangen gab.

Allgemein könnte man diese Wahrheit so ausdrücken:

Man kann einer Stangenverbindung bei gleichbleibender Belastung unzählig viele Gleichgewichtslagen ertheilen; ist aber für zwei aufeinanderfolgende Stangen die Lage festgelegt, so hört jede Willkür auf. Alle Stangen müssen sich jetzt einer bestimmten Gleichgewichtslage unterordnen.

Bildliche (graphische) Darstellung.

§ 250.

Man reihe nach dem Polygongesetze (§ 78) die Kräfte der Grösse und Richtung nach aneinander. Zu dem Ende trage man (nach Fig. 329) H in horizontaler Lage auf, ziehe von einem Endpunkte aus eine vertikale

Linie und trage auf dieser der Reihe nach die Belastungen $\frac{Q}{2}$, $Q_1 \ldots$ hintereinander auf, ziehe die Schlusslinien s, $s_1 \ldots$, dann ist in dem so erhaltenen Diagramme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{Q}{2}}{H}; \ldots . \; s = \sqrt{H^2 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2} \quad . \quad 343$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{Q}{2} + Q_1}{H}; \; s_1 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{Q}{2} + Q_1\right)^2} \quad 444$$

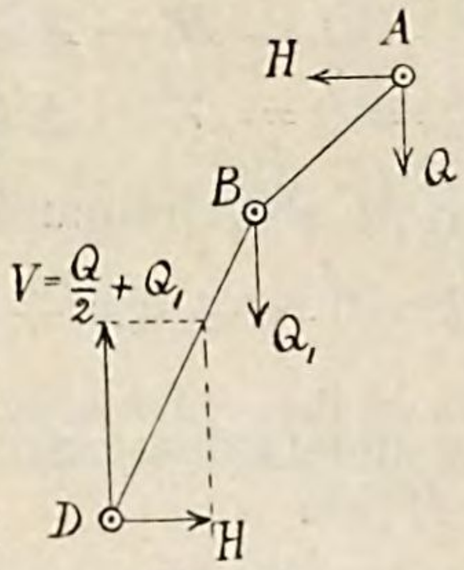


Fig. 28.

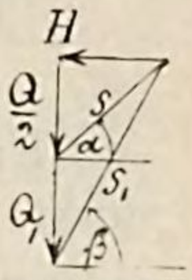


Fig. 329.

Dieselben Werthe wurden oben aus den Stangenverbindungen unmittelbar abgeleitet (Gl. 430, 442). Folglich stellen die Schlusslinien s, $s_1 \ldots$ der Grösse und Richtung nach die Spannungen dar, die in den einzelnen Verbindungsstangen auftreten.

Sehr deutlich tritt hier auch hervor, wie die Form der Stangenverbindung (Neigung der einzelnen Theile gegeneinander) von der Art der Belastung abhängt.

Später bei dem „Seilpolygon“ und der darauf gegründeten „Graphostatik“ wird diese Angelegenheit eingehender erörtert (§ 258).

Es wird dort auch gezeigt, dass an der Lösung im Wesentlichen nichts geändert wird, wenn die Belastungen $Q Q_1 Q_2 \ldots$ nicht nur vertikal, sondern beliebig gerichtet sind.

ζ.

Verbindung von beliebig viel Stangen.

§ 251.

Die Belastungen $Q_1 Q_2 \ldots$ seien wieder in den Gelenken angebracht (Fig. 330.)

Wirkten sie zwischen den Gelenken an den Stangen selbst, so würde hierdurch die Betrachtung nicht erschwert, weil nach Gl. 436 eine „Reduktion“ auf die Gelenke leicht vorgenommen werden könnte.

Ist die Stangenverbindung AM im Gleichgewichte, so wird an ihrem Gleichgewichtszustande nichts geändert, wenn sie aus dem Verbande gleichsam herausgeschnitten und an den Schnittstellen mit denjenigen Kräften ausgestattet wird, die hier von den angrenzenden Verbindungstheilen ausgeübt werden.

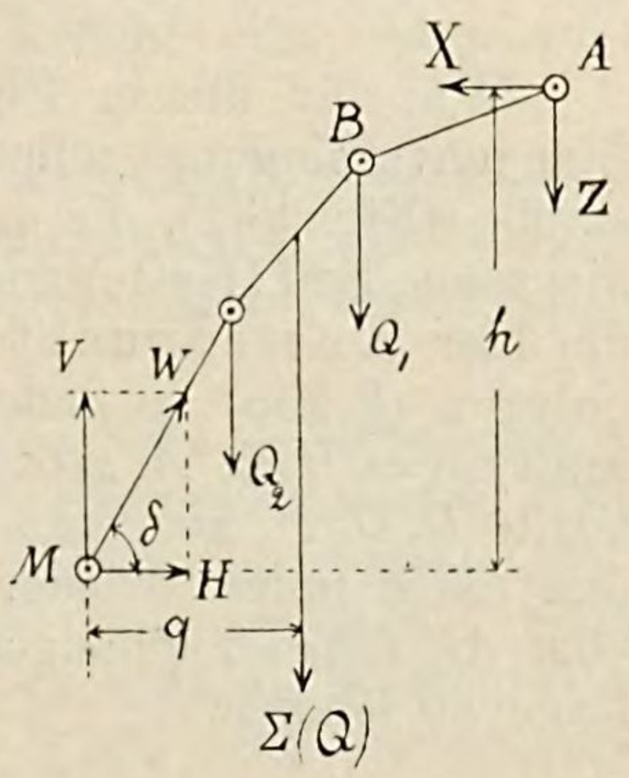


Fig. 330.

Sind diese Kräfte zu bestimmen, so würde dasselbe auch für jede andere Schnittstelle möglich sein; kurz es würden die in den einzelnen Verbindungstheilen auftretenden Kräfte ausfindig gemacht werden können.

Die gesuchten, an den Punkten A und M auftretenden Kräfte seien nach der Figur: $X, Z,\ V, H$. Ferner sei die Gesammtvertikalbelastung der Grösse und Lage nach durch die Resultirende $\Sigma\ (Q)$ dargestellt.

Dann gilt nach den allgemeinen Bedingungsgleichungen (300 u. ff.):

1. $P_x = 0 = H - X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad X = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 445$

2. $P_z = 0 = V - \Sigma(Q) - Z \quad . \quad . \quad V = \Sigma(Q) + Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 446$

Für M als Drehpunkt ist ferner:

3. $\mathfrak{M} = 0 = -Xh + \Sigma(Q)q \quad . \quad . \quad X = \dfrac{\Sigma(Q)q}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 447$

Für die Grösse und Neigung des Auflagerdruckes W am Schnittpunkte M ist:

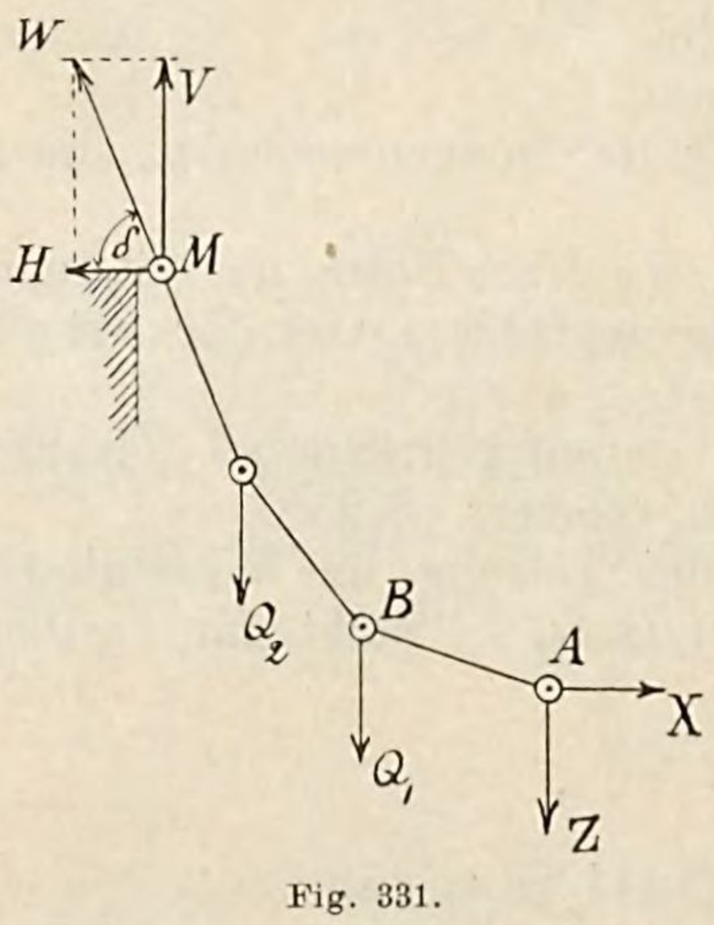


Fig. 331.

$$W = \sqrt{V^2 + H^2} \quad . \quad . \quad . \quad 448$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 449$$

Ist A der Scheitel, so würde $Z =$ Null sein und es wären jetzt die zu bestimmenden Grössen:

$$X = H = \frac{\Sigma(Q)q}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 450$$

$$V = \Sigma(Q)$$

$$W = \sqrt{(\Sigma(Q))^2 + H^2} \quad . \quad . \quad 451$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Sigma(Q)}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 452$$

Auch hier ist ersichtlich, dass überall in der Verbindung der Horizontalschub H denselben Werth hat.

§ 252.

Was für die in Fig. 330 dargestellte labile Gleichgewichtslage der Stangenverbindung gefunden wurde, gilt im Wesentlichen auch für die stabile (Fig. 331), die z. B. ein an den Enden eingespanntes, vollkommen biegsames Seil (Kette) annehmen würde, wenn es in den Punkten $A, B, D \ldots$, die hier Knotenpunkte heissen, belastet würde. Genaues ist unter Seilpolygon (§ 258) zu finden. Wenn man in der letzten Figur die Horizontalkraft $X = H$ in A grösser und grösser werden lässt, ohne die Vertikalkräfte $Q_1\, Q_2 \ldots$ zu verändern, so wird die Kette flacher und flacher werden und dabei immer wieder eine andere Gleichgewichtslage annehmen, wobei aber die Glieder (Stangen) unter sich jedesmal eine bestimmte gegenseitige Lage einnehmen.

§ 253.

Für technische Ausführungen ist diese einfache Betrachtung noch von besonderer Bedeutung. Wollte man z. B. an einem straff gespannten Seile (Drahtseile) MN eine Brückenbahn oder eine Röhrenleitung (Dampf- oder Wasserleitung) aufhängen, so würde

bei gleichbleibendem Rohrgewichte, doch die Spannung H in dem Seile in dem Maasse wachsen, in dem man die Pfeilhöhe h vermindert. Unter sonst gleichen Verhältnissen würde das Seil in der punktirten Lage ausgespannt, weniger Zugbeanspruchung erfahren, also dünner sein dürfen. Dafür ist die Länge allerdings etwas bedeutender. Man gebraucht also in dem ersteren Falle ein kürzeres, dickeres Seil. Durch Probiren, aber auch durch Rechnung lässt sich ausfindig machen, bei welcher Seileinsenkung h der Materialverbrauch am Seil am kleinsten ist. Diese Berechnung würde aber über den Rahmen der Mechanik hinausgehen. Es sei nur noch erwähnt, dass für $h = 0$, also für das geradlinig ausgespannte Seil zwar die geringste Länge sich ergeben würde, dafür aber H und damit die Seildicke unendlich gross ausfallen würde.

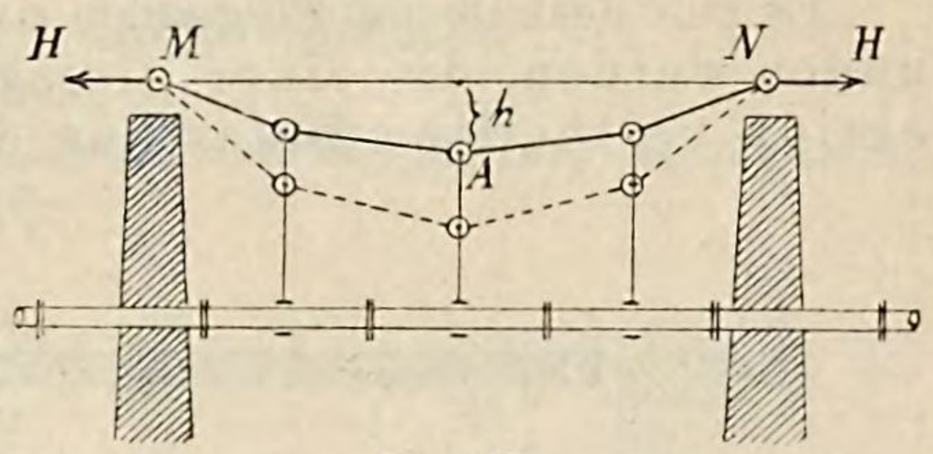


Fig. 332.

Das hier Gesagte gilt in gewisser Weise für jeden ausgespannten Telegraphen-, Telephondraht, für die „Waschleine“ der Hausfrau, kurz ganz allgemein. Hätten letztere eine Vorstellung von jener Horizontalkraft H, sie würden niemals ihre in der Stube ausgespannten „Wäscheleinen“ am Ofen befestigen! — Wie hier, so würden wir überall im alltäglichen Leben die Herrschaft der Gesetze der Mechanik finden, wenn wir nur danach suchten.

η.

Verbindung von unzählig vielen Stangen.

(Vollkommen biegsame Kette [Seil]; Ketten-, Seilbrücken; Parabolische Träger).

§ 254.

Einleitende Bemerkungen. Durch das letzte Beispiel wurde schon auf den Zusammenhang des vorigen und dieses Kapitels hingedeutet.

Denkt man sich die Gelenkpunkte der Stangenverbindung einander näher und näher gerückt, so nähert sich letztere mehr und mehr einer vollkommen biegsamen Kette oder einem vollkommen biegsamen Seile, auf welche die oben aufgestellten allgemeinen Regeln nun angewendet werden sollen.

Zunächst müssen die Gleichgewichtsformen der Ketten (Seile) sowie die Spannungen in den einzelnen Theilen derselben ebenfalls von der Art der Belastung abhängen. Es ist deshalb über letztere nähere Bestimmung zu treffen.

Die Bestimmung, dass die Last, wie z. B. das Eigengewicht, gleichförmig längs der Kette vertheilt sei, scheint die nächstliegende zu sein. Doch entspricht dieser Annahme, die auf die sogen. „Kettenlinie“ als Gleichgewichtsform führt, durchaus nicht der einfachste Rechnungsgang, auch nicht einmal die in der Technik am häufigsten vorkommende Anwendung. Denn in der Technik hat in vielen Fällen die Kette eine so schwere Brückenbahn oder Röhrenleitung zu tragen, dass ihr Eigengewicht ganz vernachlässigt werden darf.

Die zu tragende Last ist dann aber gleichförmig über die Horizontalprojektion der Kette vertheilt.

§ 255.

Es soll deshalb im Folgenden diejenige Gleichgewichtslinie gefunden werden, die einer gleichförmig über die Horizontalprojektion vertheilten Belastung entspricht.

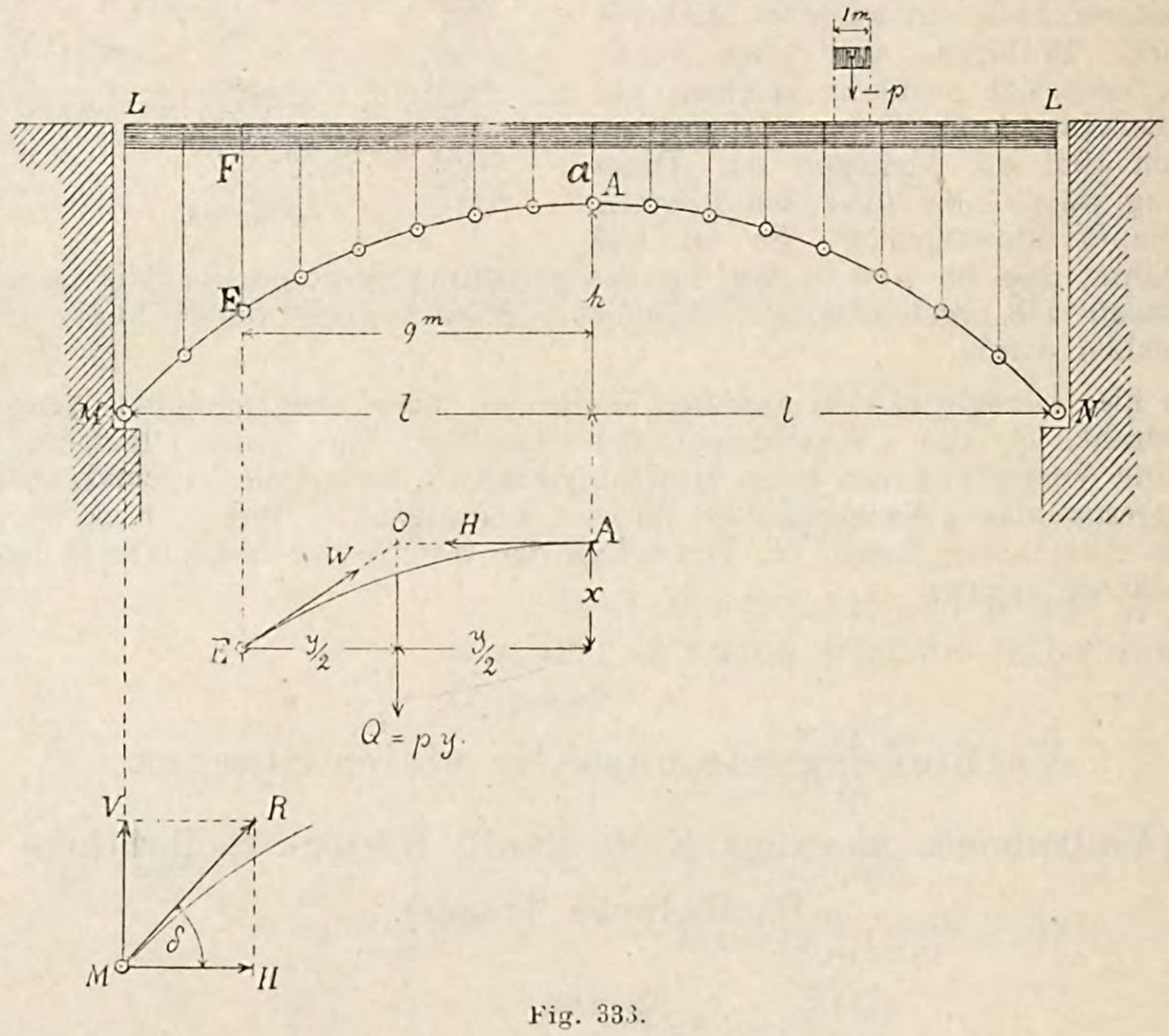


Fig. 333.

MAN (Fig. 333) sei die Gleichgewichtsform der Gelenkkette, welche die Brückenbahn LL zu tragen hat. Die Belastung auf je ein Meter der Horizontalprojektion sei p kg.

Die ganze Spannweite sei $= 2l$,
die Pfeilhöhe $= h$.

Man denke auch hier ein Stück, vielleicht (vom Scheitel abgerechnet) AE herausgeschnitten und an ihm genau dieselben Kräfte angebracht, die in Wirklichkeit auf dasselbe einwirken.

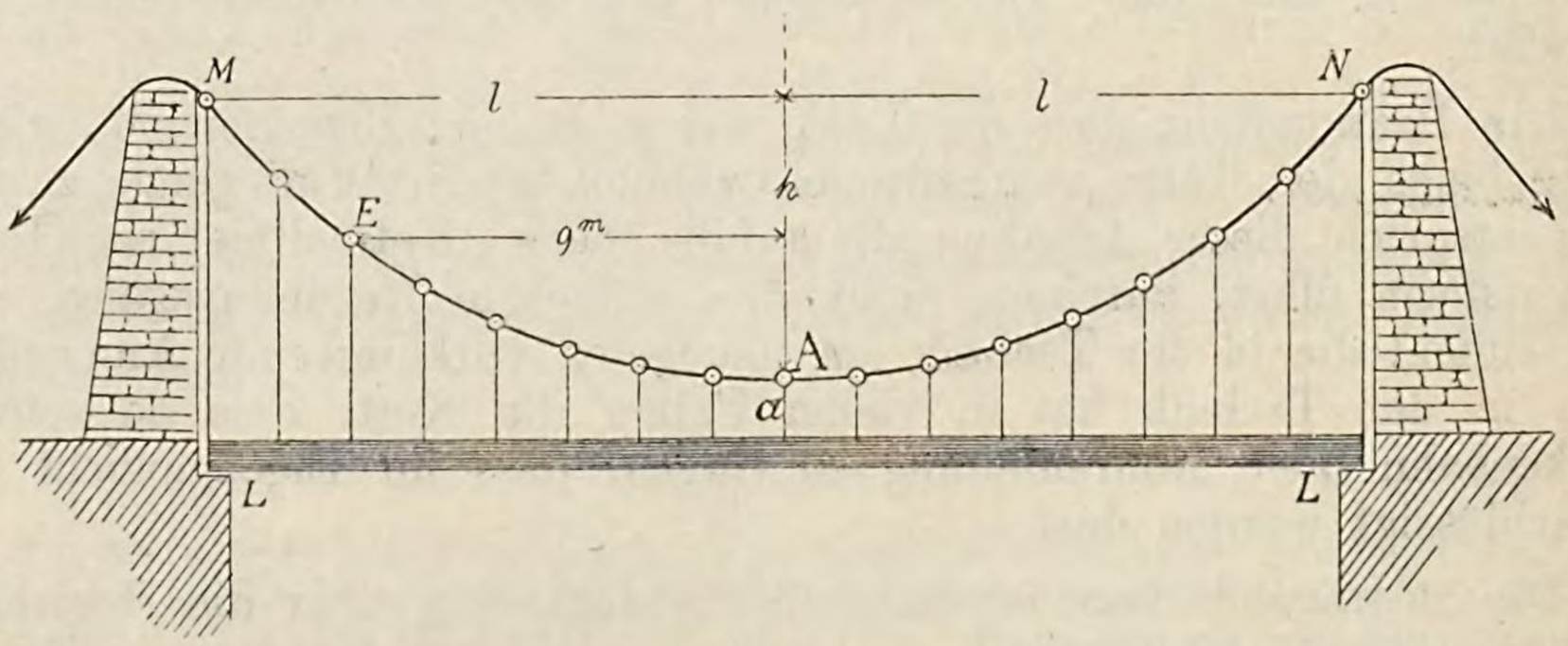


Fig. 334.

Es seien:

y die Horizontalprojektion des gedachten Stückes,
x die Vertikalprojektion desselben,
H und W die an den Schnittpunkten zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlichen Kräfte.

Dann gilt, dass:

1. die Gesammtvertikalbelastung $Q = p \cdot y$ ist und in der Mitte der Länge y angreift,
2. die an den Enden erforderlichen Kräfte H und W hier tangential zur Kette gerichtet sein müssen, und
3. nach dem Satze von den drei Kräften sich die Richtungen von Q, W, H in einem Punkte O schneiden.

Dann ergiebt sich für E als Drehpunkt:

$$\mathfrak{M} = 0 = py\frac{y}{2} - Hx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H = \frac{py^2}{2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 453$$

Für das Stück AM dagegen würde aus demselben Grunde für M als Drehpunkt sein:

$$\mathfrak{M} = 0 = pl\frac{l}{2} - Hh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H = \frac{pl^2}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 454$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$\frac{py^2}{2x} = \frac{pl^2}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \sqrt{2\,\frac{l^2}{2h}\,x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 455$$

also die Gleichgewichtsform der Kette eine Parabel $\left(\text{vom Parameter } \frac{l^2}{2h}\right)$ ist.

Mit Hülfe der letzten Gleichung lässt sich die erforderliche Kettenform berechnen und konstruiren:

Für $a = 1{,}5$ (Länge der Hängestange im Scheitel),

$2l = 24$ m,

$h = 5$ m

würde z. B. die Länge der Hängestange FE, die um

$y = 9$ m

von der Hauptachse AA absteht, sein:

$$FE = a + x,$$

$$= 1{,}5 + \frac{y^2}{l^2} \cdot h$$

$$= 1{,}5 + \frac{9^2}{12^2} \cdot 5 = 4{,}3 \text{ m}.$$

Auch die Grösse und Richtung der Kräfte an den Widerlagern sind leicht gefunden, wenn p gegeben ist:

$$V = p \cdot l, \quad \ldots \quad 456$$

$$H = \frac{p \cdot l^2}{2h} \quad \ldots \quad 457$$

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} \quad \ldots \quad 458$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V}{H} \quad \ldots \quad 459$$

Was für die labile Gleichgewichtslage (Kettenbrücke Fig. 333) gefunden wurde, gilt auch für die stabile (Fig. 334), mit dem Unterschiede, dass hier MAN nur Zugspannung erfährt, also durch ein Seil ersetzt werden kann (Seilbrücke).

§ 257.

Ebenso wie wir früher (§ 254) die Gelenkkette aus der Stangenverbindung entstehen liessen, so kann umgekehrt durch Verlängerung der Glieder einer Kette eine Stangenverbindung hergeleitet werden, wie wir sie früher behandelten.

Es müssten demnach die für die Kette ermittelten Gleichungen auch für die Stangenverbindung gelten, wenn bei letzterer die Belastung gleichförmig über die Horizontalprojektion vertheilt wäre.

Für eine solche müssten dann die Gelenkpunkte auf einer Parabellinie liegen und die Stangen die Seiten des in die Parabel eingeschriebenen Polygones bilden.

Auch hier gilt, was oben in Bezug auf die Fig. 331 und 334 gesagt ist.

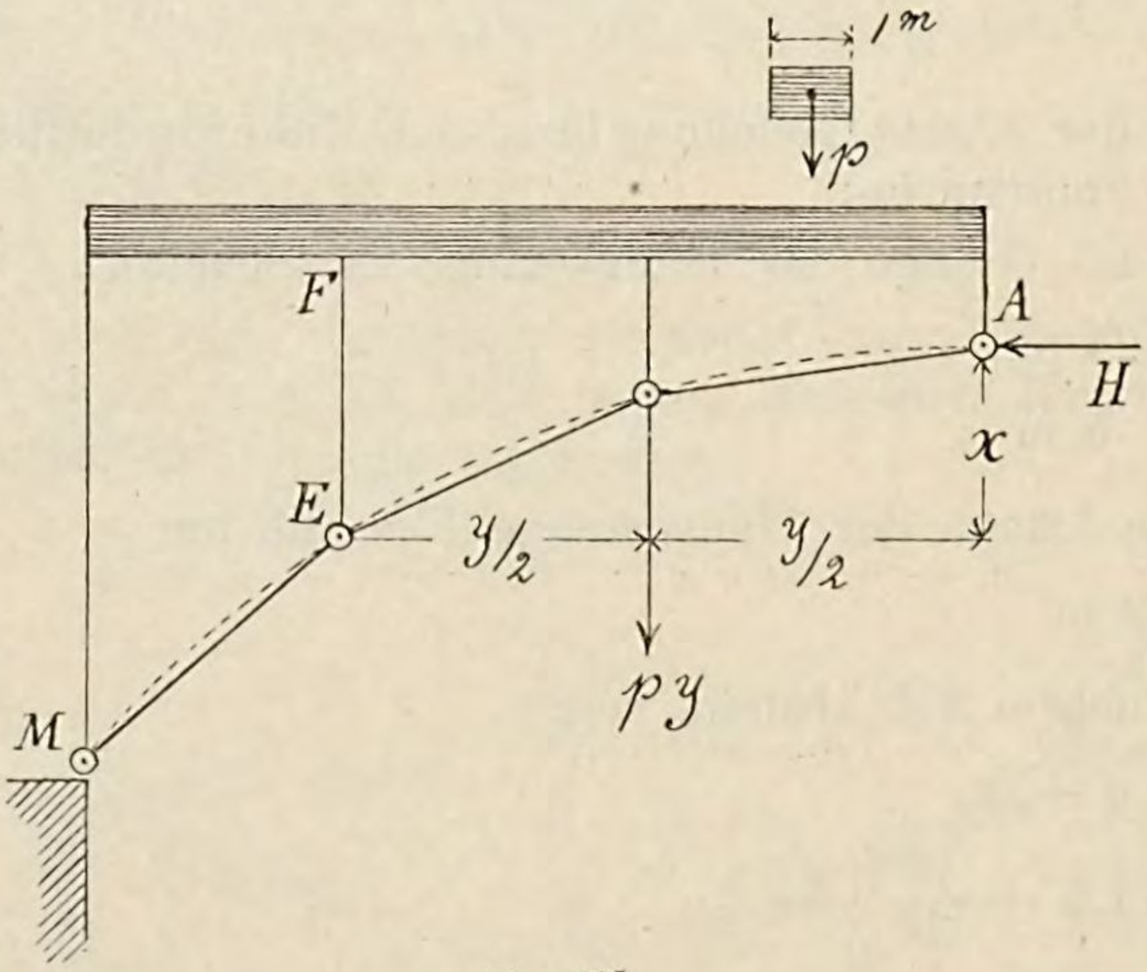


Fig. 335.

Ueber die sogen. parabolischen Träger, die ebenfalls nach den voranstehenden Regeln behandelt werden, siehe Ritter, Techn. Mechanik, S. 252 und ff., sowie S. 577 und ff.

9.

Einige wichtige Sätze aus der **graphischen Statik. (Graphostatik).**

§ 258.

Dieses Kapitel reiht sich sowohl geschichtlich, als auch sachlich innig dem vorigen an.

Die im vorangehenden Kapitel benutzte, durch A. Ritter (Hannover-Aachen) 1861 eingeführte sogen. „rechnende Schnittmethode“, wonach:

„in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt für einen durch einen be-
„liebigen Schnitt abgetrennten Körpertheil die Summe der Kraft-
„momente gleich Null ist“,

verwertheten sowohl Culmann (1864, 1866) als Grundlage seiner „graphischen Schnitt-Methode“, als auch Cremona (1872) zur Ableitung seiner sogen. „Polygonal-Methode“, wonach für das Gleichgewicht:

„an jedem Punkte (Knotenpunkte) des Systemes die Resultirende der
„äusseren und inneren Kräfte gleich Null ist“.

Die beiden letzten Methoden zusammengenommen bilden auf Grund des Satzes von den drei Kräften gleichsam durch Verquickung der Gesetze des Kräfte- und Seil-Polygones einen besonderen Theil der Mechanik, den man als graphische Statik oder nach Reuleaux Graphostatik bezeichnet.

Dem engen Rahmen unseres Buches entsprechend, sollen wenigstens einige der für den Techniker wichtigsten Sätze dieser Lehre im Folgenden behandelt werden. Auch soll danach gestrebt werden, den Zusammenhang mit dem bereits früher Behandelten auszudrücken.

§ 259.

Seilpolygon. Knotenpunkte. In den Punkten A und B sei ein Seil, dessen Länge grösser als die Entfernung AB ist, befestigt. In dem beliebig gewählten Punkte o_1 (Fig. 336) lassen wir eine beliebige Kraft P_1 wirken. Diese wird die Seilspannungen S_1, S_2 erzeugen, welche mittelst des Satzes von den drei Kräften sich genau bestimmen lassen.

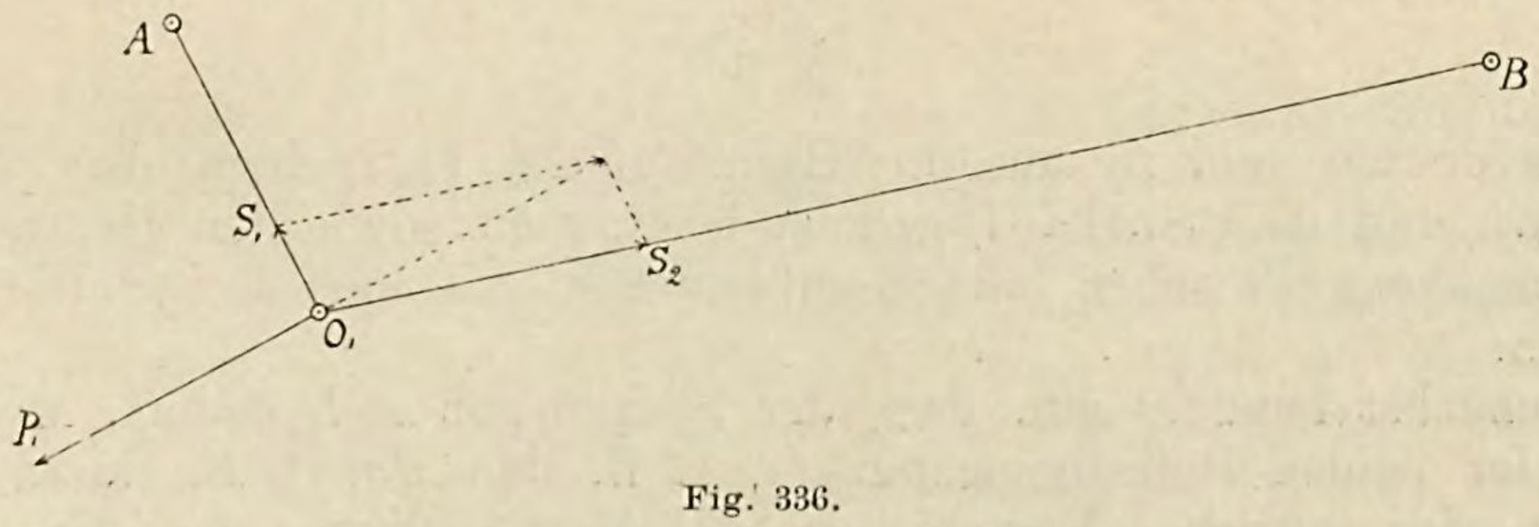


Fig. 336.

Bringen wir ferner noch in $o_2\, o_3 \ldots$ (Fig. 337) die beliebigen Kräfte $P_2\, P_3 \ldots$ an, so wird das Seil straffer auch bei o_1, folglich werden auch S_1 und S_2 nach Grösse und Richtung sich ändern, überall aber die inneren

Seilspannungen $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots$ mit sämmtlichen äusseren Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$, so ins Gleichgewicht sich setzen, dass die Punkte $o_1 o_2 o_3 o_4 \ldots$ zu bestimmten Punkte eines Polygones werden, welches man „Seilpolygon“ nennt.

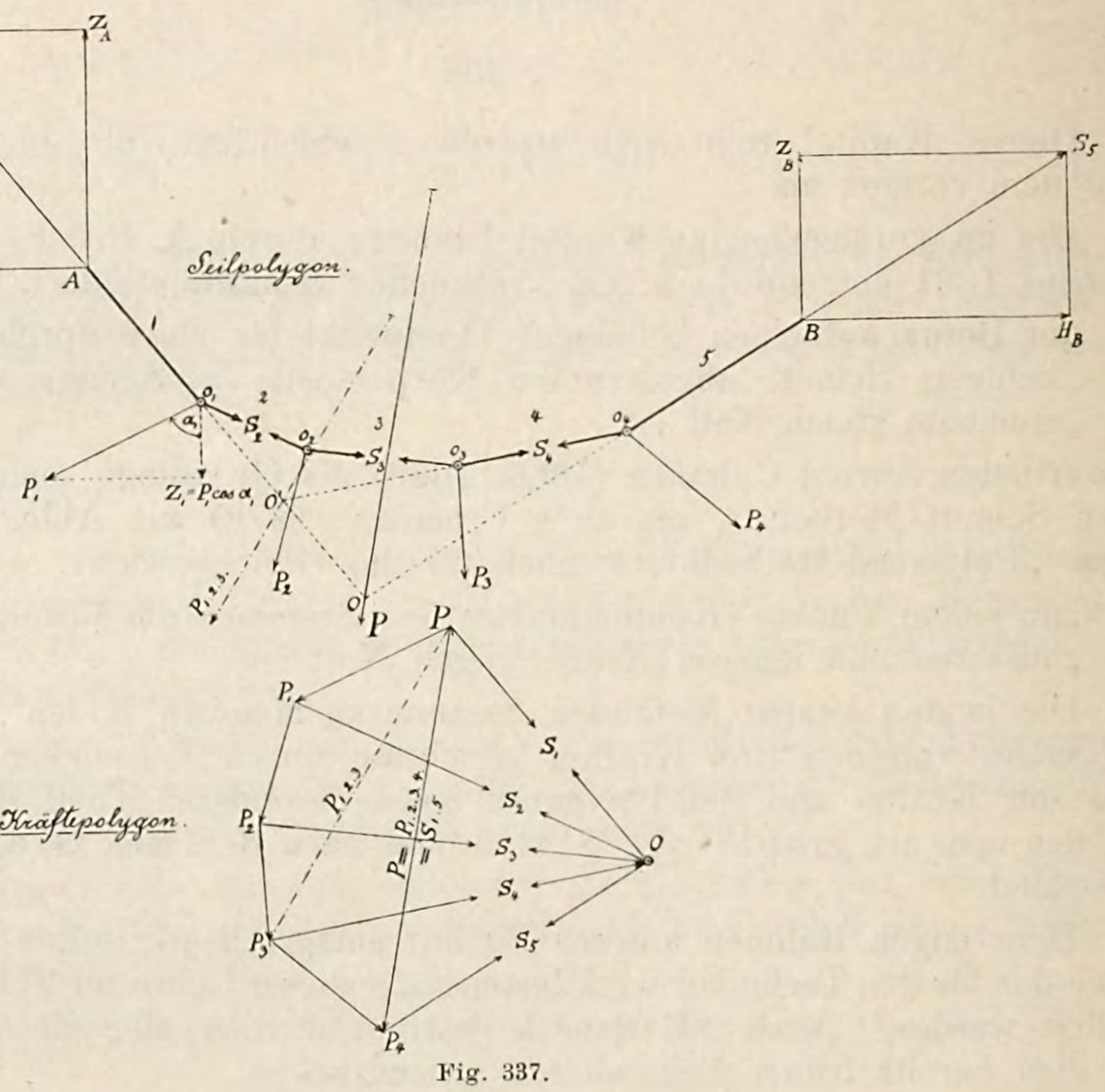


Fig. 337.

$o_1 o_2 o_3 \ldots$ heissen „Knotenpunkte“. Für jeden dieser Punkte gilt der Satz von den drei Kräften.

Es ist:

$$Z_A + Z_B = \Sigma (P \cdot \cos \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 460$$

$$H_A = H_B \quad \ldots \ldots \ldots \quad 461$$

Die horizontalen Kraftantheile (H) haben in jedem Knotenpunkte denselben Werth.

§ 260.

Bevor wir nun zu unserer Hauptaufgabe übergehen, das Kräftepolygon und das Seilpolygon zu bestimmen, sowie den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen beiden aufzusuchen, sei noch Folgendes hervorgehoben:

Zunächst leuchtet ein, dass das Seilpolygon sich ändert, wenn man einen der beiden Befestigungspunkte, z. B. den Punkt B, durch Heben, Senken oder seitliches Verschieben verändert, selbst wenn die äusseren Kräfte vollständig ungeändert bleiben. Es giebt also für dasselbe Seil und für dieselben äusseren Kräfte doch unzählig viele Seilpolygone. Hat man jedoch durch die Punkte A und B den beiden Seilenden eine

bestimmte Richtung aufgezwängt, so giebt es für sämmtliche Knotenpunkte und Polygonseiten nur ganz bestimmte Gleichgewichtslagen. Auch könnte man dadurch, dass man eine Kraft, z. B. P_3, verändert, den Knoten o_3 und damit zugleich den angrenzenden beiden Polygonseiten $S_3 S_4$ irgend eine andere gewünschte Lage aufdrängen, dann aber giebt es für sämmtliche andere Knotenpunkte und Polygonseiten keine Willkür mehr. Auch sie müssen sich sämmtlich dem neuen Zustande anbequemen. Kurz es gilt allgemein die Regel:

Ist zwei (angrenzenden) Seiten eine bestimmte Lage vorgezeichnet, so ist damit für alle anderen die Lage genau bestimmt. Siehe auch Seite 238.

Der Satz von den drei Kräften giebt uns noch andere Aufschlüsse über die gegenseitigen Beziehungen der an unserem Polygone sich im Gleichgewicht haltenden Kräfte. Zunächst ist klar, dass die Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ einerseits und die Spannungen $S_1 S_5$ in den beiden Enden des Seiles andererseits sich das Gleichgewicht halten müssen. Es muss deshalb die Mittelkraft P aus $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ gleich aber entgegengesetzt der Mittelkraft aus S_1 und S_5 sein. Ferner müssen sich die drei Kräfte $PS_1 S_5$, welche sich das Gleichgewicht halten, in einem Punkte o schneiden.

Durch diese letzte Wahrheit wird mittelst der Richtungen S_1 und S_5 die Lage der Mittelkraft P festgelegt, deren andere Werthe, nämlich die Grösse und Richtung, auf bekannte Weise durch das Kräftepolygon sich ergeben.

Allgemein würde unser Satz von den drei Kräften in seiner Anwendung auf das Seilpolygon folgende Fassung haben:

Die Mittelkraft P aller derjenigen Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ des Seilpolygones, welche zwischen irgend zwei Seiten (z. B. 1 und 5) angreifen, ist bestimmt: der **Lage** nach durch denjenigen Punkt o, in dem sich diese verlängerten Seiten 1 und 5 schneiden, ihrer **Grösse** und **Richtung** nach durch diejenige Diagonale des Kräftepolygones, welche diese Kräfte von den anderen abtrennt.

Beispiel 110: Für die Mittelkraft P_{123} aus den Kräften $P_1 P_2 P_3$ des Seilpolygones gilt nach der Fig. 337 der Durchschnittspunkt o' zwischen den Polygonseiten 1 und 4 und in dem Kräftepolygone die punktirte Diagonale P_{123}. (Näheres gibt der folgende Paragraph).

§ 261.

Das Verfahren, die Mittelkraft P aus den beliebigen Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ zu bestimmen, ist nun folgendes:

Füge die gegebenen Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ nach Grösse und Richtung (in beliebiger Reihenfolge) aneinander, so ist die Schlusslinie, welche noch zu ziehen ist, der Grösse und Richtung nach die Mittelkraft P (Siehe auch § 78). Mit Hülfe dieses Kräftepolygones erhält man nun auch das Seilpolygon, wenn man zunächst von den Ecken des Kräftepolygones nach einem beliebig gewählten Punkte O (Pol genannt) derselben Ebene Strahlen (Polstrahlen) $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$ zieht. Diese Strahlen ergeben dann sowohl die Richtungen der Seiten des Seilpolygones, welches man erhält, wenn man von Kraft zu Kraft Linien parallel zu

jenen Strahlen zieht; als auch durch ihre Längen die Grösse der Spannungen in diesen Seiten. Verlängert man schliesslich S_1 und S_5 bis zum Durchschnittspunkte o, so giebt dieser Punkt die Lage der durch das Kräftepolygon bestimmten Mittelkraft P an.

Kurz und bündig lässt sich also das Verfahren zur Bestimmung der Mittelkraft so zusammenfassen:

Man ermittele:

1. die Grösse und Richtung der Mittelkraft mit Hülfe des Kräftepolygones,
2. die Lage mit Hülfe des Seilpolygones.

Man pflegt das Kräftepolygon mit dem dazu gehörigen Seilpolygone den

Kräfteplan

zu nennen.

§ 262.

Gelenk-Stangen-Polygon. Halten an unserem Seile sich die vorhandenen Kräfte das Gleichgewicht, so wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert, wenn man die Seiten durch starre Stangen ersetzt denkt, welche in den Punkten $o_1 o_2 o_3 o_4 \ldots$ durch Gelenkbolzen so miteinander verbunden sind, dass eine Drehung der Stangen in der Ebene des Polygons möglich ist.

Auf diese Weise erhalten wir ein

„Gelenk-Stangen-Polygon“,

für welches genau dieselben Regeln wie für das Seilpolygon gelten.

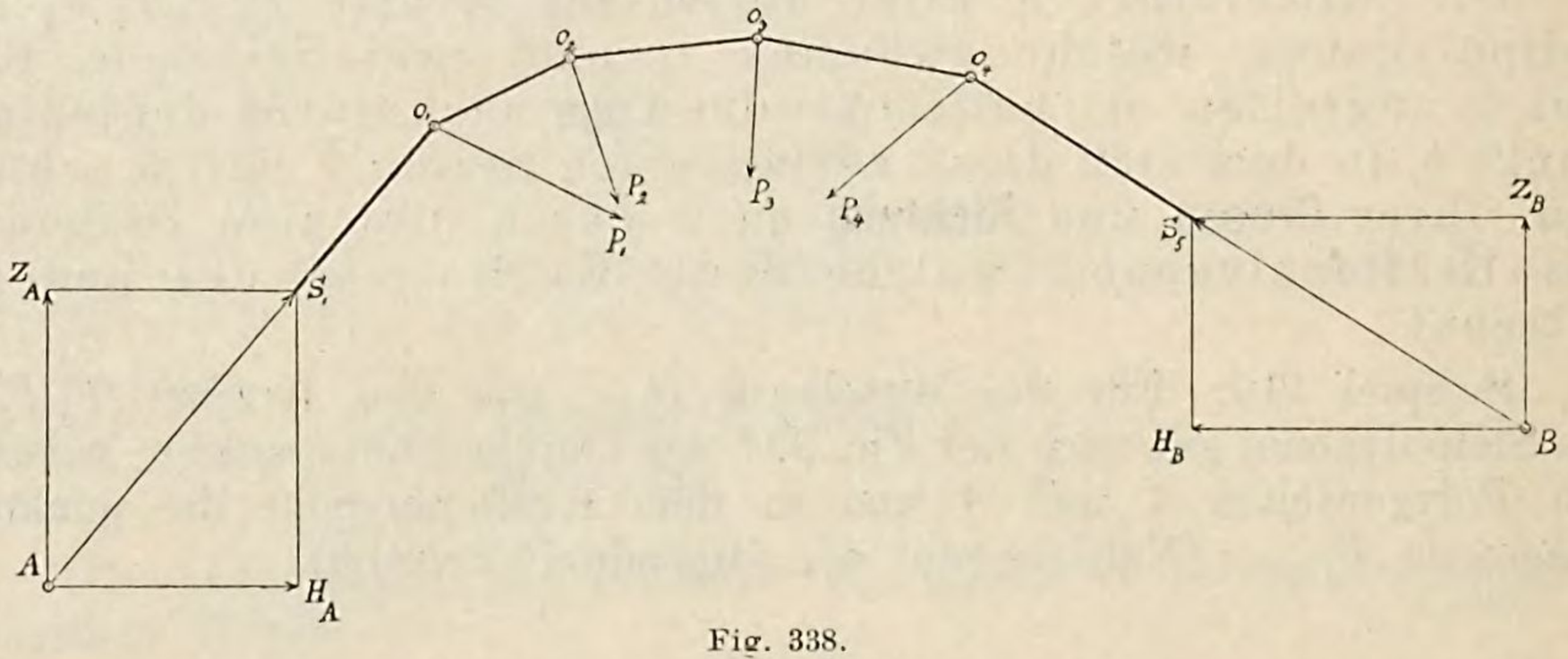


Fig. 338.

Das Gelenkpolygon ist noch einer wesentlichen Erweiterung der Anwendbarkeit fähig. Die Stangen können ausser Zugkräften auch Druckkräften widerstehen, so dass eine Wirkung der Kräfte, wie solche in Fig. 338 angegeben ist, durch unser Polygon aufgenommen werden kann. Stellt man schliesslich noch zwischen A und B eine starre Verbindung her, so würde man ein vollständig geschlossenes Gelenkpolygon erhalten, ähnlich wie man solche beim Dach- und Brückenbau verwendet.

§ 263.

Was hierüber von dem Seil- und Gelenkpolygon gesagt ist, lässt sich im wesentlichen auch auf jeden beliebig gestalteten festen Körper (Balken) über-

tragen, welcher durch die in derselben Ebene wirkenden Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ belastet und an seinen beiden Enden A und B unterstützt ist.

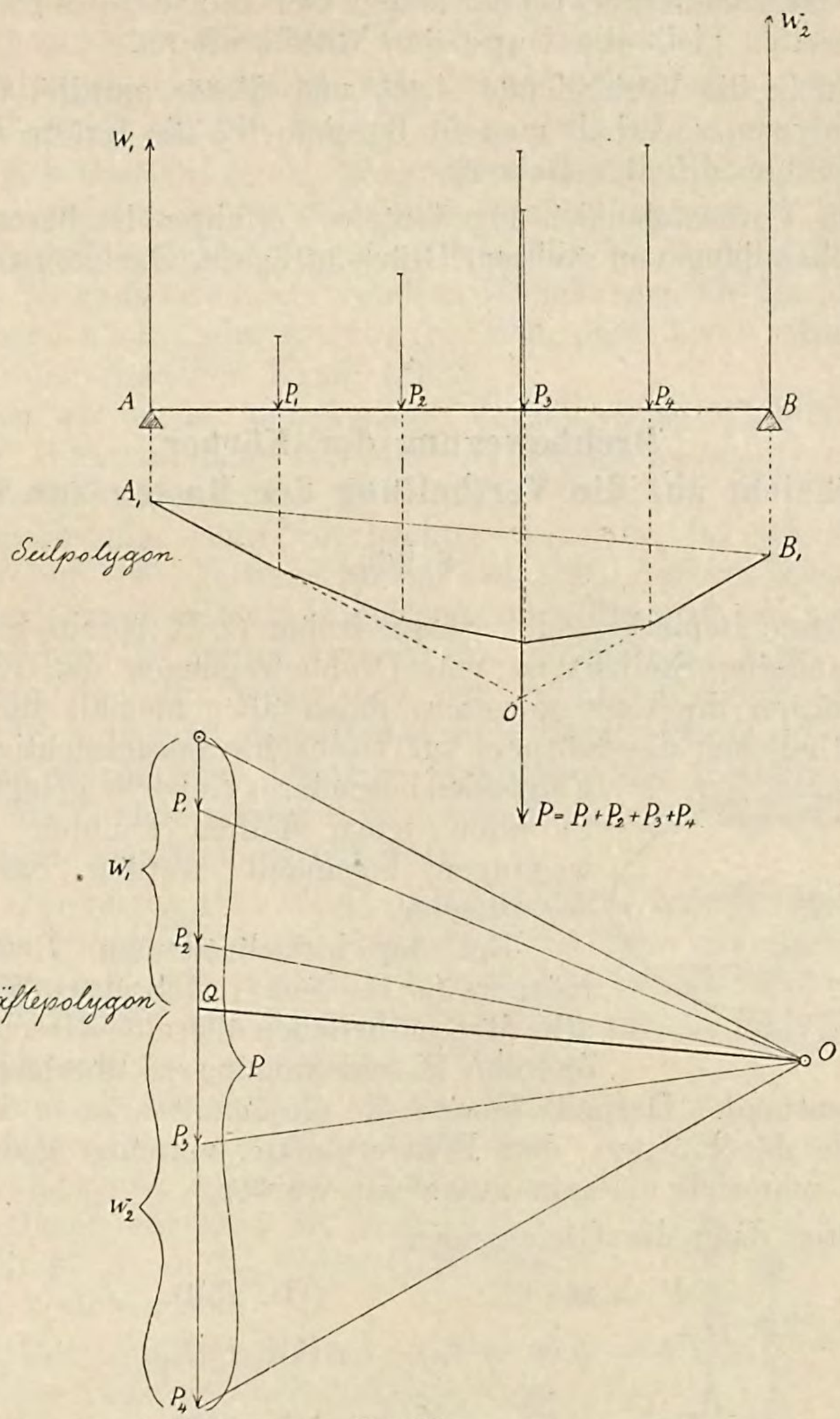


Fig. 339.

Für solchen Körper lässt sich, wie die Fig. 339 zeigt, in ganz derselben Weise von Kraft zu Kraft ein Polygon verzeichnen, welches auch in dieser Gestalt den Namen Seilpolygon (oder Stangen-Polygon) führt. Wir wollen uns möglichst an das anschliessen, was schon oben (§ 261) gesagt ist.

Verfahren: Füge die gegebenen Kräfte $P_1 P_2 \ldots$ (die hier sämmtlich lothrecht wirken) nach Grösse und Richtung aneinander, so ist die Schlusslinie (die hier mit den Kräften selbst zusammenfällt) der Grösse und Richtung nach die Mittelkraft $P = P_1 + P_2 + P_3 \ldots$ Hierauf ziehe man nach einem beliebigen Pole O hin die Polstrahlen.

Parallel diesen Polstrahlen sind dann die Seiten des Seilpolygones zu verzeichnen. Der Punkt A_1 liegt lothrecht unter A, sonst beliebig.

Der Durchschnittspunkt o der beiden von A_1 und B_1 auslaufenden End-Seilpolygonseiten giebt die Lage der Mittelkraft an.

Zieht man die Verbindende $A_1 B_1$ und dieser parallel die Linie OQ im Kräftepolygon, so erhält man in W_1 und W_2 die Kräfte in den Unterstützungspunkten AB des Balkens.

Das im Voranstehenden angedeutete Verfahren ist besonders nützlich auch bei Behandlung von Achsen, Brückenträgern, Dachkonstruktionen und dergleichen.

IV.

Drehbewegung der Körper, mit Rücksicht auf die Vertheilung der Massen zur Drehachse.

§ 264.

Einleitende Bemerkungen. Schon früher (z. B. bereits S. 25 § 7, und an vielen anderen Stellen) ist von Drehbewegungen der Körper, sowie von Drehkräften die Rede gewesen, dabei aber niemals die Vertheilung der Massentheilchen des Körpers zur Drehachse berücksichtigt, worauf im Folgenden besonderes Gewicht gelegt werden soll. In allen jenen Fällen konnten die Drehbewegungen behandelt werden wie die fortschreitenden.

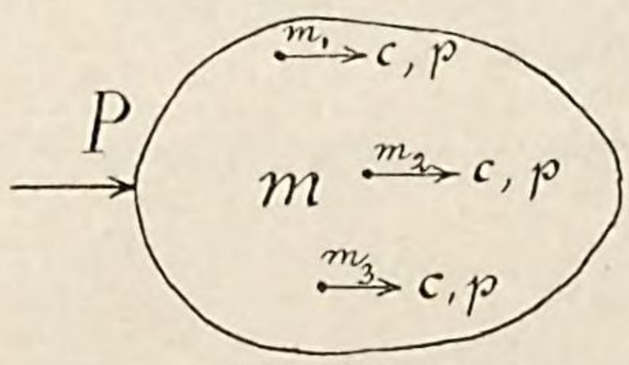


Fig. 340.

Bei der fortschreitenden Bewegung eines Körpers (z. B. dem Gestell eines Wagens) haben alle Massentheilchen dieselbe Geschwindigkeit c, dieselbe Beschleunigung p, überhaupt denselben Bewegungszustand. Deshalb konnte die Gesammtmasse m in einem einzigen Punkte des Körpers, dem Schwerpunkte, vereinigt gedacht und der Körper als materieller Punkt aufgefasst werden.

Es galten dann die Gleichungen:

$$P = m \cdot p \qquad \text{(Gl. 150)},$$

$$Pt = m\,(v - v_0) \qquad \text{(Gl. 152)},$$

$$Ps = m\left(\frac{v^2 - v^2{}_0}{2}\right) \qquad \text{(Gl. 156)},$$

$$P = \frac{mv^2}{r} = mrw^2. \qquad \text{(Gl. 202)}.$$

Dagegen ist bei einem in Drehung begriffenen Körper (z. B. den Rädern des Wagens) der Bewegungszustand der einzelnen Massentheilchen (der Nabe, der Arme, des Kranzes) je nach ihrer Entfernung von der Achse verschieden.

Durch Berücksichtigung der Vertheilung der Masse in Bezug auf die Drehachse werden wir auf einen ganz neuen Begriff, nämlich: das Trägheitsmoment (Näheres § 267 u. ff.) geführt.

Im Folgenden soll versucht werden, die Gleichungen der Drehbewegung möglichst auf die der fortschreitenden Bewegung zurückzuführen.

Hierbei darf nicht vergessen werden, was ebenfalls schon früher angedeutet wurde, dass bei jeder Drehbewegung:

1. Centralkräfte (Centripetal- und Centrifugalkräfte) auftreten (§ 112),
2. die Wirkung einer drehenden Kraft P durch das Kraftmoment $P \cdot l$ gekennzeichnet, also ebenfalls wesentlich durch die Entfernung der Kraftrichtung von der Drehachse bedingt ist (§ 160).

Es kann deshalb nicht befremden, dass die Gleichungen für die Drehbewegungen sich ganz besonders von den Gleichungen für die fortschreitenden Bewegungen noch dadurch unterscheiden, dass das Kraftmoment $P \cdot l$ an die Stelle der einfachen Kraft P tritt.

Versuchen wir wieder an bekannten Vorgängen zu schildern, wie man durch eigene Wahrnehmung von den bei Drehbewegungen auftretenden Kräften sich überzeugen kann.

Ein aufmerksamer Tänzer beobachtet, besonders bei schnellem Links-Herumdrehen auf sehr glattem Boden zunächst, dass er eine Drehkraft (ein Kräftepaar) erzeugen muss, damit er seine Tänzerin um sich, d. i. um seine Körperachse ZZ herum, im Kreise gleichförmig führt (Fig. 341). Hierbei kommt ihm die, wenn auch nur geringe Reibung zwischen den Sohlen seiner Schuhe und dem Boden zu statten. Denn auf vollkommen glattem Boden würde eine derartige Drehbewegung unmöglich sein.

Ist nun die Drehbewegung ermöglicht, so werden dadurch noch zwei Kraftäusserungen gleichsam wachgerufen:

1. Eine Centrifugalkraft P, also eine Einzelkraft, die im Schwerpunkte S der Tänzerin angreift. (Die fast symmetrisch um die Körperachse ZZ vertheilte Masse des Tänzers kommt nicht in Frage.) (Siehe auch §§ 265, 266.) Der Tänzer muss die Tänzerin deshalb genügend an sich ziehen, damit sie ihm nicht davonfliegt, wissenschaftlich ausgedrückt, er muss durch Anspannung seiner Armmuskeln eine Centripetalkraft erzeugen, die jener Centrifugalkraft gleich ist, wenn Gleichgewicht bestehen soll.
2. Diese Centrifugalkraft sucht den Tänzer nach der Tänzerin hinüberzukippen, indem sie wiederum das Kräftepaar $P \cdot l$ erzeugt. Ein ebenso grosses, aber entgegengesetztes Kräftepaar, muss der Tänzer durch genügendes Spreizen der Beine und Stemmen der Füsse gegen den Boden hervorbringen, wenn er seine Körperachse ZZ im Gleichgewicht erhalten will.

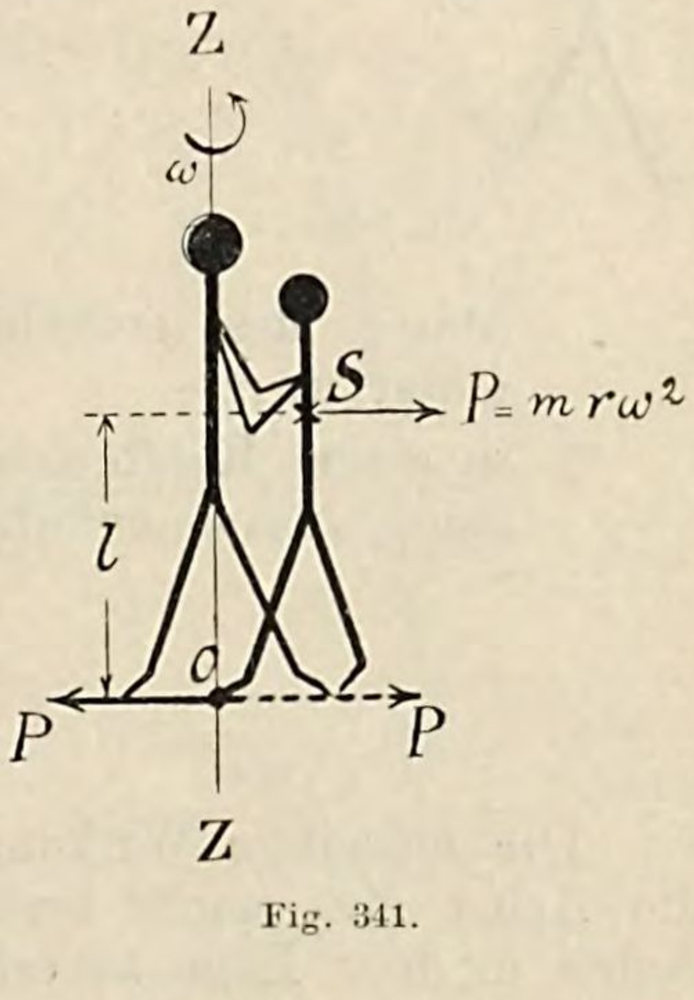


Fig. 341.

Wie das Kräftepaar s. z. s. ganz von selbst durch die Centrifugalkraft veranlasst wird, lässt sich leicht zeigen:

Man bringe in O zwei Kräfte an, die beide gleich und parallel der Centrifugalkraft P, aber einander entgegengesetzt gerichtet sind, so wird

dadurch (nach Fig. 174) nichts am Gleichgewicht geändert. Die punktirte Kraft P bildet sodann die Einzelkraft, die beiden anderen Kräfte bilden das erwähnte Kräftepaar. Wäre der Boden auf einmal vollkommen glatt, so würde dem Tänzer alles Spreizen und Stemmen nichts nützen, er würde mit sammt seiner Tänzerin in der Richtung der punktirten Kraft fortgleiten und mit dem Tanzen wäre es aus. Es ist dieses Beispiel schon deshalb etwas ausführlicher geschildert, weil so an einem beliebig herausgegriffenen Bewegungsvorgange gelehrt wird, wie wichtig noch die „Reibung“ ist, auf die wir bald näher eingehen werden.

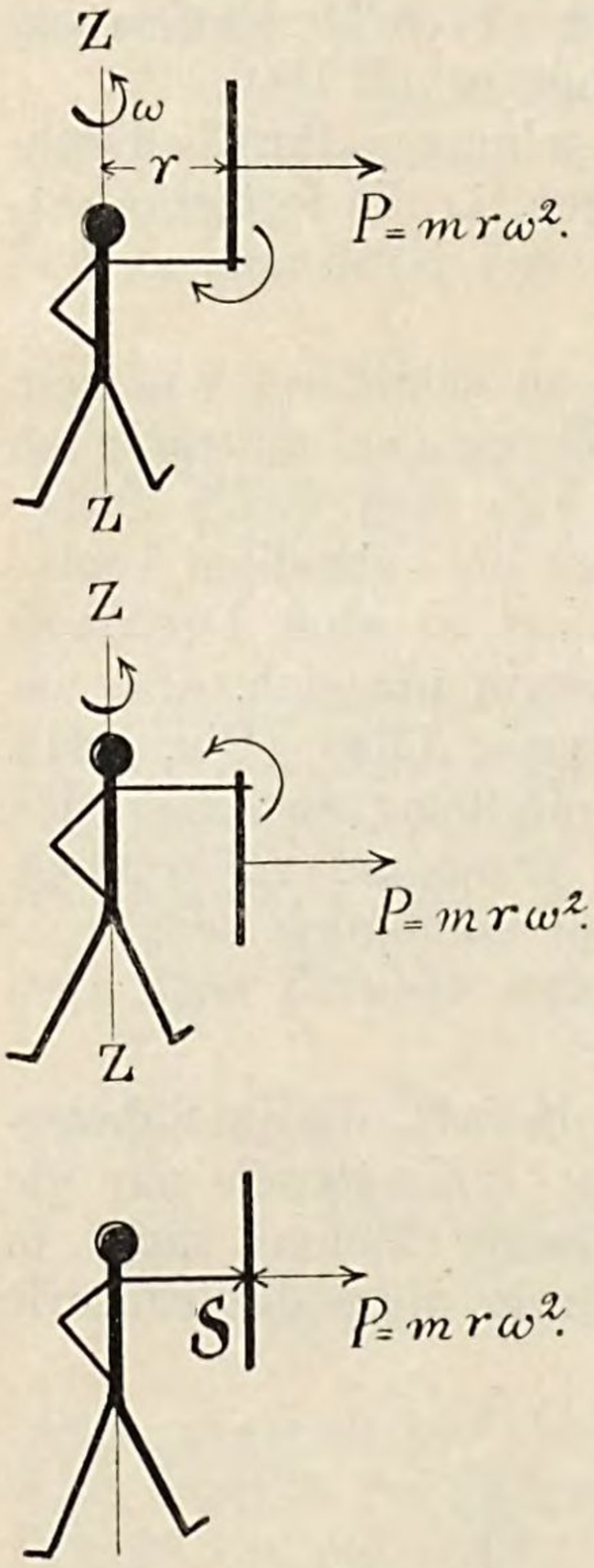


Fig. 342.

Wer noch auf sehr einfache Weise sich von der Wirkung des Kräftepaares $P \cdot l$ überzeugen will, halte bei wagerechtem Arme, wie es nebenstehende Figuren 342 andeuten, einen am unteren oder oberen Ende erfassten Stock oder Regenschirm, besser aber noch einen schweren eisernen Stab, lothrecht und drehe sich damit möglichst schnell um seine Körperachse ZZ im Kreise herum. Der Beobachter fühlt dann, wie das Handgelenk nach aussen hin umgekippt wird. Wird dagegen der Stab im Schwerpunkt S erfasst, so findet eine Drehung des Handgelenkes nicht statt.

Was im Vorausstehenden an bestimmten Bewegungsvorgängen klar zu machen versucht ist, gilt ganz allgemein:

Die Gesammtwirkung bei jeder Drehbewegung besteht in zwei Kraftwirkungen, denen die Achse des sich drehenden Körpers zu widerstehen hat, wenn sie sich im Gleichgewichte erhalten soll:

1. in einer Einzelkraft P (Centrifugalkraft, Centripetalkraft), deren

   Grösse, Richtung und Lage

   zu bestimmen ist, wie wenn die Gesammtmasse des gedrehten Körpers in dessem Schwerpunkte vereinigt wäre,
2. in einem Kräftepaare $P \cdot l$, dessen Wirkungsebene mit der Drehachse zusammenfällt.

§ 265.

Freie Achse.

Die einseitige Wirkung der Kraft P und des Kräftepaares $P \cdot l$ auf die Achse ZZ macht bestimmte Widerstandskräfte erforderlich, um die Achse in ihrer Lage zu erhalten.

Wäre dagegen die Masse des in Drehung versetzten Körpers derart um die Achse vertheilt, dass

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ P \cdot l &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 462$$

ist, so würde die Achse durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, keinen einseitigen Druck erleiden und ihre Lage frei im Raume behaupten, falls sie, nur in einem Punkte unterstützt, gegen Fallen gesichert ist. Solche Achsen heissen „freie Achsen“ und sind z. B. vorhanden bei allen homogenen, sogen. Rotationskörpern (Kreisel). Nachweisbar sind übrigens in jedem Körper drei freie Achsen, die sich rechtwinklig im Schwerpunkt schneiden, vorhanden. In den weitaus meisten Fällen der Technik sollen die Drehachsen freie Achsen sein: z. B. bei den Schwungrädern, überhaupt bei den Rädern, so auch bei den Turbinen, Ventilatoren, Schleudermühlen, Centrifugen, Schwungkugelregulatoren mit den beiden an der Drehachse symmetrisch aufgehängten Schwungkugeln (Centrifugalpendeln). Ueberhaupt muss der Techniker die Achsen der Räder um so „freier“ machen, je rascher sich letztere drehen sollen.

§ 266.

Im Vorausstehenden wurde ein rein praktisches Verfahren eingeschlagen. Im Folgenden soll die Drehbewegung der Körper noch auf theoretischem Wege kurz behandelt werden.

Die früher (§ 176) für den allgemeinsten Fall angestellten Betrachtungen müssen auch für den hier vorliegenden besonderen Bewegungsvorgang gelten.

Um die sechs Bedingungs-Gleichungen zu erhalten, verfahre man hier wie dort:

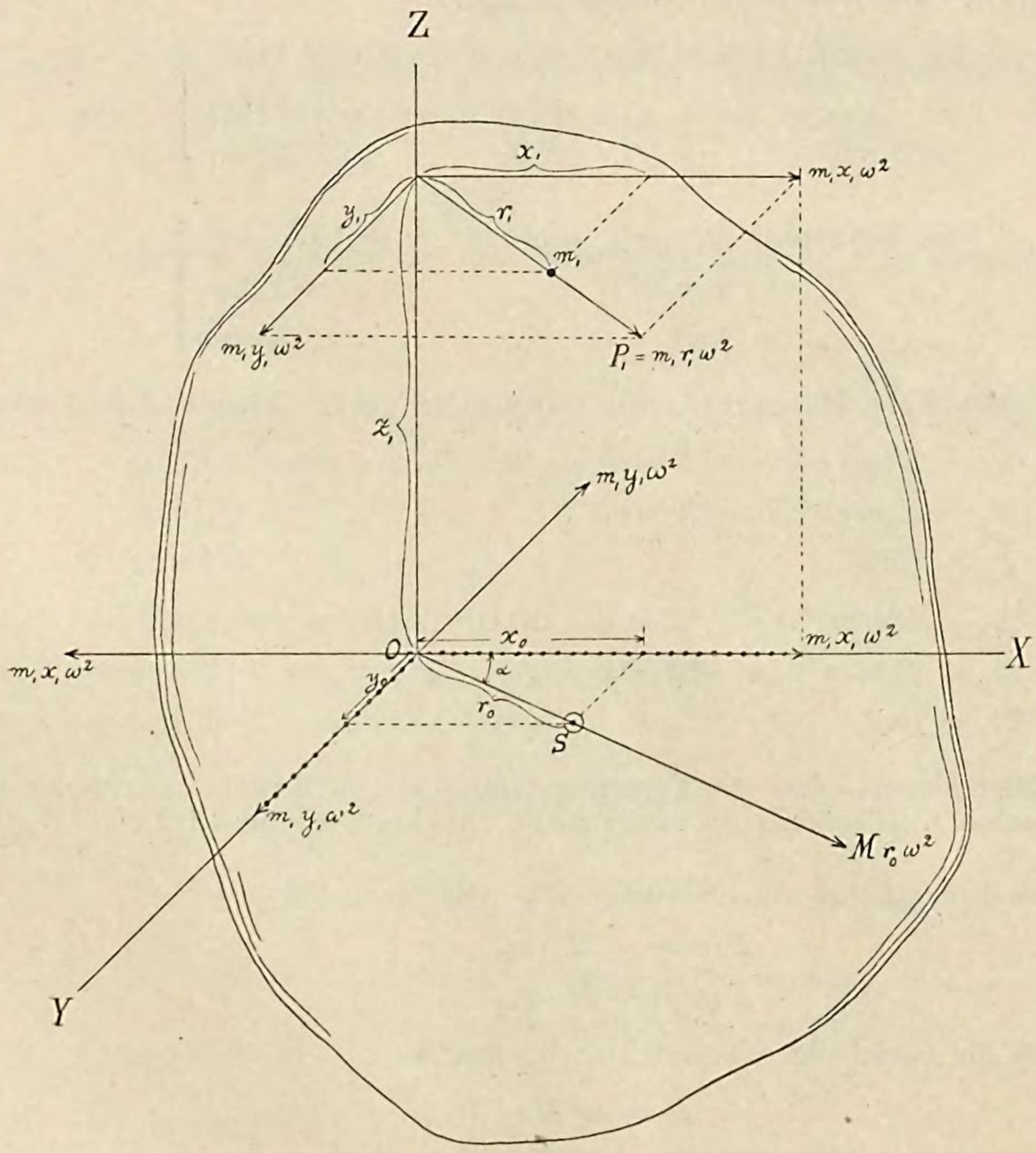


Fig. 343.

Man lege (Fig. 343) durch den Körper ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem; jedoch der Einfachheit wegen so, dass die Z-Achse mit der Drehachse des Körpers, der Schwerpunkt S mit der XY-Ebene zusammenfällt. Dann ist zunächst die Lage des Schwerpunktes bestimmt durch die Gleichungen:

$$OS = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 463$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{y_0}{x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 464$$

Bei der Drehung beschreibt jedes Massentheilchen, also auch m_1 eine Kreisbahn, die senkrecht zur Drehachse Z steht. Die Winkelgeschwindigkeit sei w.

Für m_1, dessen Lage durch die Entfernung r_1 von der Drehachse und durch die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$ bestimmt sein mag, ist die Centrifugalkraft:

$$P_1 = m_1 r_1 w^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 465$$

Dieselbe verläuft durch die Z-Achse.

Um die Einwirkung auf das Achsensystem kennen zu lernen, zerlege man die Kraft nach den drei Achsen, und erhält sodann:

$$\left.\begin{array}{rl} m_1 x_1 w^2 & \text{als Antheil in der Richtung der } X\text{-Achse,} \\ m_1 y_1 w^2 & \text{„ „ „ „ „ „ } Y\text{-Achse,} \\ \text{Null} & \text{„ „ „ „ „ „ } Z\text{-Achse.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 466$$

Bringt man nun, wie die Figur zeigt, in O je zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $m_1 x_1 w^2$ und $m_1 y_1 w^2$ an, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{die (punktirte) Einzelkraft } & m_1 x_1 w^2 \text{ in der } X\text{-Achse,} \\ \text{„ „ „ } & m_1 y_1 w^2 \text{ „ „ } Y\text{-Achse,} \\ \text{die Kraft } & \text{Null „ „ } Z\text{-Achse;} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 467$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{das Kräftepaar } & m_1 x_1 w^2 z_1 \text{ drehend um die } Y\text{-Achse,} \\ \text{„ „ } & m_1 y_1 w^2 z_1 \text{ „ „ „ } X\text{-Achse,} \\ \text{„ „ } & \text{Null „ „ „ } Z\text{-Achse.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 468$$

Für sämmtliche Massentheilchen, also für den ganzen Körper, erfolgt dann:

1. $P_x = \Sigma(m x w^2) = w^2 \Sigma(m x)$ als Einzelkraft in der X-Achse 469
2. $P_y = \Sigma(m y w^2) = w^2 \Sigma(m y)$ „ „ „ „ Y-Achse 470
3. $P_z =$ Null „ „ „ „ Z-Achse 471
4. $\mathfrak{M}_x = \Sigma(m y w^2 z) = w^2 \Sigma(m y z)$ als Drehkraft um die X-Achse . . . 472
5. $\mathfrak{M}_y = \Sigma(m x w^2 z) = w^2 \Sigma(m x z)$ „ „ „ „ Y-Achse . . . 473
6. $\mathfrak{M}_z =$ Null „ „ „ „ Z-Achse . . . 474

Es folgt hieraus, dass die Centrifugalkräfte keinen Kraftantheil in der Richtung der Drehachse Z (Gleichung 3), ferner keine Drehkraft um die Drehachse Z (Gleich. 6) liefern.

Da nach der Lehre vom Schwerpunkte (Gleichung 334):

$$\Sigma(m x) = M \cdot x_0,$$
$$\Sigma(m y) = M \cdot y_0,$$

lassen sich die Gleichungen 1 und 2 auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} P_x = w^2 M x_0 \\ P_y = w^2 M y_0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 475$$

Durch Zusammensetzung ergiebt sich als **Mittelkraft:**

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = w^2 M \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \text{(Grösse)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 476$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{P_y}{P_x} = \frac{w^2 M y_0}{w^2 M x_0} = \frac{y_0}{x_0} \quad \text{(Richtung)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 477$$

Da oben (Gl. 464) für die Lage des Schwerpunktes dieselbe Gleichung sich ergab, so folgt der wichtige Satz, dass die Mittelkraft sämmtlicher Centrifugalkräfte im Schwerpunkte des Körpers angreift und auch ausgedrückt ist durch:

$$P = M \cdot r_0 \cdot w^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 478$$

Als resultirende Drehkraft ergiebt sich:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_z^2} = w^2 \sqrt{[\Sigma(myz)]^2 + [\Sigma(mxz)]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 479$$

Für $P = O$ und $\mathfrak{M} = O$ ist die Drehachse eine „freie Achse“. Die Centrifugalkräfte halten sich schon allein im Gleichgewicht.

Die Gleichung $P = O$ führt auf die Gleichungen $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $r_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt in der Drehachse.

Die Gleichung $\mathfrak{M} = O$ führt auf die Gleichungen $\Sigma(myz) = 0$; $\Sigma(mxz) = 0$.

A.

Satz von der Winkelbeschleunigung

oder

Beziehungen zwischen Kraftmoment *Pl*, Trägheitsmoment *J* und Winkelbeschleunigung ε der Körper.

§ 267.

Um dem Massentheilchen m_1 die Beschleunigung p_1 zu ertheilen, ist die Kraft:

$$k_1 = m_1 p_1$$

dagegen zur Erzeugung der Drehung um die Achse O das Kraftmoment:

$$\begin{aligned} k_1 r_1 &= m_1 p_1 r_1, \\ &= m_1 \varepsilon \cdot r_1 \cdot r_1, \\ &= \varepsilon \cdot m_1 r_1^2 \end{aligned}$$

erforderlich (Fig. 344), wenn mit ε die Winkelbeschleunigung, d. i. die Bogenzunahme in 1 Sekunde in der Entfernung 1 von der Drehachse, bezeichnet wird. Um demnach sämmtliche Massentheilchen $m_1 m_2 m_3 \ldots$ des Körpers zu beschleunigen, ist das Gesammtkraft-Moment der äusseren Drehkräfte:

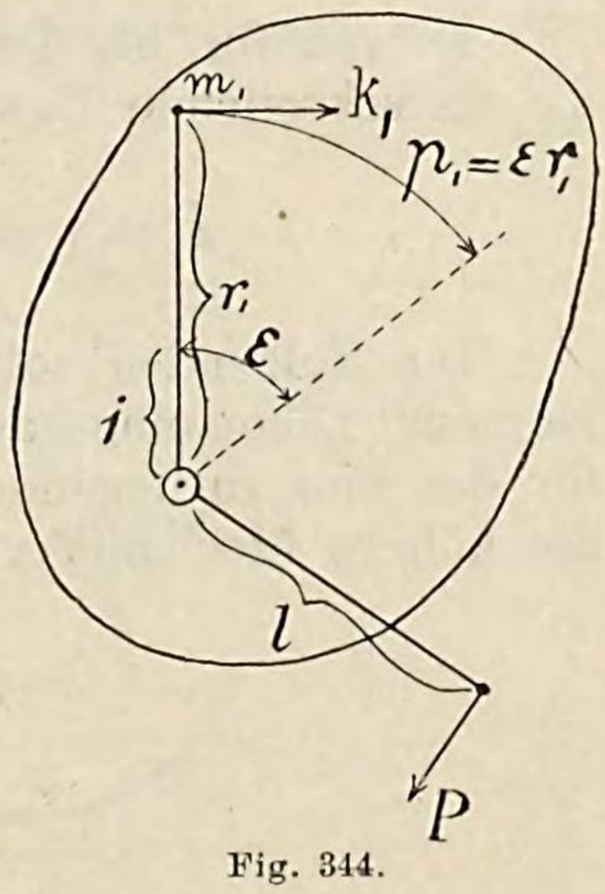


Fig. 344.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = Pl = k_1 r + k_2 r_2 + \ldots &= m_1 p_1 r_1 + m_2 p_2 r_2 + \ldots, \\ &= \varepsilon m_1 r_1^2 + \varepsilon m_2 r_2^2 + \ldots, \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathfrak{M} = P \cdot l = \varepsilon \Sigma (m r^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 480$$

erforderlich.

Das **Produkt** mr^2, d. i. das Produkt aus m, der Masse eines Theilchens und dem Quadrate seiner Entfernung r von der Drehachse, heisst (nach Euler 1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Theilchens in Bezug auf diese Achse.

$\Sigma\,(mr^2)$, d. i. die Summe der Produkte aus sämmtlichen Massentheilchen des Körpers und den Quadraten der zugehörigen Entfernungen dieser Massentheilchen von der Drehachse ist das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf diese Achse. Bezeichnen wir dasselbe kurz mit J, setzen also:

$$\boxed{J = m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + \ldots = \Sigma\,(mr^2)} \quad \ldots\ldots 481$$

so geht obige Gleichung über in:

$$1.\ \mathfrak{M} = P \cdot l = \varepsilon \cdot J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 482$$

Kraftmoment = Winkelbeschleunig. $\times$ *Trägheitm.*

oder:

$$\boxed{P = \frac{\varepsilon \cdot J}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 483$$

Diese Gleichung kann zur Bestimmung (zum Messen. Siehe § 83) der beschleunigenden Kraft benutzt werden.

Ferner folgt:

$$2.\ \varepsilon = \frac{Pl}{J} = \frac{\mathfrak{M}}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 484$$

$$3.\ J = \frac{Pl}{\varepsilon} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 485$$

Diesen für die Drehbewegung wichtigen Sätzen entsprechen die für die fortschreitende Bewegung gültigen Formeln (§ 69):

$$1.\ P = pm; \qquad 2.\ p = \frac{P}{m}; \qquad 3.\ m = \frac{P}{p}.$$

Im Folgenden soll nun zunächst auf den neuen Begriff „Trägheitsmoment“ näher eingegangen, aber davon nur so viel behandelt werden, wie für das hier vorliegende Bedürfniss erforderlich ist. Im übrigen muss auf die höhere Mechanik verwiesen werden.

Vom Trägheitsmomente.

§ 268.

Einleitende Bemerkungen. Die Trägheitsmomente sind nicht nur bei den Drehbewegungen der Körper, sondern auch für die Lehre von der Festigkeit der Körper von hoher Bedeutung.

Stets ist bei dem Trägheitsmomente eines Körpers, ebenso wie bei einem statischen Momente einer Kraft, an eine bestimmte Drehachse zu denken, auf welche dasselbe bezogen ist.

§ 269.

Allgemeine Sätze.

1. Ist das Trägheitsmoment J eines Körpers K in Bezug auf eine Achse O bekannt, so lässt sich dasselbe ersetzen durch das Trägheitsmoment einer in einem einzigen Punkte vereinigt gedachten Masse m, die dann aber in einer solchen bestimmten Entfernung r von der Achse angebracht sein müsste, dass der Gleichung genügt wird:

$$\left.\begin{aligned} J &= m r^2 \\ r &= \sqrt{\frac{J}{m}} \\ m &= \frac{J}{r^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 486$$

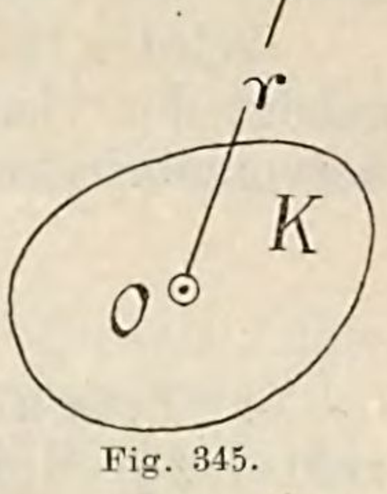


Fig. 345.

Man nennt r den Trägheitsarm für die gleichwerthige Masse m, und m selbst die auf den Arm r reducirte Masse des Körpers.

Ist m die wirkliche Masse des Körpers, so heisst auch wohl r der Trägheitshalbmesser des Körpers. Ferner nennt man den Mittelpunkt der Trägheit denjenigen Punkt, in dem die wirkliche Masse m des Körpers vereinigt gedacht werden müsste, wenn dasselbe Trägheitsmoment J sich ergeben sollte, wie es die über den ganzen Körper vertheilte Masse ergiebt.

§ 270.

2. Man kann auch das Trägheitsmoment eines Körpers als Masse M_1 auffassen, die in der Entfernung 1 von der Drehachse angebracht werden müsste, um dieselbe Wirkung zu erzielen, wie die in Wirklichkeit im Körper vertheilte Masse M. Diese Masse ergiebt sich aus der Gleichung:

$$J = M_1 1^2 = M_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 487$$

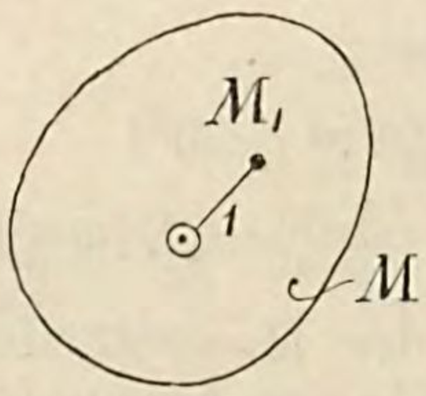


Fig. 346.

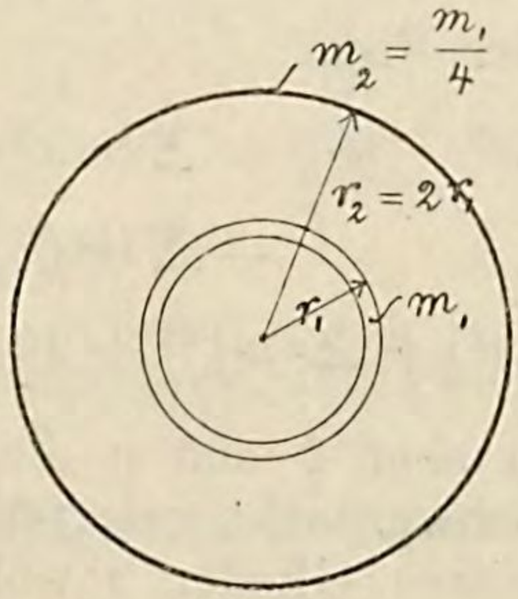


Fig. 347.

§ 271.

3. Vergleich zweier Massen miteinander.

Sollen die beiden Massen m_1 und m_2 in den Entfernungen r_1 und r_2 von der Achse genau dieselbe Wirkung haben, so müssen sie den Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} J &= m_1 r_1^{\,2} = m_2 r_2^{\,2} \\ \frac{m_1}{m_2} &= \frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 488$$

Zwei in Bezug auf eine Achse gleichwerthige Massen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dieser Drehachse.

Wird z. B. der Halbmesser r eines Schwungradringes verdoppelt, so genügt der vierte Theil der Masse (des Gewichtes), um dieselbe Wirkung hervorzubringen.

§ 272.

4. Trägheitsmoment J in Bezug auf eine Achse, welche parallel der Schwerpunktsachse läuft.

J_S sei das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S gelegte Achse (Fig. 348). Es soll das Trägheitsmoment J gefunden werden in Bezug auf eine Achse Z, welche parallel der S-Achse verläuft. Die Entfernung der beiden Achsen sei e.

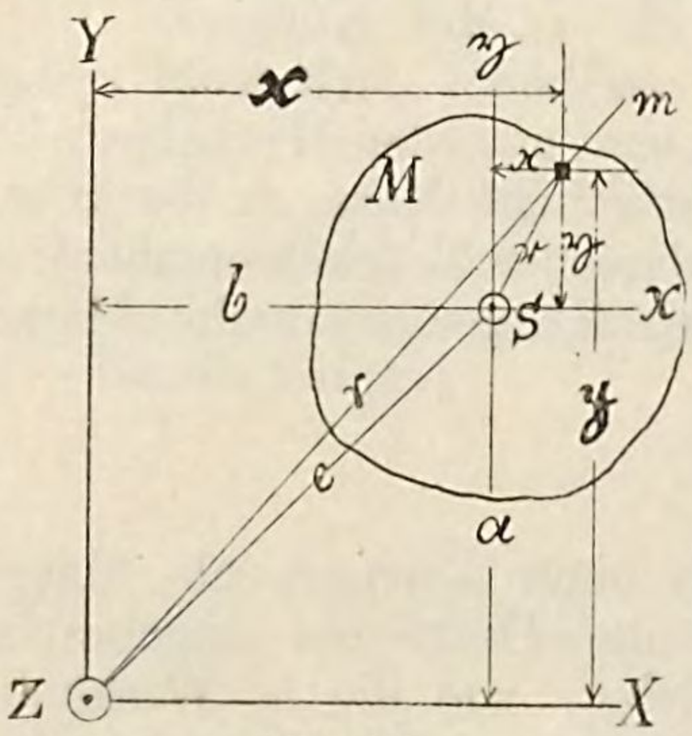


Fig. 348.

Man ziehe durch Z und S die rechtwinkelig zueinander stehenden, gleichlaufenden Achsen YX und $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$; sodann ist das Trägheitsmoment irgend eines in der Entfernung r von der Z-Achse befindlichen Massentheilchens m:

$$mr^2,$$

somit das Trägheitsmoment der ganzen Körper:

$$J = \Sigma\,(mr^2),$$

oder nach der Figur:

$$J = \Sigma\,(m(x^2 + y^2)) = \Sigma\,(mx^2) + \Sigma\,(my^2),$$

$$= \Sigma\,(m(b + \mathfrak{x})^2) + \Sigma\,(m(a + \mathfrak{y})^2),$$

$$= \Sigma\,(mb^2) + \Sigma\,(m\mathfrak{x}^2) + 2b\,\Sigma\,(m\mathfrak{x}) + \Sigma\,(ma^2) + \Sigma\,(m\mathfrak{y}^2) + 2a\,\Sigma\,(m\mathfrak{y}).$$

Da nun aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Abstände der Massentheilchen von den durch den Schwerpunkt gelegten Achsen sind, also genau ebensoviel negative als positive Glieder sowohl von der Form $m\mathfrak{x}$ als auch von der Form $m\mathfrak{y}$ in den betreffenden Summen vorkommen müssen, so sind die Ausdrücke:

$$2b\,\Sigma\,(m\mathfrak{x}) = 0,$$

$$2a\,\Sigma\,(m\mathfrak{y}) = 0;$$

fallen also fort und es bleibt über, wenn zugleich die Summanden zweckmässiger geordnet werden:

$$J = \Sigma(mb^2) + \Sigma(ma^2) + \Sigma(m\mathfrak{x}^2) + \Sigma(m\mathfrak{y}^2)$$
$$J = \Sigma(m(b^2 + a^2)) + \Sigma(m(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2))$$
$$J = \Sigma(me^2) + \Sigma(m \cdot \mathfrak{r}^2)$$
$$J = \Sigma(m) \cdot e^2 + \Sigma(m\mathfrak{r}^2).$$

Nun ist aber $\Sigma\,(m) = M$ die ganze Masse des Körpers und $\Sigma\,(m\mathfrak{r}^2)$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse S, also zugleich J_S. Obige Gleichung geht also über in

$$\boxed{J = Me^2 + J_S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 489$$

und heisst in Worten:

Das Trägheitsmoment J eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmomente J_S, bezogen auf eine ihr parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Achse, vermehrt um Me^2, d. i. um das Produkt aus der Masse M des Körpers und das Quadrat der Entfernung beider Achsen voneinander.

Dieser Satz gilt ganz allgemein, also auch für Platten (Flächen) und Stäbe (Linien). —

§ 273.

5. Das sogen. polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche (Platte).

Hierunter versteht man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine senkrecht zur Fläche stehende Achse (Polachse).

Von den drei senkrecht zueinander stehenden Achsen XYZ stehe Z senkrecht zur ebenen Fläche E, dann ist nach Fig. 349 in Bezug auf die Z-Achse das Trägheitsmoment eines Theilchens m:

$$m \cdot r^2,$$

also das Trägheitsmoment der ganzen Fläche in Bezug auf Z:

$$J_z = \Sigma(mr^2)$$
$$= \Sigma(m[x^2 + y^2])$$
$$= \Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2).$$

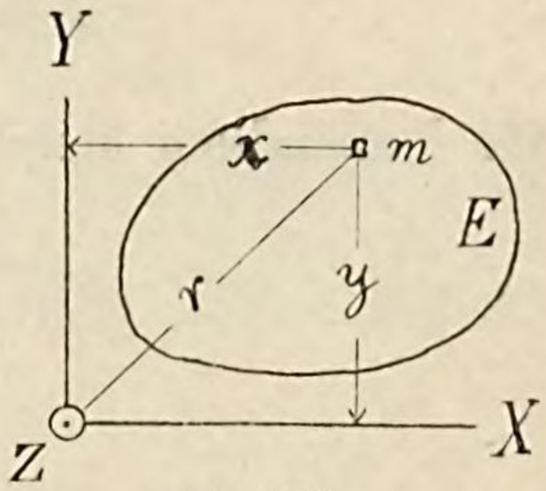


Fig. 349.

Da nun aber $\Sigma\,(mx^2)$ das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf Y,

$\Sigma\,(my^2)$ das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf X, so gilt:

$$\boxed{J_z = J_y + J_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 490$$

D. h. es ist das polare Trägheitsmoment J_z einer Platte (Ebene) in Bezug auf die Polachse Z gleich der Summe der Trägheitsmomente derselben Platte in Bezug auf zwei Achsen X und Y, die in der Ebene der Platte liegen und sich rechtwinkelig in der Polachse Z schneiden.

Trägheitsmomente von regelmässigen Gebilden.

§ 274.

Linien.

Trägheitsmoment einer geradlinigen prismatischen Stange (Linie) in Bezug auf eine Achse OO, mit welcher sie den Winkel a einschliesst.

Es sei die Masse gleichmässig über die Stange von der Länge L vertheilt,

$\gamma =$ Masse der Längen-Einheit,
$m = \gamma l$ die Masse der Länge l,
$M = \gamma L$ „ „ „ ganzen Länge L; ferner
$L = nl$.

Zunächst ist für ein beliebiges Massentheilchen m in der Entfernung r von der Achse OO das Trägheitsmoment:

$$m r^2,$$

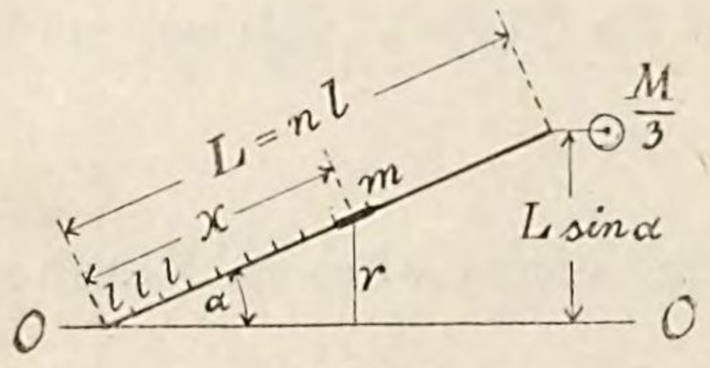


Fig. 350.

also für die ganze Stange das Trägheitsmoment:

$$J = \Sigma (m r^2)$$
$$= \Sigma (\gamma l \cdot x^2 \sin^2 a),$$

oder wenn die Konstanten vor das Summenzeichen gesetzt werden:

$$= \gamma \cdot \sin^2 a \, \Sigma (l x^2).$$

Die höhere Mechanik weist nach, dass:

$$\Sigma (l x^2) = \frac{L^3}{3} \text{ *)},$$

für l unendlich klein. Folglich ist das Trägheitsmoment der Stange:

$$\left.\begin{aligned} J = \gamma \sin^2 a \, \frac{L^3}{3} &= \frac{\gamma L}{3} (L \sin a)^2 \\ &= \frac{M}{3} (L \sin a)^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 491$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Stange ist also gleichwerthig dem Trägheitsmomente der Masse $\frac{M}{3}$, welche im Endpunkte der Stange angebracht ist.

Man nennt $\frac{M}{3}$ die auf den Endpunkt der Stange reducirte Masse der Stange. (Man könnte nach dem Früheren die Masse auch auf eine beliebige andere Entfernung von der Drehachse reduciren.)

---

*) Es lässt sich auch ohne höhere Mechanik der Nachweis der Richtigkeit dieses Ausdruckes finden, aber auf umständliche Weise. Es ist deshalb vorgezogen, hier und im Folgenden auf die höhere Mechanik zu verweisen.

Es ist danach $\left(\frac{M}{3}\right)$ diejenige Masse, welche im Endpunkte der Stange vereinigt, dieselbe Wirkung bei der Drehung giebt, als die in Wirklichkeit gleichförmig über die ganze Länge L vertheilte Masse.

§ 275.

Für $a = 90$, also $\sin a = 1$ ist:

$$J = \gamma \frac{L^3}{3} = \frac{M}{3} \cdot L^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 492$$

Beispiel 111: Ein gusseisernes Schwungrad hat 10 Arme, jeder der nahezu prismatischen Arme wiegt 100 kg und hat eine Länge $L = 3$ m.

Wie gross ist das Trägheitsmoment der Arme? und welches Arbeitsvermögen wohnt in denselben, wenn das Rad $n = 50$ Umdrehungen in 1 Minute ausführt?

Für jeden Arm ist das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{\frac{100}{9{,}81}}{3} \cdot 3^2 = 30{,}581;$$

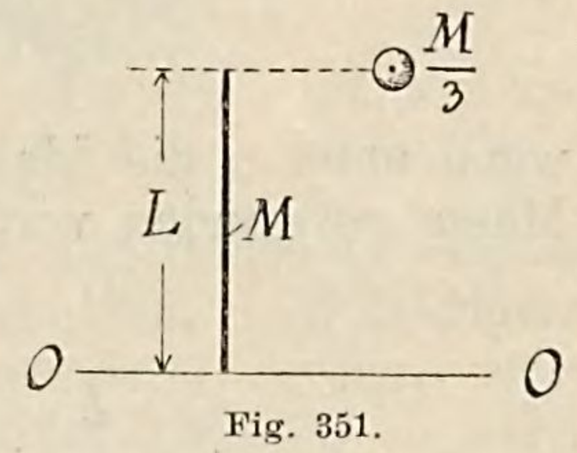


Fig. 351.

das Arbeitsvermögen:

$$A_1 = \frac{w^2}{2} \cdot J$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50}{60}\right)^2 \cdot 30{,}581 = 418{,}76 \text{ mkg},$$

für sämmtliche 10 Arme ist sonach das Arbeitsvermögen:

$$10\, A_1 = 4187{,}6 \text{ mkg}.$$

Wird angenommen, dass das Gewicht des Schwungringes 4000 kg, und der Halbmesser des Schwungringes genau genug $L = 3$ m ist, so beträgt das Arbeitsvermögen des in Drehung begriffenen Schwungringes:

$$A_2 = \frac{1}{2} w^2 \cdot M \cdot L^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50}{60}\right)^2 \cdot \frac{4000}{9{,}81} \cdot 3^2 = 50251{,}40 \text{ mkg}.$$

Das Arbeitsvermögen des Schwungringes und der 10 Arme ist bei $n = 50$ Umdrehungen in 1 Minute somit:

$$A = A_1 + A_2 = 54439{,}0 \text{ mkg}.$$

Würde die Schwungmasse in 1 Sekunde zur Ruhe gebracht, so würde sie eine Wirkung von

$$N = \frac{54439{,}0}{75} = 726 \text{ Pferdekräften}$$

äussern.

§ 276.

Flächen (Platten).

1. Trägheitsmoment einer rechteckförmigen (Fläche*) bezw.) homogenen Platte, deren eine Seite mit der Drehachse OO zusammenfällt.

Gleitet die Stange L der vorhergehenden Figur parallel ihrer ersten Lage längs der Achse OO entlang, so beschreibt sie eine (Fläche) Platte von der Breite b (Fig. 352). Das Trägheitsmoment ist somit nach der obigen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} J = \gamma^{**}) \frac{b L^3}{3} &= \frac{\gamma b L}{3} L^2 \\ &= \frac{M}{3} L^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 493$$

und die auf den Arm L reducirte Masse:

$$\frac{J}{L^2} = \frac{M}{3},$$

wenn unter γ die Masse der Flächen-Einheit und unter M die Gesammt-Masse verstanden wird.

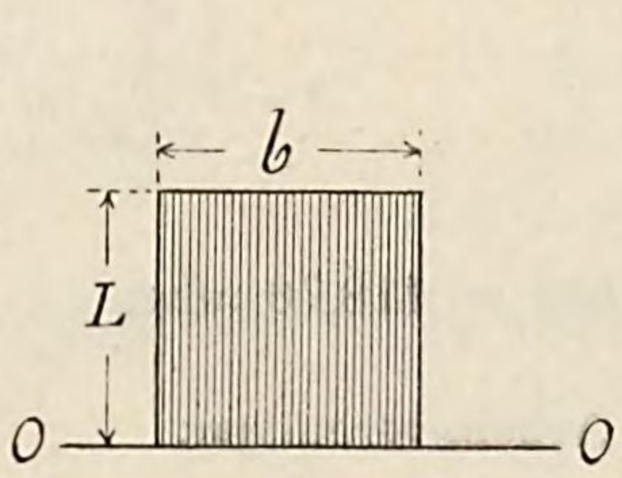


Fig. 252.

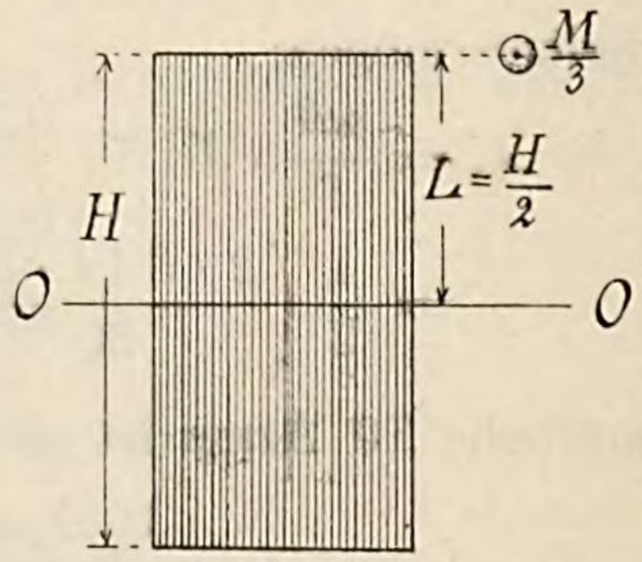


Fig. 253.

Fügt man unterhalb der Achse OO noch eine gleiche, zweite Platte hinzu (Fig. 353), so ergiebt sich als Trägheitsmoment:

$$J = 2 \frac{\gamma b L}{3} L^2,$$

oder wenn man die Höhe der ganzen Platte mit $H = 2L$ bezeichnet, also $L = \frac{H}{2}$ einführt:

$$J = 2 \frac{\gamma b H^3}{3 \cdot 8} = \frac{\gamma b H^3}{12} = \frac{\gamma b H}{12} H^2 = \frac{M}{3} \left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad \ldots \quad 494$$

---

*) Die Trägheitsmomente von Flächen sind u. a. für die Festigkeitslehre von grosser Bedeutung.

**) Handelt es sich, wie z. B. in der Festigkeitslehre, um das Trägheitsmoment einer geometrischen Fläche, so fällt hier γ ganz fort, so dass für eine solche

$$J = \frac{b L^3}{3} \text{ ist.}$$

2. Trägheitsmoment einer rechteckförmigen homogenen Platte, deren eine Seite parallel zur Achse *OO* verläuft, aber um *l* von letzterer absteht (Fig. 354):

$$J = \frac{\gamma b L^3}{3} - \frac{\gamma b l^3}{3} = \frac{\gamma b}{3}(L^3 - l^3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 495$$

3. Trägheitsmomente von Platten, welche aus rechteckförmigen homogenen Platten zusammengesetzt sind:

$$J = \frac{\gamma B H^3}{12} - \frac{\gamma b h^3}{12} = \frac{\gamma}{12}(BH^3 - bh^3) \text{ (Fig. 355)} \quad . \quad 496$$

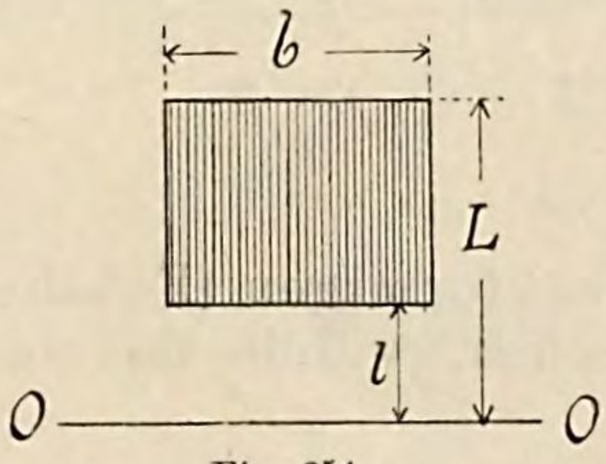


Fig. 354.

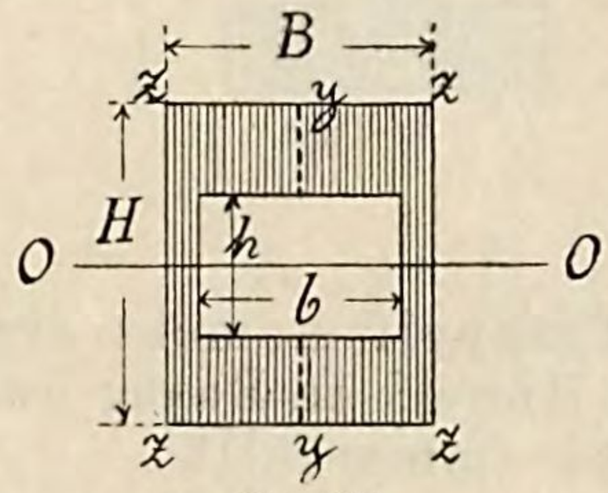


Fig. 355.

4. Trägheitsmoment einer I-Platte von nachstehender Gestalt lässt sich ohne weiteres aus dem Voranstehenden ableiten. Das Trägheitsmoment der voranstehenden Platte kann nicht geändert werden, wenn man diese nach der punktirten Linie *yy* zerschneidet und die so gebil-

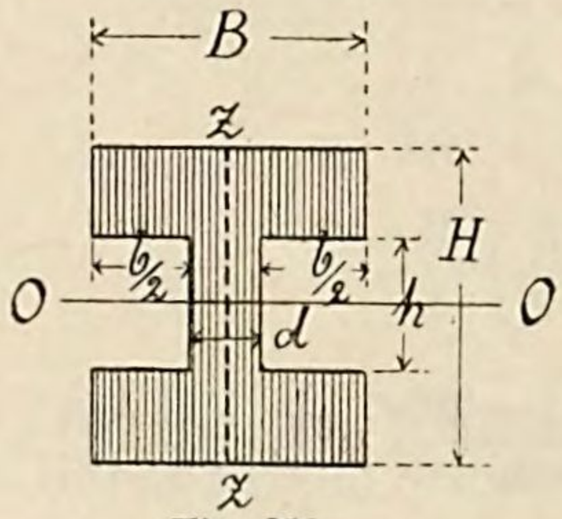


Fig. 356.

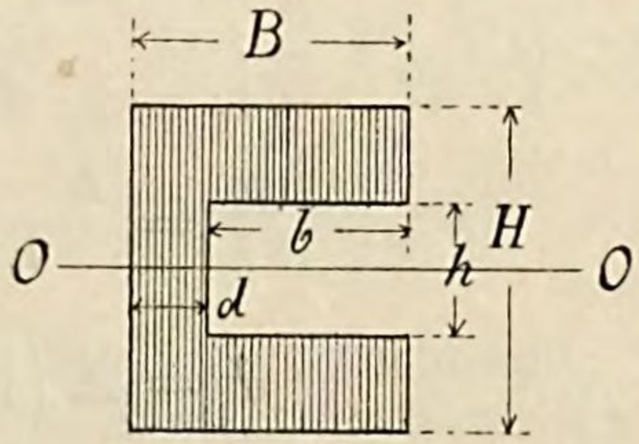


Fig. 357.

deten Hälften mit *zz*, *zz* zusammenlegt, weil hierdurch die Vertheilung der Massentheilchen in Bezug auf die Drehachse *OO* durchaus keine Aenderung erleidet. Es ist somit das Trägheitsmoment auch für diese Platten- (Flächen-) Form (Fig. 356), sowie für die Form (Fig. 357):

$$J = \frac{\gamma B H^3}{12} - \frac{\gamma b h^3}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 497$$

oder, wenn man anstatt *b* die Dicke *d* der lothrechten Rippe einführt, für welche:

$$d = B - b$$

$$b = B - d \quad \text{ist:}$$

$$J = \frac{\gamma B H^3}{12} - \frac{\gamma (B - d) h^3}{12} \quad \ldots \ldots \quad 498$$

5. Das Trägheitsmoment einer I Platte mit einer Aussparung in der Mitte von der Höhe h_1 ist:

$$J = \frac{\gamma B(H^3 - h^3)}{12} + \frac{\gamma d(h^3 - h_1{}^3)}{12} \quad \ldots\ldots\ldots 499$$

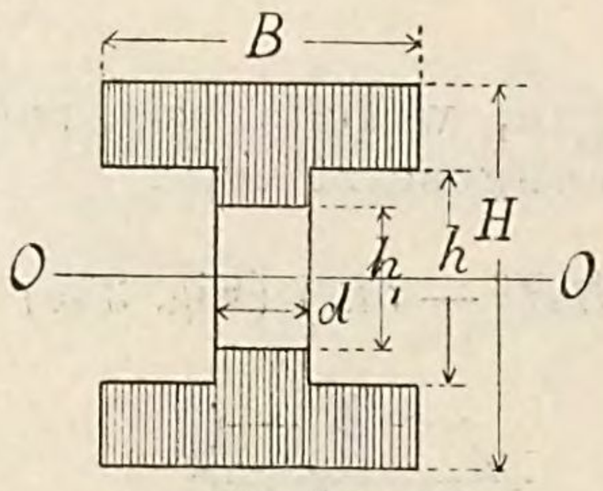


Fig. 358.

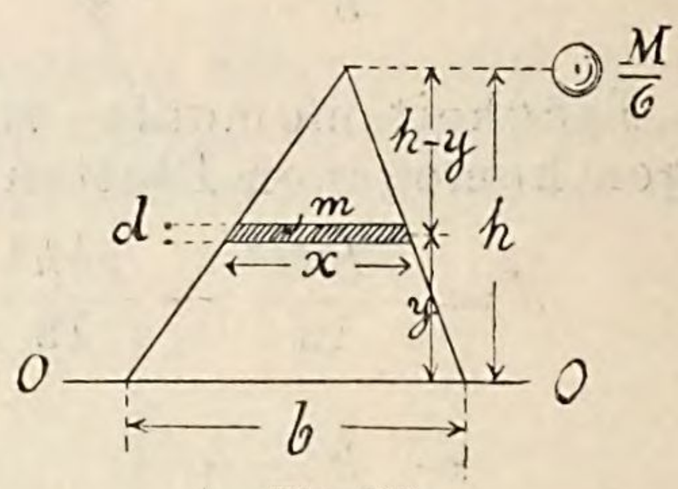


Fig. 359.

§ 277.

6. Trägheitsmoment einer dreieckförmigen (Fläche) Platte von der Höhe h in Bezug auf eine Achse, welche mit der Grundlinie b zusammenfällt.

Zerlege die Fläche $\frac{bh}{2}$ in n zur Grundlinie b parallellaufende Streifen, dann ist das Trägheitsmoment eines solchen Streifens von der Masse m

$$= my^2,$$

also das Trägheitsmoment sämmtlicher Streifen, d. i. des Dreieckes:

$$J = \Sigma(m y^2),$$

oder da:

$$m = \gamma \cdot d \cdot x$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}$$

$$J = \Sigma\left(\gamma d \cdot b \cdot \frac{h - y}{h} \cdot y^2\right),$$

$$= \frac{\gamma b}{h} \Sigma\,(d(h - y)y^2),$$

$$= \frac{\gamma b}{h} \Sigma\,(d \cdot hy^2 - dy^3).$$

Nach den Lehren der höheren Mechanik folgt hieraus:

$$J = \frac{\gamma b}{h}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right),$$

$$= \frac{\gamma b}{h} \cdot \frac{h^4}{12},$$

$$J = \frac{\gamma b h^3}{12} = \frac{\frac{\gamma bh}{2}}{6} h^2 = \frac{M}{6} h^2 \quad \ldots\ldots 500$$

$$\frac{J}{h^2} = \frac{M}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 501$$

Der 6. Theil der Masse des Dreieckes in der Spitze vereinigt, ersetzt die Wirkung der im Dreiecke gleichförmig vertheilten Masse.

§ 278.

7. Trägheitsmoment einer dreieckförmigen (Fläche) Platte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S parallel zur Grundlinie verlaufenden Achse.

Allgemein ist nach Gleichung 489:

$$J = J_S + Me^2,$$

$$J_S = J - Me^2,$$

$$J_S = \frac{M}{6} h^2 - M \left(\frac{h}{3}\right)^2,$$

$$J_S = \left(\frac{6}{36} M - \frac{4}{36} M\right) h^2,$$

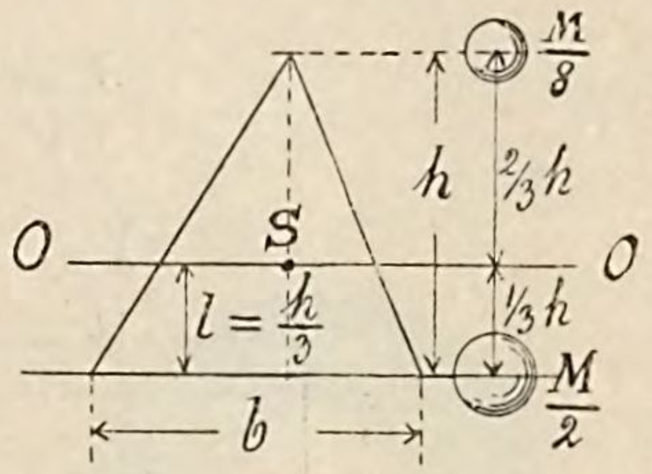


Fig. 361.

$$\boxed{J_S = \frac{M}{18} h^2} = \frac{\frac{\gamma b h}{2}}{18} h^2 = \boxed{\frac{\gamma b h^3}{36}} \quad \ldots \quad 502$$

$$J_S = \frac{M}{18} \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{M}{18} 9 \left(\frac{1}{3} h\right)^2 \quad \ldots \quad 503$$

$$J_S = \frac{M}{8} \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{3} h\right)^2 \quad \ldots \quad 504$$

Um hiernach die Wirkung der im Dreiecke gleichförmig vertheilten Masse in Bezug auf die Schwerpunktsachse zu ersetzen, hätte man entweder

$$\frac{M}{8} \text{ in der Spitze,}$$

oder:

$$\frac{M}{2} \text{ in der Basis}$$

des Dreieckes anzubringen.

Das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Fläche in Bezug auf eine in der Fläche liegende durch den Mittelpunkt (Schwerpunkt S) verlaufende Achse ist später (§ 281) vermittelst des polaren Trägheitsmomentes gefunden.

§ 279.

8. Polares Trägheitsmoment einer rechteckförmigen Platte

a) in Bezug auf eine Achse z, welche senkrecht zur Platte durch den Schwerpunkt S verläuft (Fig. 361):

$$J_z = J_x + J_y \text{ (§ 273)},$$

$$= \frac{\gamma b a^3}{12} + \frac{\gamma a b^3}{12} \text{ (Gl. 494)};$$

b) in Bezug auf eine Achse z, welche senkrecht zur Platte durch einen Eckpunkt verläuft:

$$J_z = \frac{\gamma b a^3}{3} + \frac{\gamma a b^3}{3} \text{ (Gl. 493)}.$$

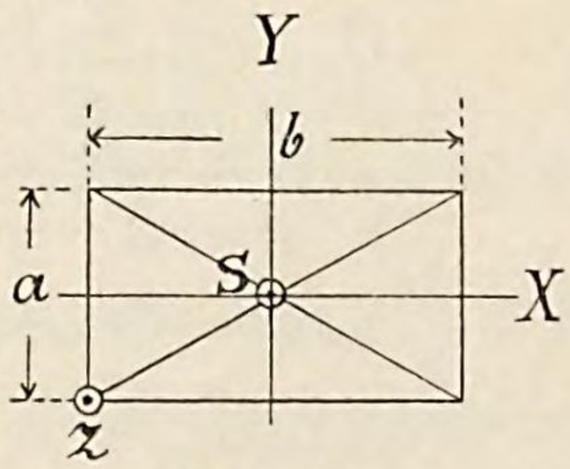


Fig. 361.

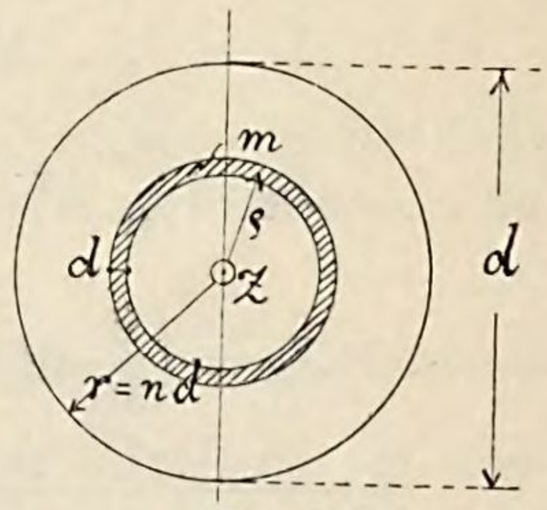


Fig. 362.

§ 280.

9. Polares Trägheitsmoment für die kreisförmige Platte in Bezug auf die im Schwerpunkte (Mittelpunkt) senkrecht zur Platte stehende Achse (Fig. 362).

Man zerlege die Platte in n concentrische Ringe, so ist das Trägheitsmoment für einen solchen Ring vom Halbmesser ϱ, der Dicke δ und der Masse m:

$$m\varrho^2,$$

also das Trägheitsmoment der ganzen Platte:

$$J_z = \Sigma (m\varrho^2)$$
$$= \Sigma (\gamma 2\varrho\pi\delta \cdot \varrho^2)$$
$$= \gamma 2\pi \Sigma (\delta \cdot \varrho^3).$$

Hieraus folgt:

$$J_z = \gamma 2\pi \delta^4 \cdot \frac{n^4}{4}$$
$$= \gamma 2\pi \frac{(\delta n)^4}{4}$$
$$= \gamma 2\pi \frac{r^4}{4} = (\gamma r^2 \pi) \frac{r^2}{2} = \frac{M}{2} r^2 \quad . \quad . \quad . \quad 505$$

oder durch den Durchmesser $d = 2r; r = \frac{d}{2}$

ausgedrückt:

$$J_z = \gamma 2\pi \frac{d^4}{4 \cdot 16}$$

$$= \gamma\pi \frac{d^4}{32} = \gamma \frac{d^2\pi}{4} \frac{d^2}{8} = \frac{M}{8} d^2 \quad . \quad . \quad . \quad 506$$

Die auf den Umfang reducirte Masse ist:

$$\frac{J_z}{r^2} = \frac{M}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 507$$

10. Für die ringförmige Platte ist das polare Trägheitsmoment (Fig. 363):

$$J_z = \gamma\pi \frac{{d_1}^4 - {d_0}^4}{32} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 508$$

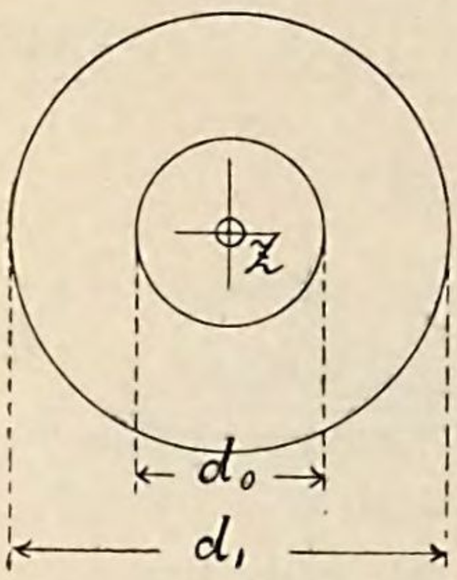


Fig. 363.

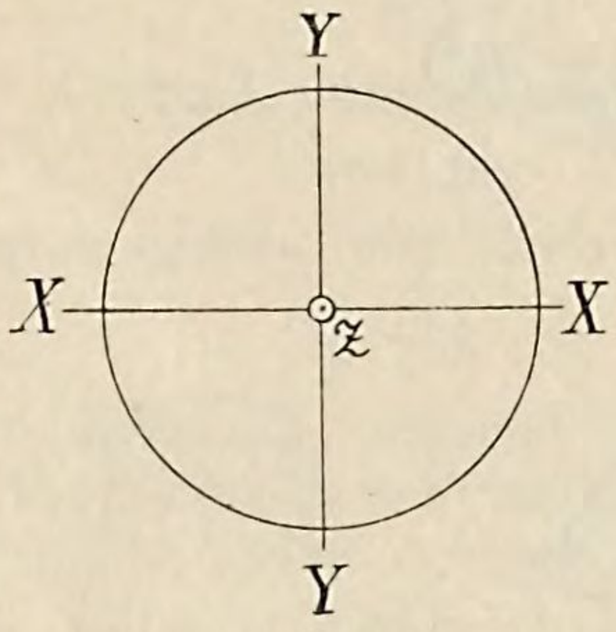


Fig. 364.

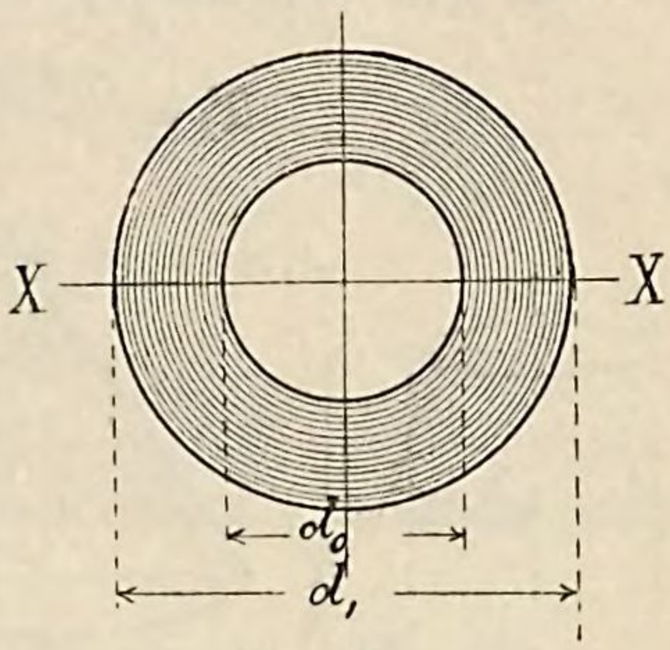


Fig. 365.

§ 281.

11. Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in der Fläche selbst liegende beliebige Schwerpunktsachse X oder Y lässt sich durch das polare Trägheitsmoment ausdrücken:

Allgemein ist das polare Trägheitsmoment:

$$J_z = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y,$$

da

$$J_x = J_y$$

sein muss; also:

$$J_y = J_x = \frac{1}{2} J_z$$

$$= \frac{\gamma\pi d^4}{64} \text{ (Fig. 364)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 509$$

Für einen Ring ist:

$$J_y = J_x = \frac{\gamma\pi({d_1}^4 - d_0 4)}{64} \text{ (Fig. 365)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 510$$

§ 282.

Körper.

Es bedeute γ die Masse der Kubikeinheit.

1. Trägheitsmoment eines Kreis-Cylinders von dem Durchmesser d, der Höhe h und der Masse M in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 366).

Der Cylinder kann aufgefasst werden als eine Summe von kreisförmigen Platten, welche aufeinandergeschichtet die Höhe h ergeben; dann ist nach Gleichung 506:

$$T_z = \frac{\gamma \pi d^4}{32} \cdot h = \frac{\gamma \pi d^2 h}{4 \cdot 8} \cdot d^2 = \frac{M}{8} d^2 = \frac{M}{2} r^2 \quad . \quad . \quad 511$$

$$\frac{T_z}{r^2} = \frac{M}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 512$$

2. Für den hohlen Cylinder ist:

$$T_z = \frac{\gamma \pi (d_1^4 - d_0^4)}{32} \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 513$$

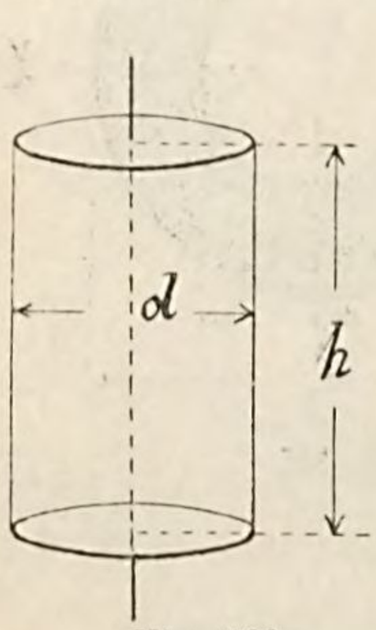


Fig. 366.

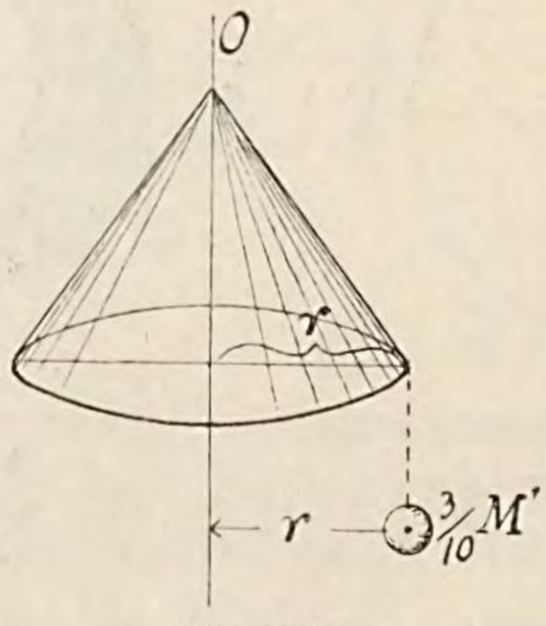


Fig. 367.

Fig.

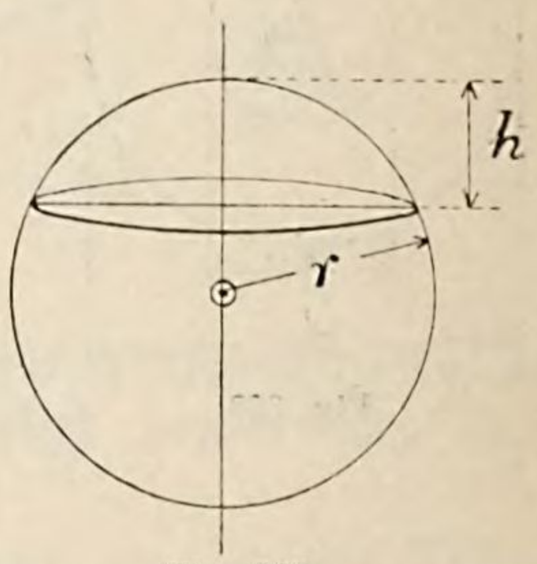


Fig. 369.

3. Das Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiskegels mit r als Radius der Grundfläche, ist in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 367):

$$J = \frac{3M}{10} r^{2*}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 514$$

$$\frac{J}{r^2} = \frac{3}{10} M.$$

4. Das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels mit r, R als Radien der Endflächen ist (Fig. 368):

$$J = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 515$$

5. Das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes von der Höhe h in Bezug auf die Symmetrie-Achse OO (Fig. 369):

$$J = \frac{\gamma \pi}{2} \left\{ 4r \frac{2h^3}{3} - 4r \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 516$$

*) Die Ableitungen der folgenden Werthe werden in der höheren Mechanik gegeben.

Für die Halbkugel ist $h = r$, also:

$$J = \gamma\pi \frac{4}{15} r^5 = 2 \frac{M}{10} r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 517$$

$$\frac{J}{r^2} = \frac{1}{5} M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 518$$

Für die volle Kugel ist $h = 2r$, also

$$J = \gamma\pi \frac{8}{15} r^5 = \frac{4}{10} M \cdot r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 519$$

$$\frac{J}{r^2} = \frac{2}{5} M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 520$$

Die Trägheitsmomente anderer Gebilde werden in der höheren Mechanik gegeben.

B.

Satz vom Antriebe und der Bewegungsgrösse sich drehender Körper.

§ 283.

Dieser Paragraph, sowie der folgende, auch schon die beiden vorangehenden, können als Ergänzung dessen angesehen werden, was schon unter „Messen der Kräfte“ (§ 84 und ff.) gesagt ist.

Auf den um die Achse O drehbaren Körper K wirkt das Kraftmoment (die Drehkraft):

$$\mathfrak{M} = P \cdot l$$

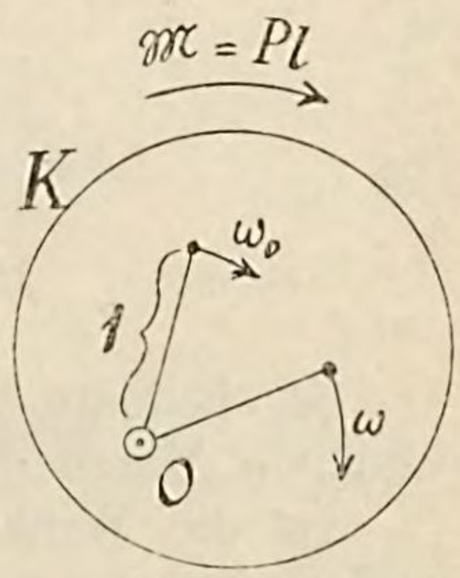


Fig. 370.

ein und ertheilt demselben die Winkelgeschwindigkeit w in t Sekunden; alsdann ist die Winkelbeschleunigung:

$$\varepsilon = \frac{w}{t}$$

und es geht die Gleichung 482 über in:

$$\mathfrak{M} = P \cdot l = J \frac{w}{t}$$

$$\boxed{\mathfrak{M}\, t = Pl \cdot t = J \cdot w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 520$$

Antrieb = Bewegungsgrösse der Masse.

Oder, wenn wieder mit M_1 die auf die Entfernung 1 von der Drehachse reducirte Masse des Körpers bezeichnet wird:

$$\mathfrak{M}t = Pl \cdot t = M_1 w \quad \ldots\ldots\ldots \quad 521$$

Die letzte Gleichung hat Aehnlichkeit mit der für die fortschreitende Bewegung abgeleiteten Gleichung:

$$Pt = Mv.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang der Zeit nicht Null, sondern w_0 (Fig. 370), so geht die Gleichung über in:

$$\mathfrak{M}t = Pl \cdot t = M_1 w - M_1 w_0 = M_1 (w - w_0) \quad . \quad . \quad . \quad 522$$

Diese Gleichung für P aufgelöst, kann zum Messen dieser Kraft benutzt werden.

C.

Satz von der Arbeit (Energie) sich drehender Körper.

§ 284.

Hat das in der Entfernung r_1 von der Drehachse befindliche Massentheilchen m_1 die Geschwindigkeit $v_1 = r_1 w$

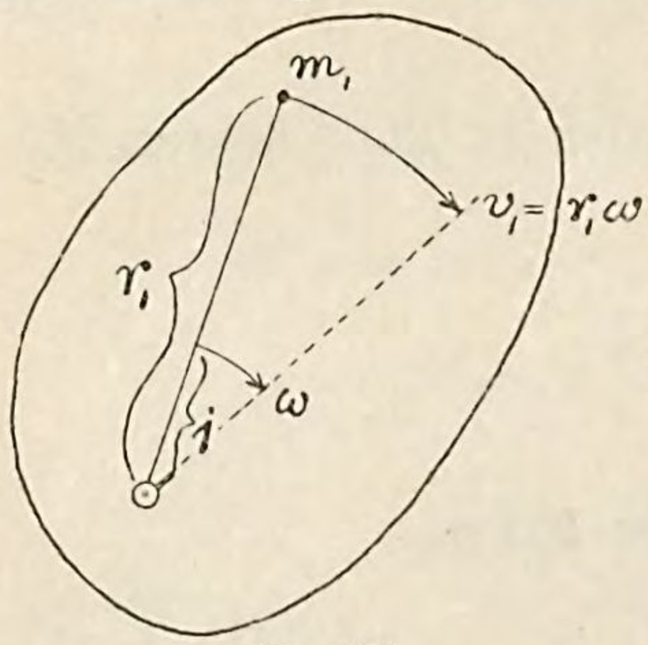


Fig. 371.

bezw. die lebendige Kraft:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 (r_1 w)^2}{2} = \frac{w^2}{2} (m_1 r_1^2),$$

so entspricht dieser lebendigen Kraft die mechanische Arbeit (das Arbeitsvermögen, die Energie):

$$a_1 = m_1 r_1^2 \frac{w^2}{2}.$$

Für sämmtliche Massentheilchen $m_1 m_2 \ldots$ in den Abständen $r_1 r_2$ von der Drehachse würde dann das Arbeitsvermögen sein:

$$A = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots) \frac{w^2}{2}$$

$$\boxed{A = \quad J \cdot \frac{w^2}{2} \quad = M_1 \frac{w^2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 523$$

Mechan. Arbeit = lebendige Kraft.

M_1 bedeute wie oben die auf die Entfernung 1 von der Drehachse reducirte Masse des Körpers.

Ist die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang der Bewegung nicht Null, sondern w_0, so geht obige Gleichung über in:

$$\boxed{A = J\left(\frac{w^2 - w_0^2}{2}\right) = M_1 \left(\frac{w^2 - w_0^2}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 524$$

Arbeit = Zunahme an lebendiger Kraft.

Dieser Gleichung entspricht bei der fortschreitenden Bewegung die Gleichung 156:

$$A = M\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right).$$

Beispiel 112: Welche mechanische Arbeit ist seitens der Dampfmaschine aufzuwenden, um den Ring eines Schwungrades aus der Winkelgeschwindigkeit

$$w_0 = 1 \text{ m}$$

in die Winkelgeschwindigkeit:

$$w = 8 \text{ m}^{*})$$

zu versetzen. Das Gewicht des Ringes sei:

$$G = 4000 \text{ kg},$$

der Halbmesser desselben:

$$r = 3 \text{ m}^{*}).$$

Es ist nach der obigen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} A &= J \frac{w^2 - {w_0}^2}{2} \\ &= Mr^2 \frac{w^2 - {w_0}^2}{2} \\ &= \frac{G}{g} r^2 \frac{w^2 - {w_0}^2}{2} \\ &= \frac{4000}{9{,}81} 3^2 \frac{8^2 - 1^2}{2} \\ &= 115\,600 \text{ mkg.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 525$$

Würde die angenommene Geschwindigkeitszunahme in 20 Sekunden erzielt, so wäre die hierzu erforderliche Arbeit in 1 Sekunde oder der sogen. Effekt:

$$E = \frac{A}{20} = \frac{115\,600}{20} = 5780 \text{ mkg} \quad \ldots\ldots 526$$

oder in Pferden ausgedrückt:

$$N = \frac{E}{75} = \frac{5780}{75} = \text{rund: } 77 \text{ Pferdekr.} \quad \ldots 527$$

D.

Von der Arbeit (Energie) rollender Körper.

§ 285.

Ein rollender Körper führt eine zusammengesetzte Bewegung, nämlich eine Drehbewegung um seine Achse (oder seinen Mittelpunkt) und zugleich eine fortschreitende Bewegung aus. Es schliesst sich deshalb diese Betrachtung innig an die vorangehende an.

Nehmen wir als rollenden Körper eine Kugel an.

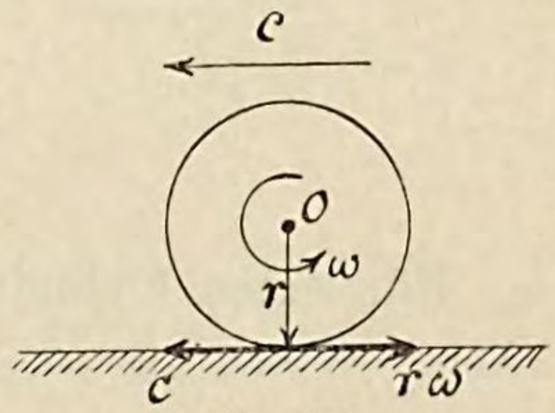


Fig. 372.

*) Dem hier angenommenen Werthen würde eine Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes von

$$v = rw = 3 \cdot 8 = 24 \text{ m}$$

in 1 Sekunde entsprechen. Damit die in dem Ringe auftretende sogen. Centrifugalspannung (§ 286 Gleich. 545) nicht zu gross werde, rechnet man für gusseiserne Ringe höchstens

$$v = 25 \text{ bis } 30 \text{ m}.$$

Es sei c die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung,
w die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung,
M die Masse des Körpers (der Kugel),
J das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf den Mittelpunkt O,
r der Halbmesser der Kugel,
dann ist das Arbeitsvermögen der fortrollenden Kugel:

$$A = \frac{Mc^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} \quad (\S\ 86 \text{ und } 284) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 528$$

oder, da die Bedingung des Rollens (ohne Gleiten) ausgedrückt ist durch die Gleichung:

$$c = rw \quad (\text{Siehe Fig. } 372) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 529$$

$$A = \frac{Mc^2}{2} + \frac{J}{2}\frac{c^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 530$$

Wird ferner (nach § 269) die auf den Umfang reducirte Masse:

$$\frac{J}{r^2} = m,$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$A = \frac{c^2}{2}(M + m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 531$$

Beim Herunterrollen auf einer schiefen Ebene um die Höhe h ist, wenn nur die Schwerkraft wirkt, c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit

$$\frac{M+m}{2}v^2 - \frac{M+m}{2}c^2 = Mgh \quad (\text{Gleich. } 156) \quad . \quad . \quad 532$$

für $c = o$ ist:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{m}{M}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 533$$

Für die Kugel ist:

$$m = \frac{2}{5}M \quad (\text{Gleich. } 250) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 534$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot 2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 535$$

Für einen Cylinder ist:

$$m = \frac{M}{2} \quad (\text{Gleich. } 512) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 536$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 537$$

E.

Centrifugal- (Centripetal-) Spannungen im Innern sich drehender Körper.

Einleitende Bemerkungen. Im Innern eines jeden in Drehung versetzten Körpers wird durch die Centrifugalkraft eine Spannung (Anstrengung) wachgerufen (Fig. 341). Diese darf eine gewisse, von der Eigenart des Körperstoffes abhängige zulässige Grösse nicht überschreiten, wenn ein Zerreissen des Körpers verhütet werden soll.

Da ausserdem in Folge der Centrifugalkraft zerrissene Schwungräder, Schleifsteine und andere in schnelle Umdrehung versetzte Körper im Stande sind, arge Verheerungen in ihrer Umgebung anzurichten, so ist es Aufgabe und Pflicht des Technikers, die Umdrehungsgeschwindigkeiten seiner sich drehenden Maschinenbestandtheile genau zu beschränken, zu überwachen und zu regeln.

§ 286.

Im Folgenden sollen für einige wichtige Körperformen die zulässigen Umfangsgeschwindigkeiten ermittelt werden, wobei das § 264 und Gl. 478 gefundene Gesetz, dass die Centrifugalkraft so wirkt, wie wenn die Gesammtmasse des Körpers in dessen Schwerpunkte S vereinigt wäre, uns zu statten kommt.

Eine prismatische Stange (Fig. 373), die um den einen Endpunkt O gedreht wird, würde hier zerreissen, wenn der Spannungswiderstand W nicht der Centrifugalkraft P gewachsen wäre; die Bedingungsgleichung heisst:

$$W \geqq P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 538$$

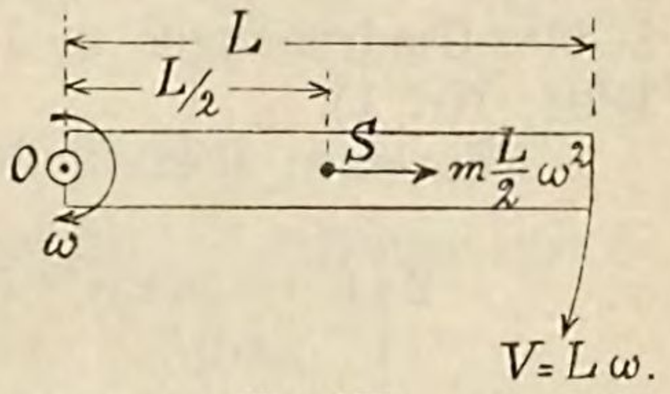


Fig. 373.

Es sei s kg/qcm die zulässige spezifische Spannung des Materiales,

F qcm der Querschnitt des Stabes,

L cm die Länge „ „

dann ist:

$$s \cdot F = m \frac{L}{2} w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 539$$

Wird mit q das Gewicht eines Kubikcentimeters der Stange bezeichnet, so ist

$$m = \frac{FL \cdot q}{g},$$

folglich:

$$s \cdot F = \frac{FL \cdot q \cdot Lw^2}{2g},$$

$$\left.\begin{aligned} s &= q \cdot \frac{(Lw)^2}{2g} \\ s &= q \cdot \frac{v^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 540$$

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{s}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 541$$

Beispiel 113: Für Schmiedeeisen ist: $s = 1500$ kg auf 1 qcm die zulässige Anspannung an der Elasticitätsgrenze (siehe Festigkeitslehre),

$q = 0{,}77$ kg das Gewicht eines ccm;

wird ferner gesetzt: $g = 9{,}81$ m als Erdbeschleunigung,

so folgt:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{1500}{0{,}77}} = 195{,}5 \text{ m}.$$

Soll also nun in Folge der Centrifugalkraft die Spannung von 1500 kg auf 1 qcm des Stabquerschnittes nicht überschritten werden, so darf die Umfangsgeschwindigkeit des Stabes höchstens

$v = 195{,}5$ Meter betragen.

Für graues Gusseisen würde sich nur ergeben:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{750}{0{,}7}} = 121 \text{ m}.$$

Bei technischen Ausführungen bleibt man in allen Fällen meistens unter $V = 30$ m.

Bei den Ventilatoren trifft man wohl am Umfange der Flügel-Geschwindigkeiten $V = 36$ m.

Die grösseste bis heute erreichte Umfangsgeschwindigkeit $v = 175$ m in 1 Sekunde, zeigte das Laufrad der in Chicago 1893 ausgestellten Dampf-Turbine von De Laval aus Stockholm, welches hierbei 30000 Umdrehungen in 1 Minute ausführte (Z. ds. Vereins Deutsch. Ing. 1894, Nr. 1),

Für einen Ring (oder Hohlcylinder) (Fig. 374) ist;

$$2sF = mx_0w^2 = \left(\frac{q \cdot r\pi F}{g}\right) \cdot \left(\frac{2r}{\pi}\right) \cdot w^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 542$$

$$s = 2q \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 543$$

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{s}{2q}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 544$$

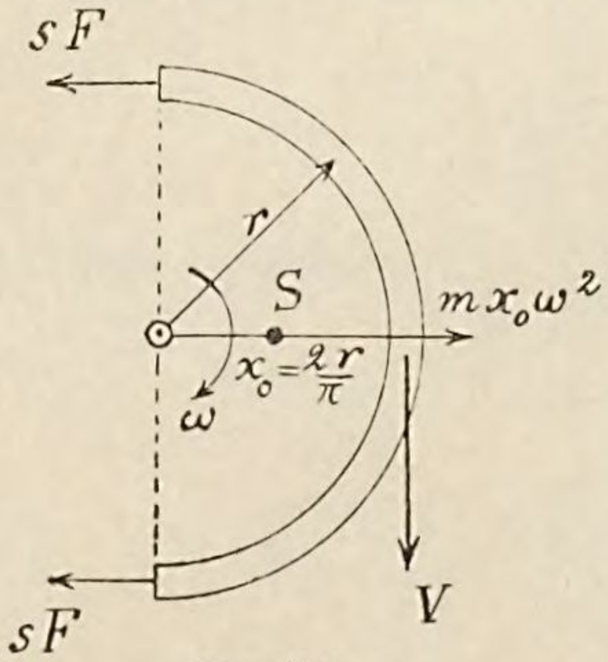


Fig. 374.

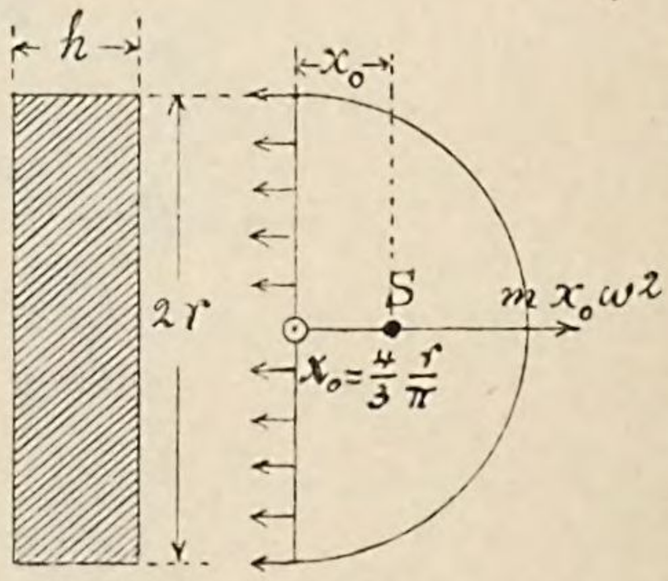


Fig. 375.

Beispiel 114: Für graues Gusseisen würde sich ergeben:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{750}{2 \cdot 0{,}7}} = 102 \text{ m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 545$$

Auch hier bleibt man meistens mit der Umfangsgeschwindigkeit (der Schwungräder und sonstigen Räder) unter 20 bis 30 m.

Für eine cylindrische Scheibe (Fig. 375) ist:

$$s \cdot F = m x_0 w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 546$$

$$s \cdot 2rh = \left(\frac{q}{g} \frac{r^2 \pi h}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \frac{r}{\pi}\right) w^2$$

$$s = \frac{2}{3} q \cdot \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 547$$

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{3}{2} \frac{s}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 548$$

Beispiel 115: Für einen Mühlstein (Sandstein) würde sich ergeben:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{600}{0{,}27}} = 80{,}87 \text{ m} \quad . \quad . \quad 549$$

Für die aus natürlichem Sandstein bestehenden gesunden Steine der Grobschleifereien wähle man

$$\left.\begin{aligned} v &= 15 \text{ m für die harte Sorte} \\ v &= 12 \text{ m} \quad \text{„} \quad \text{„ weiche „} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 550$$

Man trifft aber auch Geschwindigkeiten:

$$v = 24 \text{ m bei Polirschleifereien.}$$

Wird ein Durchmesser $2r = 2\ m$ vorausgesetzt, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} n = \frac{60}{2r\pi} v = \frac{60}{2\pi} 15 &= 143 \text{ Umdrehungen in 1 Minute} \\ = \frac{60}{2r\pi} \cdot 12 &= 114 \quad \text{„} \quad \text{„ 1 „} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 551$$

Um die Gefahr des Zerspringens zu umgehen, muss die Umdrehungszahl durch Regulatoren begrenzt werden. Auch ist auf die Befestigung des Steines auf der (hier meist quadratischen) Achse die grösseste Sorgfalt zu verwenden.

F.

Anwendung der bislang gewonnenen Gesetze und Regeln.

a.

Die Schwingungsdauer des physischen oder zusammengesetzten Pendels.

§ 287.

Ein physisches oder zusammengesetztes Pendel heisst jedes darstellbare, also technisch verwendbare Pendel im Gegensatz zu dem früher (§ 132) behandelten, gedachten oder mathematischen Pendel.

Das für das mathematische Pendel gefundene Gesetz (Gl. 222):

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

würde keinen praktischen Werth haben, wenn es nicht möglich wäre, für das in der Praxis überhaupt verwendbare, darstellbare physische Pendel die Länge l des gleichwerthigen mathematischen Pendels zu ermitteln. Gleichwerthig heisst dasjenige mathematische Pendel, welches bei gleichem Ausschlagswinkel α genau dieselbe Schwingungsdauer hat, wie das zum Versuche benutzte physische Pendel.

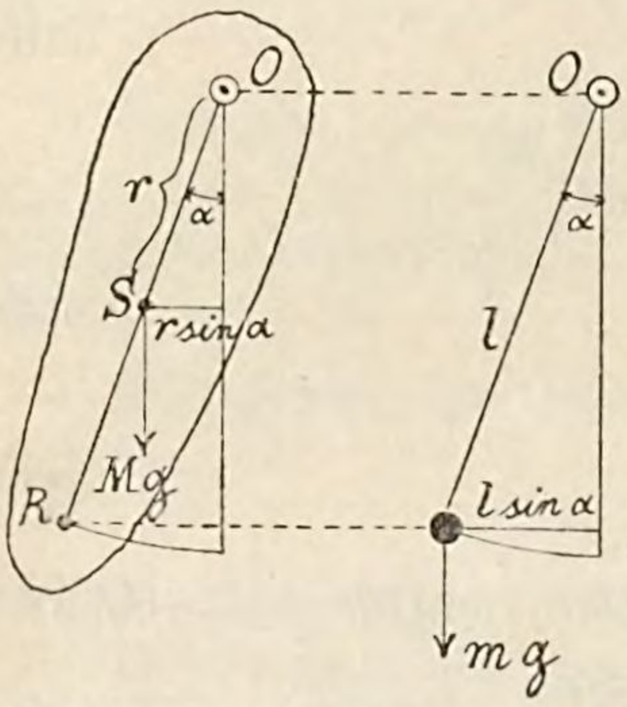


Fig. 376.

Die hiernebenstehenden Pendel beginnen bei gleichen Ausschlagswinkeln α zu gleicher Zeit ihre Schwingung und werden übereinstimmend schwingen, wenn ihre Winkelbeschleunigung ε dieselbe ist, also die Gleichung erfüllt ist:

$$\varepsilon = \frac{Mg \cdot r \sin \alpha}{J} = \frac{mg \cdot l \sin \alpha}{ml^2} \text{ (siehe Gl. 484).}$$

In der Gleichung bedeuten für das physische Pendel:

M die Masse, Mg das im Schwerpunkte S angreifende Gewicht,

r den Abstand des Schwerpunktes S von der Drehachse O,

$r \cdot \sin \alpha$ demnach den Hebelarm der beschleunigenden Kraft Mg,

J das Trägheitsmoment;

für das mathematische Pendel:

m die Masse, mg das Gewicht des materiellen Punktes,

l die gesuchte Pendellänge,

$l \cdot \sin \alpha$ den Hebelarm der beschleunigenden Kraft mg.

Nach einigen Umformungen ergiebt obige Gleichung:

$$l = \frac{J}{Mr} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 552$$

Trägt man diese Länge l auf der verlängerten Schwerpunktslinie $O\,S$ des physischen Pendels von O aus auf, so erhält man den sogen. Schwingungspunkt R des physischen Pendels, das ist denjenigen Punkt, in dem man sich die ganze Masse des physischen Pendels vereinigt denken kann. Hängt man das Pendel in R auf, so schwingt es genau so wie vorher. Solche zum Umhängen eingerichteten Pendel heissen Reversionspendel und wurden zuerst von Bohnenberger und Kater benutzt, um durch Versuch die Länge l des mathematischen Pendels zu bestimmen. — Auch das Trägheitsmoment eines Körpers lässt sich mit Hülfe des Reversionspendels bestimmen, was einleuchtet, wenn man obige Gleichung auf die Form bringt:

$$J = M \cdot r \cdot l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 553$$

b.

Zweck und Berechnung der Schwungräder.

§ 288.

Einleitende Bemerkungen. Das Schwungrad bezweckt meistens die in kurzen Zeitabschnitten periodisch wiederkehrenden Geschwindigkeitsänderungen (Winkelbeschleunigung ε Gl. 484) einer in Drehung versetzten Welle zu beschränken und die z. B. bei Walz- und Hammerwerken plötzlich auftretenden Widerstände zu überwinden.

An jeder Betriebswelle kämpfen gleichsam das treibende Kraftmoment $\mathfrak{M}_k$ und das zu überwindende Widerstandsmoment $\mathfrak{M}_w$ um das Gleichgewicht und erzeugen, wenn das Trägheitsmoment der gedrehten Massen J ist, die Winkelbeschleunigung:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{J} \text{ (Gleich. 484) } \ldots \quad 554$$

Wäre in jedem Augenblicke:

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_w$$

so würde:

$$\varepsilon = 0,$$

die Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle eine gleichförmige sein, was meistens gewünscht wird.

In der Regel ist nun zwar im Durchschnitt auch:

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_w,$$

(giebt z. B. eine Dampfmaschine bei jedem Doppelhube soviel Kraft an die Betriebswelle ab, wie diese für je eine Umdrehung gebraucht); dagegen während kurzer Zeitabschnitte (z. B. während der 4 aufeinanderfolgenden $\frac{1}{4}$ Umdrehungen einer durch eine Dampfmaschine mittelst Kurbelgetriebes bewegten Welle), ist entweder:

$$\mathfrak{M}_k > \mathfrak{M}_w,$$

oder:

$$\mathfrak{M}_k < \mathfrak{M}_w,$$

und dann eine Ausgleichung dieser Schwankungen nöthig, damit die Arbeitsmaschine und das herzustellende Produkt (Gespinnst einer Spinnmaschine) nicht unter diesen mit Stössen verbundenen Zuckungen leidet.

Soll demnach auch in den letztgenannten und ähnlichen Fällen ε kleiner sein und wenig schwanken, d. h. die Umdrehungsgeschwindigkeit während einer jeden Wellenumdrehung möglichst gleichförmig bleiben, so muss, wie die Gleichung 554 ausweist, dafür gesorgt werden, dass J möglichst gross ausfällt. Da jedoch in der Regel das Trägheitsmoment der umlaufenden Welle nicht bedeutend ist, muss eine besondere Masse (Schwungmasse) auf der Welle, das **Schwungrad,** angebracht werden.

Nun ist allgemein $J = \Sigma (mr^2)$, also die Masse m nur im einfachen Verhältnisse, r dagegen im quadratischen Verhältnisse an der Vergrösserung von J betheiligt, deshalb vortheilhafter den Halbmesser r, als die Masse

(das Gewicht) des Schwungrades, gross zu wählen. Ausserdem erreicht man mit dieser Wahl, dass das Rad billig ausfällt und weniger Zapfenreibung veranlasst. Jedoch ist man bei der Wahl des Halbmessers auch beschränkt. Denn mit diesem wächst die Umfangsgeschwindigkeit, mit dieser die Centrifugalkraft und wir dürfen, wie wir oben (Gl. 545) sahen, der Sicherheit wegen v nicht grösser als 30 Meter wählen.

Noch soll darauf hingewiesen werden, dass es nicht gleichgültig ist, an welcher Stelle des Wellentriebwerkes man das Schwungrad anzubringen hat. Es soll ausgleichen und zugleich beschützen. Man muss es deshalb auf der Stelle der Welle aufkeilen, die derjenigen Maschine am nächsten liegt, von der die Unregelmässigkeiten ausgehen. So hätte man es neben die Dampfmaschine zu legen, die eine Spinnerei betreibt, dagegen stets in unmittelbarer Nähe der Walzenstrasse eines Eisenwalzwerkes anzuordnen.

Nach solchen Ueberlegungen hat der Techniker das Schwungrad einzurichten, auf dessen Bedeutung für den Betrieb und auf dessen Berechnung nun etwas näher, so weit es thunlich erscheint, eingegangen werden soll.

§ 289.

Im allgemeinen ist:

1. nahezu:

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_w,$$

wenn als Kraftmaschinen: Wasserräder oder Turbinen, als Arbeitsmaschinen: Mahlmühlen, Centrifugalpumpen, Ventilatoren, Schleifmaschinen, Kapselräder, Kreissägen, Papiermaschinen, Webereien, Spinnmaschinen, Dynamomaschinen verwendet sind.

Dagegen ist

2. abwechselnd:

$$\mathfrak{M}_k \gtrless \mathfrak{M}_w,$$

wenn als Kraftmaschinen: Kolbenmaschinen (Dampfmaschinen), als Arbeitsmaschinen: Kolbenpumpen, Kolbengebläse, Walzwerke, Pochwerke, Hammerwerke, Sägegatter, benutzt sind.

Dann ist:

3. noch eine Gruppe von Anlagen zu erwähnen, die öfters Stillstände oder abwechselnd Vor- und Rückwärtsbewegung erfordern. Hierher gehören die Fördermaschinen.

Wie die Sammelteiche unserer technischen Anlagen in nassen Zeiten das überschüssige Wasser aufspeichern, um es in trockenen Zeiten für den Betrieb wieder herauszugeben, so sammeln die Schwungräder vermöge ihrer Trägheit durch Beschleunigung ihrer Masse in den meistens kurzen Zeitabschnitten des Kräfteüberschusses ($\mathfrak{M}_k > \mathfrak{M}_w$) lebendige Kraft (mechanische Arbeit) auf, um sie zum Betriebe der Welle in denjenigen, ebenfalls kurzen Zeitabschnitten wieder herauszugeben, in welchen die Triebkraft geringer als der Widerstand ($\mathfrak{M}_k < \mathfrak{M}_w$) ist. Um vor Irrthum zu bewahren, soll besonders hervorgehoben werden, dass ein Schwungrad wohl die überschüssige Wirkung der Triebmaschine sammelt, diese aber niemals vergrössern kann. Im Gegentheil, das Schwungrad ist nur als ein nothwendiges Uebel anzusehen, das Zapfen-Reibung und Luftwiderstand veranlasst und somit die Wirkung der Triebkraft aufzehren hilft.

Das dem Schwungrade zu gebende Trägheitsmoment hängt nach der Formel 554:

$$J = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{\varepsilon}$$

davon ab, welchen Schwankungen Triebkraft und Widerstand je nach der Natur der Kraft- und Arbeitsmaschine unterworfen sind: ferner, welche Bewegungsveränderungen (Beschleunigung ε) in den aufeinanderfolgenden Abschnitten einer Bewegungsperiode der zu verarbeitenden Produkte wegen zugelassen werden dürfen. Kurz, welchen Grad der Gleichförmigkeit man erzielen will und muss.

Schon hieraus und aus dem weiter oben Gesagten geht hervor, dass von der Ableitung einer allgemein gültigen Formel, aus der J für die einzelnen Fälle zu berechnen wäre, nicht die Rede sein kann. Anders ist es, wenn die auszugleichenden Bewegungsschwankungen, wie z. B. bei dem Kurbelgetriebe einer Dampfmaschine, genügend genau bekannt sein sollten. Wir werden später auf diesen besonderen Fall näher eingehen.

In den oben unter 1. genannten Fällen ist meistens ein Schwungrad nicht nöthig, zumal die Wasserräder und Turbinen an sich wie Schwungräder wirken.

Im Falle 3. vermeidet man gern erhebliche Schwungmassen, weil hierdurch die Lenkbarkeit der Maschine beeinträchtigt wird und bei jedem Stillstande die aufgespeicherte lebendige Kraft durch künstliche Widerstände (Bremsen, Gegendampf) getötet werden muss.

§ 290.

Berechnung der Schwungräder. Ist für das Schwungrad

J das Trägheitsmoment,

M die auf den mittleren Ringhalbmesser r reducirte Masse,

also:

$$J = Mr^2,$$

ferner:

$v_0 = rw_0$ die kleinste Umfangsgeschwindigkeit zu Anfang,

$v_1 = rw_1$ die grösseste Umfangsgeschwindigkeit zu Ende einer periodischen Schwankung,

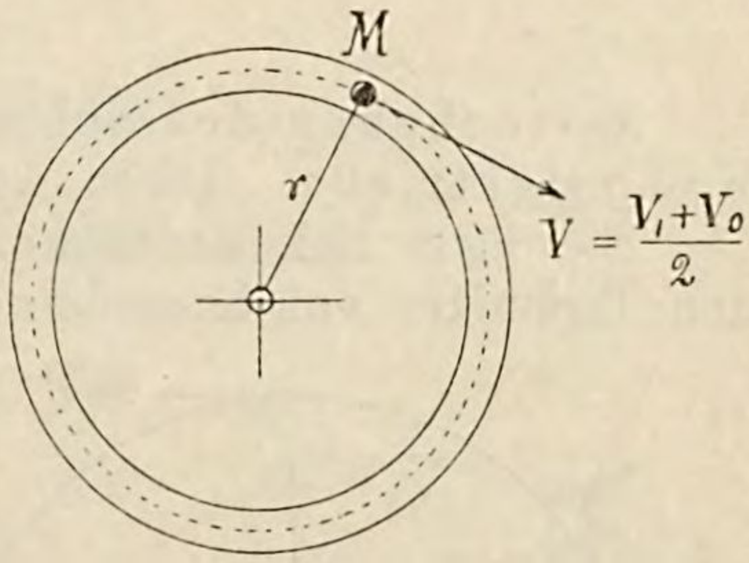


Fig. 378.

$A_k - A_w$ derjenige Ueberschuss der Arbeit der Kraftmaschine über die der Arbeitsmaschine, durch welchen die Geschwindigkeitszunahme $v_1 - v_0$ herbeigeführt wird, so ist nach (Gl. 524):

$$J \frac{{w_1}^2 - {w_0}^2}{2} = A_k - A_w ,$$

$$Mr^2 \frac{{w_1}^2 - {w_0}^2}{2} = A_k - A_w ;$$

$$\left.\begin{aligned} M\frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2} &= A_k - A_w \\ M\frac{v_1 + v_0}{2}(v_1 - v_0) &= A_k - A_w\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 555$$

In dieser Gleichung bedeutet:

$$\frac{v_1 + v_0}{2} = v \quad \ldots \quad 556$$

die mittlere Geschwindigkeit und es lässt sich dann schreiben:

$$Mv^2 \cdot \frac{v_1 - v_0}{v} = A_k - A_w \quad \ldots \quad 557$$

Setzt man noch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{v_1 - v_0} &= \frac{\textit{Mittlere Geschwindigkeit}}{\textit{Unterschied zwischen der grössten u. kleinsten Geschwind.}} \\ &= \textit{Gleichförmigkeitsgrad}, \\ &= i, \end{aligned}\right\} \quad 558$$

so heisst die Gleichung, durch welche das Gewicht

$$G = Mg,$$

des Schwungringes bestimmt wird,

$$G = gi\frac{A_k - A_W}{v^2} \quad \ldots \quad 559$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich das Gewicht des Schwungringes berechnen, wenn die Grössen der rechten Seite gegeben sind,

§ 291.

Berechnung des Schwungrades für eine Dampfmaschine mit Kurbelgetriebe. Diese Aufgabe ist aus doppeltem Grunde gestellt:

Sie lässt sich angenähert wissenschaftlich beantworten, und ist für den Techniker von besonderer Bedeutung. Zunächst sind diejenigen Stellungen der Kurbel zu ermitteln, für welche die grösste und kleinste Geschwindigkeit (v_1 und v_0) sich zeigen. Dazu ist das Verhältnis der (beschleunigenden) Triebkraft und des (verzögernden) Widerstandes in den einzelnen Kurbelstellungen festzustellen.

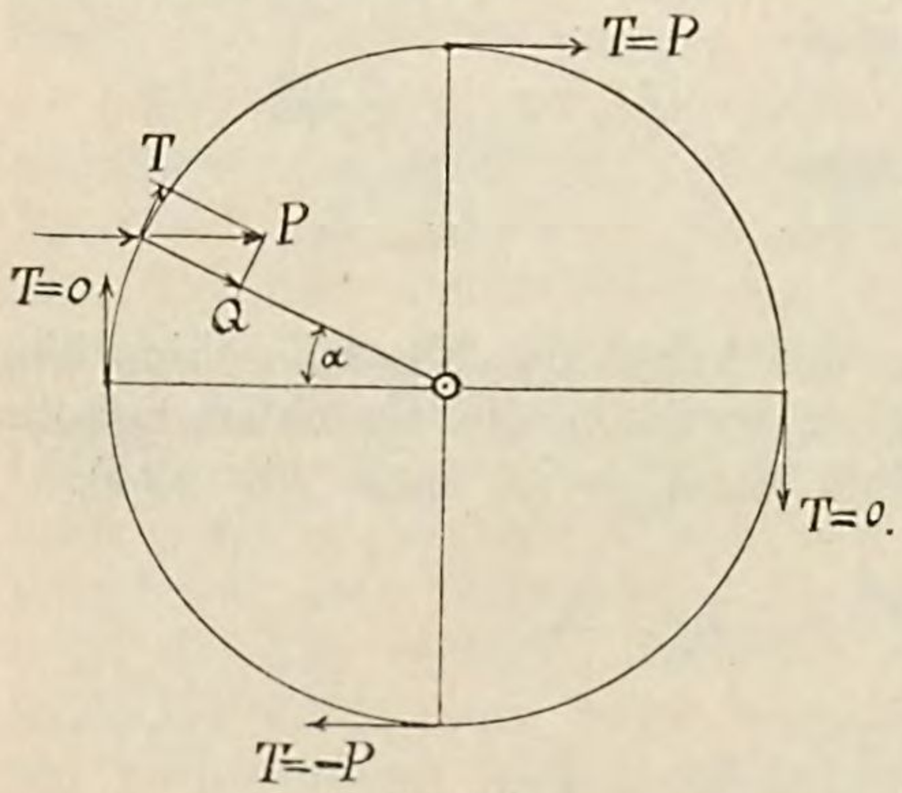


Fig. 378.

Es sei P die Kraft, mit der die Dampfmaschine (Kraftmaschine) unveränderlich in der Richtung der Kolbenstange auf den Kurbelzapfen einwirkt. (Unter welchen Bedingungen solche Annahme statthaft ist, lehrt die Dampfmaschinenlehre.)

Dann ist Fig. 378 die tangential zum Kurbelzapfen-Kreise gerichtete, mit a veränderliche Triebkraft für irgend eine Kurbelstellung a:

$$T = P \cdot \sin a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 566$$

(Der radial gerichtete Kraftantheil $Q = P \cdot \cos a$ geht für die Drehwirkung verloren, erzeugt nur Zapfenreibung.)

Für $a = 0$ und 180^0 ist T am kleinsten, nämlich:

$$T = \text{Null (Totlagen der Kurbel).}$$

Für $a = 90$ und 270^0 ist dagegen T am grössten:

$$T = (\pm)\, P.$$

Die stets tangential zum Kurbelzapfen-Kreise wirkende Triebkraft schwankt somit zwischen O und P.

Ferner sei (Fig. 379) W der ebenfalls auf den Kurbelzapfen reducirte, stets tangential zum Kurbelzapfen-Kreise gerichtete, unveränderlich angenommene Widerstand der Arbeitsmaschine.

Sollen P und W sich das Gleichgewicht halten, was für die Fortdauer der Drehbewegung erforderlich ist, so muss nach dem Satze von den mechanischen Arbeiten, die algebraische Summe ihrer mechanischen Arbeiten, z. B. für eine volle Umdrehung, gleich Null sein; oder da W den Weg $2r\pi$ zurücklegt, wenn P einen Hin- und Hergang ausführt:

$$\left.\begin{aligned} W \cdot 2r\pi &= P \cdot 2 \cdot 2r \\ W &= \frac{2}{\pi} P = 0{,}637\, P. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 561$$

Nun ergiebt sich auch leicht derjenige bestimmte Winkel a, für den T gleich W ist; nämlich aus den Gleichungen:

$$T = \sin a \cdot P,$$
$$W = 0{,}637 \cdot P,$$
$$\sin a = 0{,}637,$$
$$a = 40^0 \ (140^0,\ 220^0,\ 320^0).$$

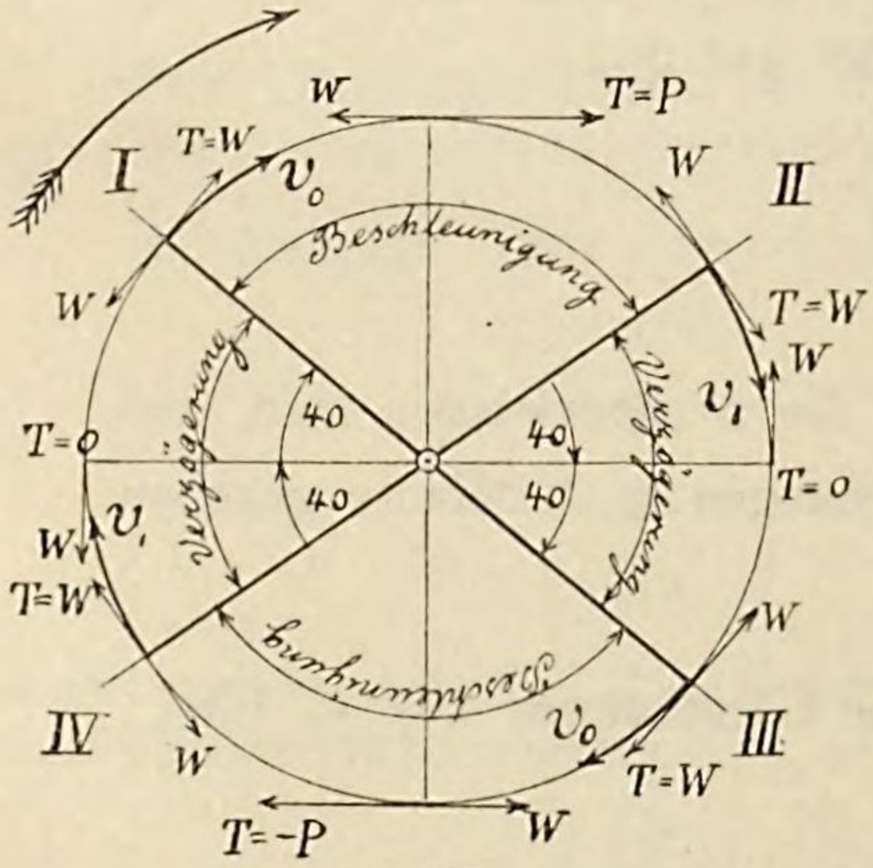


Fig. 379.

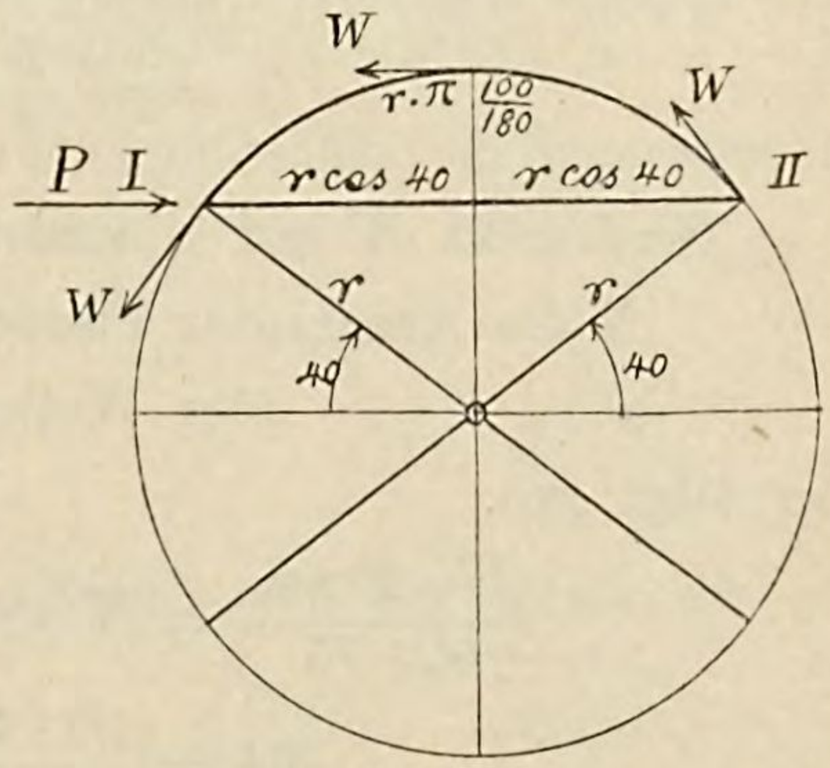


Fig. 380.

In den vier Kurbelstellungen I II III IV der Figur ist T gleich W, in allen anderen entweder grösser oder kleiner.

Ist die Triebkraft $T > W$, so ist Beschleunigung,

ist dagegen $T < W$, so ist Verzögerung vorhanden.

Da ferner am Ende jeder Beschleunigungsperiode die Geschwindigkeit am grössesten, dagegen am Ende jeder Verzögerungsperiode die Geschwindigkeit am kleinsten sein muss, finden, wie sich leicht erkennen lässt, in den Kurbelstellungen II und IV die grössesten Geschwindigkeiten v_1, in den Kurbelbestellungen I und III die kleinsten Geschwindigkeiten v_0 statt.

Diese Schwankungen auszugleichen ist, wie bereits oben erwähnt wurde, Zweck des Schwungrades. Bemerkenswerth ist, dass diese Geschwindigkeitsschwankungen eintreten, obgleich P und W als konstant angenommen wurden. Meistens ist bei den Dampfmaschinen P veränderlich, dann treten jene Schwankungen noch mehr hervor und machen zu ihrem Ausgleich ein noch schwereres Schwungrad erforderlich.

Um nun für den vorliegenden Fall das Gewicht das Schwungrades zu berechnen, ist es erforderlich, in der obigen Gleichung 559 § 290 den Ausdruck $A_k - A_w$ zu bestimmen.

Nach der Figur 380 ist:

$$A_k = P \cdot \text{Sehne I II},$$

$$A_W = W \cdot \text{Bogen I II},$$

folglich:

$$A_k - A_W = P \cdot 2 \cdot r \cdot \cos 40 - Wr\pi \frac{100}{180};$$

$$= \frac{\pi}{2} W \cdot 2 \cdot r \cdot 0{,}77 - Wr\pi \frac{100}{180},$$

$$= Wr \left(\pi \cdot 0{,}77 - \pi \frac{100}{180}\right),$$

$$= W \cdot r \cdot \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 562$$

Dann ist nach den Gleichungen 559 und 562:

$$G = g \cdot \frac{2}{3} i \cdot \frac{Wr}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 563$$

Sind nicht W und r, sondern

N die Anzahl der Pferdekräfte, die zu überwinden sind, und

n „ „ der Wellenumdrehungen in 1 Minute gegeben,

so folgt aus:

$$\frac{W \cdot 2r\pi n}{60 \cdot 75} = N \text{ (Siehe die Gleichungen 167 u. 168)},$$

$$Wr = \frac{60 \cdot 75}{2 \cdot \pi} \frac{N}{n},$$

und obige Gleichung geht über in:

$$G = g\frac{2}{3}\cdot\frac{60\cdot 75}{2\cdot\pi}\cdot\frac{i\cdot N}{n\cdot v^2}$$

$$G = 5000\cdot\frac{i}{v^2}\cdot\frac{N}{n}\ \text{kg} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 564$$

Da ausser dem Ringe auch die Arme des Schwungrades bedeutende lebendige Kraft anzuhäufen befähigt sind, können sie mit einem Drittel ihres Gewichtes (§ 274) in G eingerechnet werden, so dass gesetzt werden kann:

$$G = \textit{Ringgewicht} + \frac{1}{3}\,\textit{Gewicht sämmtlicher Arme} \quad . \ . \ 565$$

Wäre die grösseste Geschwindigkeit im Schwungringe $v_1 = 21$ m,
„ kleinste „ „ „ $v_0 = 20$ m,

so wäre der Gleichförmigkeitsgrad:

$$i = \frac{\frac{v_1 + v_0}{2}}{v_1 - v_0} = \frac{v}{v_1 - v_0} = \frac{20}{21 - 20} = 20 \quad . \ . \ . \ . \ 566$$

Man nehme bei einer eincylindrigen Dampfmaschine:

$i = 20$ bis 30, für Arbeitsmaschinen, die kleine Unregelmässigkeiten in der Bewegung zulassen (Pumpen, Cylindergebläse, Sägemühlen),

$i = 30$ bis 40, für Arbeitsmaschinen, die gleichmässiger arbeiten sollen (Werkzeugmaschinen der Maschinenfabriken),

$i = 40$ bis 60, für Arbeitsmaschinen, die schon sehr gleichmässig arbeiten sollen (Weberei, Spinnerei, Papierfabrik, Mahlmühle),

$i = 60$ bis 150, für Arbeitsmaschinen, von denen man die grösseste Gleichmässigkeit verlangt (Dynamomaschinen, Spinnereien für feine Garne).

Für Arbeitsmaschinen, bei denen W erheblich wechselt, ist den Verhältnissen entsprechend das Gewicht G besonders zu bestimmen.

Beispiel 116: Für eine eincylindrige Dampfmaschine sei angenommen.

$N = 100$

$n = 25$

$v = 20$

$i = 50$,

dann ergiebt sich für das Gewicht des Ringes und der Arme des erforderlichen Schwungrades:

$$G = 5000\,\frac{50}{400}\cdot\frac{100}{25} = 2500\ \text{kg}.$$

c.

Der Centrifugal- oder Schwungkugel-Regulator.

§ 292.

(Es ist vorher das durchzulesen, was in § 117 u. ff. gesagt ist.)

Während das Schwungrad gleichsam Zuckungen der Welle auszugleichen oder plötzlich auftretende Widerstände zu überwinden hat, bezweckt der Regulator den regelrechten Gang (n-Umdrehungen in 1 Minute) der Maschine selbstthätig zu erhalten, wenngleich Triebkraft und Widerstand **dauernd** veränderlich sind. Gegen jene Zuckungen der Welle dagegen soll er unempfindlich sein.

Bei praktischen Anwendungen des Regulators genügt es meistens, das Gewicht der Schwungkugeln und die Anzahl der Umdrehungen der Regulatorachse zu bestimmen, worauf die folgenden Betrachtungen sich beschränken. (Wer ausführlicher die Theorie der Regulatoren studiren will, sehe nach: Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“.)

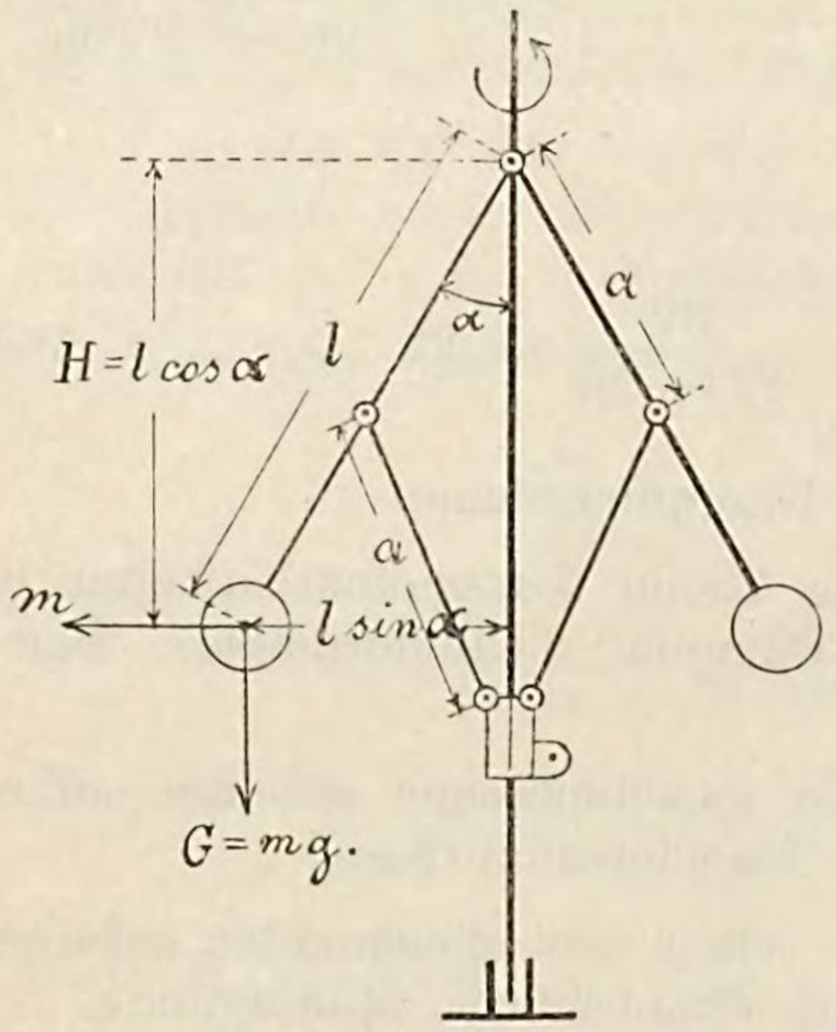


Fig. 381.

Im Folgenden sei bezeichnet mit:

G das Gewicht einer Schwungkugel in Kilogrammen,

l die Länge eines Armes,

a die Länge einer Zugstange,

W der Widerstand, den die Hülse des Regulators einer Verschiebung entgegenstellt (Gewicht der Hülse + Reibungswiderstand),

n die Anzahl der Umdrehungen, welche die Regulatorachse bei regelrechtem Gange der Maschine ausführt,

n_1 diejenige Umdrehungszahl, bei welcher die Hülse steigen bezw. fallen soll,

α der Winkel, welchen bei regelrechtem Gange die Pendelstange mit der Achse einschliesst.

Dann ist nach § 119 für den Beharrungszustand:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}};$$

oder da:

$$\frac{t}{60}\,n = 1,$$

$$n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 567$$

Sollen die Kugeln steigen, so muss die Centrifugalkraft der Kugeln so gross sein, dass sie nicht nur das Gewicht der Kugeln, sondern auch W überwindet. Hierfür ist:

$$n_1 = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{l \cdot \cos a}\left(1 \pm \frac{Wa}{Gl}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 568$$

durch Division folgt:

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{1 \pm \frac{Wa}{Gl}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 569$$

Ferner ist (nach „Redtenbachers, Resultaten“ 1875 S. 241):

$$G = W \frac{\frac{a}{l}}{\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 570$$

Genaueres über Centrifugal-Regulatoren zu finden:

Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“ 1892 I 532 u. ff.
Bernoulli: Dampfmaschinenlehre 1890, S. 366.
Bernoulli: Vademecum 1888, S. 121.
Weisbach-Hermann.
Templeton. 5. Auflage, S. 503.

V.

Reibung.

§ 293.

Einleitende Bemerkungen. Bei allen bislang erörterten Bewegungsvorgängen ist eine eigenthümliche Kraft, die in der Natur und Kunst eine hervorragende Bedeutung hat, noch nicht berücksichtigt, nämlich die Reibung.

Sie äussert sich erfahrungsgemäss bei jeder Bewegung (auch während der Ruhe) in allen den Punkten der Oberfläche eines Körpers, mit denen dieser über die Oberfläche eines anderen sich hinbewegt oder hinzubewegen strebt, und kann als eine Folge der Unebenheiten der Oberflächen, die gleichsam zahnartig ineinandergreifen, angesehen werden Fig. 382. Deshalb wird sie vermindert durch alle Mittel zur Beseitigung oder Ausgleichung dieser Unebenheiten (Poliren, Schmieren).

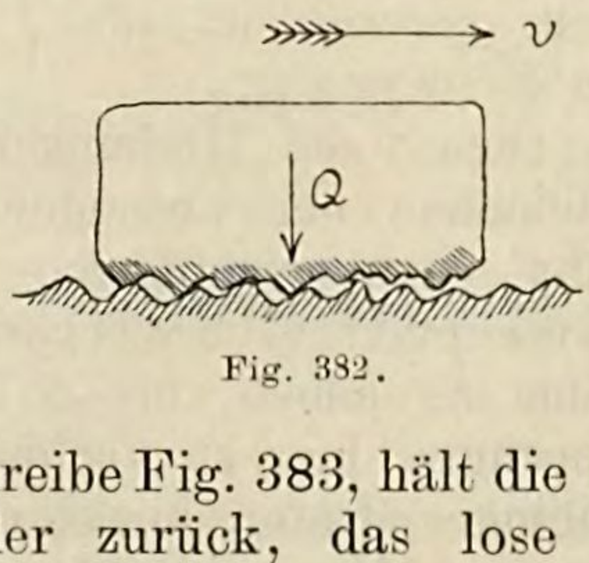


Fig. 382.

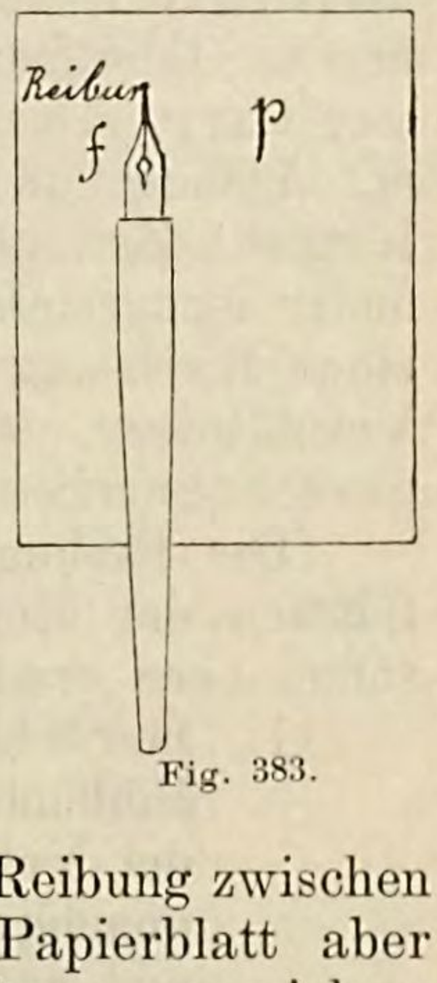


Fig. 383.

Wie für alle Kräfte, so gilt auch für die Reibung das Gesetz der Wechselwirkung (§ 8). Den einen der beiden übereinander her sich bewegenden Körper sucht sie zurückzuhalten, den anderen mit sich fortzureissen. Während ich schreibe Fig. 383, hält die Reibung zwischen Feder f und Papier p die Feder zurück, das lose Papierblatt aber wird durch die Feder in der Richtung der Bewegung fortgerissen, wenn ich es nicht festhalte. Je glatter das Papier, je glatter (und breiter) die Feder, desto geringer die Reibung. Beim Riementrieb wird an der Auflaufstelle

durch die Reibung der Riemen zurückgehalten, die Scheibe trotz Widerstand mit fortgerissen und in die bezweckte Umdrehung versetzt; Oel zwischen Scheibenumfang und Riemen gebracht, würde dagegen hier die Reibung so vermindern, dass die Scheibe wieder zur Ruhe kommt. Bei der Brandbremse (§ 303) wird durch die Reibung die Scheibe zurückgehalten, das Band dagegen mitzureissen gesucht. Während, wie hier, in unzähligen Fällen die Reibung unerlässlich ist, Bewegung zu übertragen, überwinden wir sie nicht minder oft gewaltsam, um sie dann als Bewegungshinderniss auszunutzen: denn Reibung überwinden wir, indem wir gewaltsam den Keil, den Nagel eintreiben, die Mutter der Schraube anziehen. Reibung schützt den Keil, den Nagel, die Mutter dann vor dem Zurückspringen.

Die Reibung, welche auf dem Festlande den Sturm zurückhält und schwächt, thürmt das Meer zu Bergen auf. Ausgegossenes Oel soll hier die Wirkung des Windes vermindern und so das Meer besänftigen.*)

Mit vollkommen glatten Sohlen würden wir auf wagerechter, vollkommen glatter Eisfläche uns um keines Haares Breite fortbewegen können (Siehe auch Seite 252). Also auch hier beim Ausschreiten ist Reibung ein Erforderniss zur Fortbewegung, indem sie dem Fusse die erforderliche Standhaftigkeit verleiht.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie die Reibung in Natur und Kunst, im Kleinen sowie im Grossen in ihrer Wechselwirkung eine so hervorragende Bedeutung hat: Mittel ist, hier Bewegung zu hindern, dort Bewegung zu übertragen.

§ 294.

Die bereits oben zur Erklärung der Reibung gemachte Annahme, dass selbst bei den glattesten Berührungsflächen zweier Körper zahnartige Erhöhungen gegenseitig ineinandergreifen und während der Bewegung des einen Körpers über den anderen, entweder zum Theil umgebogen und abgerissen werden müssen, oder auch, wenn sie stand halten, ein Uebersiehinwegheben des oberen Körpers erfordern, erklärt zugleich die Thatsache, dass die Reibung wächst, sowohl mit dem Normaldrucke Q Fig. 382, der die Gleitflächen mit ihren Unebenheiten fest aufeinander presst, als auch mit Abnahme der Geschwindigkeit v, und ist für $v = 0$, d. h. am Anfange und am Ende der Bewegung am grössesten, weil jetzt den Körpern Zeit gelassen wird, möglichst tief mit ihren Unebenheiten ineinander einzugreifen. Man unterscheidet deshalb auch eine Reibung, bezw. einen Reibungskoëffizienten der Ruhe f_0, der unter sonst gleichen Verhältnissen stets grösser ist als f, der Reibungskoëffizient der gleichförmigen Bewegung.

Die Reibung (bezw. der Reibungskoëffizient) lässt sich ausser durch Glätten der Reibflächen noch besonders durch zwei Mittel, die flüchtig schon oben erwähnt sind, vermindern:

1. Die Schmiermittel bezwecken gleichsam Berg und Thal auf den Reibflächen zu ebnen, um so das gegenseitige Ineinandergreifen der Vorsprünge hier zu verhüten, sollten deshalb im allgemeinen unnachgiebiger (fester, konsistenter) sein bei rauheren Reibflächen und grösserem Normaldrucke Q.

*) Neuerdings erklärt man die Beruhigung der Meereswellen durch die in Folge der Oelschicht veränderte Oberflächenspannung.

2. Die Vergrösserung der Flächen, bezw. die Verminderung des spezifischen Druckes (§ 236) vermindert wohl nicht wesentlich und nicht unmittelbar die Reibung, aber, was der Techniker besonders anzustreben hat, die Erwärmung und die Abnutzung und Zerstörung („Zerfressen“) der Reibflächen.

Da ein geeignetes Schmiermittel die übereinanderher sich bewegenden Flächen ausser gegen Abnutzung, auch noch gegen die schädlichen Einflüsse der Atmosphäre schützt, so sollte man, wenn thunlich (selbst da, wo man von der Reibung Nutzen zieht, also bei Reibungsrädern, Riemen-Seil-Trieben) jene Flächen wenigstens schwach eingefettet erhalten, und so gross wählen, dass durch den spezifischen Druck diese Fettschicht nicht fortgedrückt wird. Letzteres sollte besonders beachtet werden bei den Zapfen der Wellen und Kurbeln und bei Gleitbahnen aller sogen. Gradführungen.

Dann aber hängt die Grösse der Reibung auch weniger von dem Stoffe der übereinander her sich bewegenden Körper, als insbesondere von der Eigenschaft der gewählten Schmiermittel ab, und man müsste seine Aufmerksamkeit besonders diesen zuwenden. Auch wird der Techniker, der nicht mit der Fläche geizt, noch in zweiter Linie den grossen Vortheil haben, dass ihm das Warmlaufen und die Abnutzung seiner Maschinen (Zapfenlager) keine Noth machen. Noch soll nicht unerwähnt bleiben, dass in dem Maasse, wie der spezifische Druck abnimmt, die Adhäsion, sowie die Kohäsion des angewandten Schmiermittels in den Vordergrund treten und die Reibung scheinbar vermehren werden. Schliessen die Gleitflächen luftdicht aufeinander, so ist auch der grössere Luftdruck nicht ohne Einfluss auf die Grösse der Reibung.

Nach den Versuchen von Amontons (1699), Coulomb und Morin (1831) halten noch neuere Schriftsteller die Reibung unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche.

Reuleaux, Theor. Kinem. 1875, S. 601 verwirft das Festhalten an den drei Coulomb-Morin'schen Sätzen: 1. von der Proportionalität zwischen Reibung und Normaldruck, 2. von der Unabhängigkeit zwischen Reibung und Grösse der Berührungsfläche, 3. von der Unabhängigkeit zwischen Reibung und Geschwindigkeit. Man sehe auch: Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1887, S. 454. Ferner: Mittheilungen aus der Königl. technischen Versuchsanstalt 1888 (Schmiermittel).

Immerhin scheinen der Einfluss der Grösse des spezifischen Druckes, der Temperatur, der Beschaffenheit des Schmiermittels, der Zustand der Reibflächen, und bei hohen Belastungen, die Dauer der Inanspruchnahme, sowie andere Umstände noch nicht genügend aufgeklärt zu sein.

A.

Gleitende Reibung.

a.

Reibungskoëffizient f, Reibungswinkel φ.

§ 295.

Reibungskoëffizient. Um den Einfluss der Reibung auf einen bestimmten Bewegungsvorgang zu ermitteln, müssen die Lage, Richtung und Grösse dieser Kraft, die wieder durch eine gerade Linie mit Pfeilspitze dargestellt werden soll, bestimmt sein.

Die Reibung W liegt:

1. tangential zu den Reibflächen; ist
2. stets entgegengesetzt der Bewegungsrichtung einzuführen für denjenigen Körper K, für den sie als Bewegungshinderniss (Reibungswiderstand) auftritt (auf die Backen B der Bremse [Fig. 386] wirkt die Reibung dagegen in der Richtung der punktirten Pfeile),

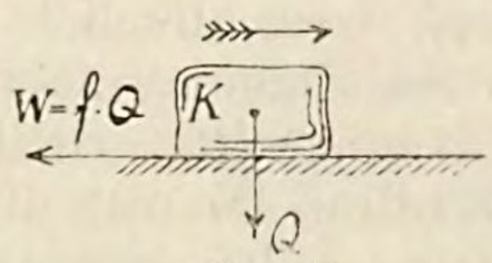


Fig. 384.

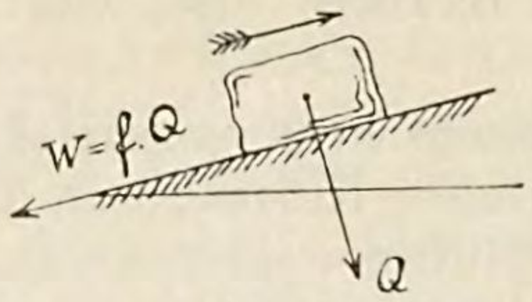


Fig. 385.

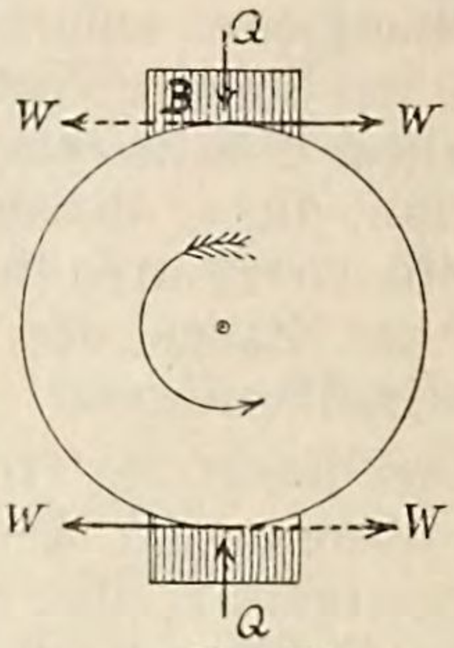


Fig. 386.

3 wächst mit dem Normaldrucke Q (d. h. mit den senkrecht zu den Berührungsflächen gerichteten Drucke) Fig. 384, 385, 386,

4. wächst mit dem sogen. Reibungskoëffizienten f, einem durch Versuche für die besonderen Fälle ermittelten Werthe, der stets der Gleichung:

$$f < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 571$$

genügt, übrigens von der Beschaffenheit (Eigenart, Glätte) der Berührungsflächen abhängt.

Das Reibungsgesetz ist somit in einfachster Form durch die Gleichung

$$\boxed{W = f \cdot Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 572$$

Reibung = Reibungskoëff. × Normaldruck

ausgedrückt.

Diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um die Reibung zu überwinden, muss mindestens

$$P = W = f \cdot Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 573$$

sein. Sind P und Q bekannt, so lässt sich daraus der Reibungskoëffizient:

$$f = \frac{P}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 574$$

ermitteln.

Wird in der Richtung der Reibung ein Weg s Meter in einer Minute zurückgelegt, so ist, wenn Q in Kilogrammen gegeben ist, die mechanische Arbeit der Reibung:

$$A = Ws = fQ \cdot s \text{ mkg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 575.$$

der Effekt:

$$E = \frac{Ws}{60} = \frac{fQ \cdot s}{60} \text{ mkg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 576$$

folglich in Pferdekräften:

$$N = \frac{Ws}{60 \cdot 75} = \frac{f\,Q \cdot s}{60 \cdot 75} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 577$$

Zusammenstellung einiger Grenzwerthe*) der Reibungskoëffizienten f bei glatten Gleitflächen.

Ohne Schmiermittel.

			Mindestwerth	Höchstwerth
Metall	auf	Metall	0,10	0,30 (bis 0,40)
Holz	„	Holz	0,20	0,70
Stein	„	Stein	0,40	0,75
Eis	„	Eis	0,02	0,03
Metall	„	Holz	0,10	0,60
„	„	Stein	0,24	0,50
Stahl	„	Eis	0,01	0,03
Leder	„	Metall (Riemenscheiben)	0,25	0,60
„	„	Holz	0,25	0,75
Hanf	„	„	0,40	0,80
Holz	„	Stein	0,30	0,65

Mit geeigneten Schmiermitteln.

Metall	auf	Metall	0,009	0,10
Holz	„	Holz	0,02	0,10
Metall	„	„	0,02	0,10
Leder	„	Metall	0,12	0,25

Um sicher zu gehen, wird man in allen Fällen, in denen die Reibung schädlich ist, die grösseren Werthe von f, dagegen in denjenigen Fällen, in denen man die Reibung ausnutzt, die kleineren Werthe von f einführen.

§ 296.

Reibungswinkel (φ). Neigt man die Unterstützungsebene E (Fig. 387) eines Körpers (vom Gewichte G) mehr und mehr, so wird bei einem bestimmten Neigungswinkel φ eben gleichförmiges Hinabgleiten eintreten.

Für diesen Winkel gilt dann:

Herabgleitungstrieb (S) = *Reibungswiderstand* (W)

$$G \sin\varphi = f \cdot G \cos\varphi,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = f,$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 578$$

*) Siehe auch: Ritter, Techn. Mech. 1892, S. 267, Anmerkungen.

Dieser kleinste Winkel φ, bei dem eben Gleiten eintritt, heisst Reibungswinkel und kann dazu benutzt werden, den Reibungskoëffizienten f für die betreffenden Reibflächen zu bestimmen.

Hätte man z. B. gefunden, dass eine Eichenholzplatte K auf einer Eichenholzplatte E eben gleichförmig hinunterglitt, wenn man letztere um den Winkel $\varphi = 25^0$ gegen die Wagerechte neigte, so wäre der Reibungskoëffizient für Eiche auf Eiche von derselben Beschaffenheit der hier benutzten Hölzer:

$$f = \operatorname{tg} 25^0 = 0{,}47.$$

In Folgenden werden wir oft den Reibungskoëffizienten f mit $tg\varphi$, also mit der trigonometrischen Tangente des Reibungswinkels, vertauschen.

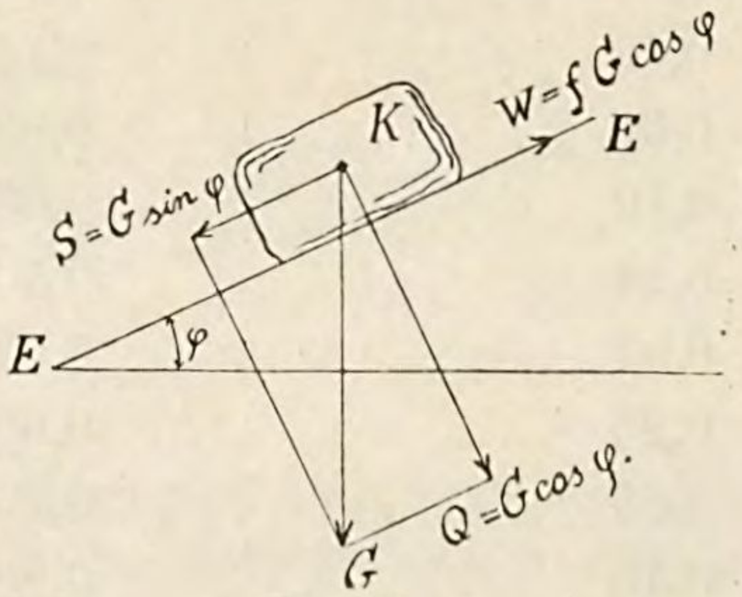


Fig. 387.

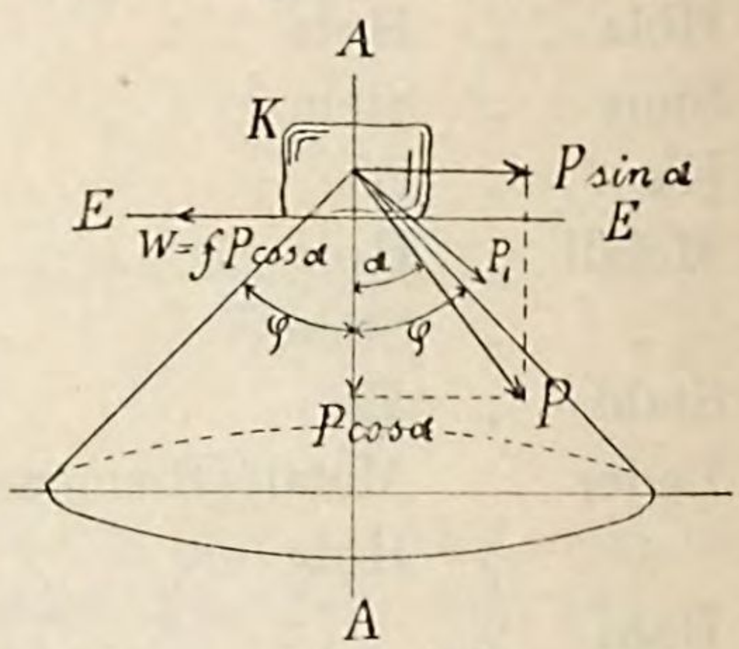


Fig. 388.

§ 297.

Reibungskegel (Fig. 388). P sei die Mittelkraft aus allen auf den Körper einwirkenden Kräften (mit Einschluss des Gewichtes), so wird dieselbe den Körper nicht in Bewegung setzen können, wie gross sie auch sei, wenn:

$$W \leqq P \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 579$$

$$f \cdot P \cos \alpha \leqq P \sin \alpha,$$

$$f \leqq \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &\geqq tg\, \alpha \\ \alpha &\leqq \varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 580$$

also:

Der in der Figur verzeichnete Kegel, dessen Erzeugende mit der senkrecht zur Ebene E gerichteten Achse AA den Reibungswinkel φ (für die übereinander hergleitenden Flächen) einschliesst, heisst Reibungskegel.

Alle Kräfte P, die innerhalb dieses Kegels liegen, sind nicht im Stande den Körper K auf seiner Ebene E fortzubewegen. Dagegen würde jede ausserhalb des Kegels liegende noch so kleine Kraft P_1 Bewegung herbeiführen.

b.

Schiefe Ebene.

§ 298.

Es soll die Kraft P ermittelt werden, die erforderlich ist, um einen Körper auf einer schiefen Ebene gleichförmig emporzuziehen.

Der Neigungswinkel zwischen der schiefen Ebene und dem Horizont sei . . . . . a^0,
der Winkel zwischen Kraftrichtung und schiefen Ebene betrage . . . . . b^0,
das Gewicht des Körpers sei . . . G.

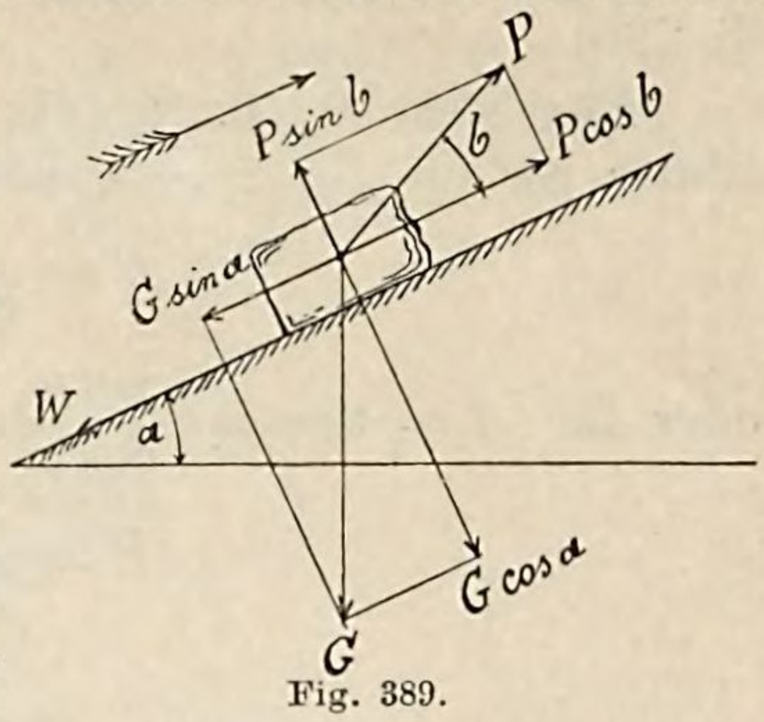


Fig. 389.

Dann ergiebt sich, wenn man sowohl G als auch P je senkrecht und parallel zur schiefen Ebene zerlegt, für die in die Richtung der Bewegung, d. h. parallel zur schiefen Ebene fallenden Kräfte die Gleichung:

$$P \cos b = G \sin a + W$$
$$= G \sin a + f(G \cos a - P \sin b)$$
$$P \cos b + fP \sin b = G \sin a + f\, G \cos a$$

$$\boxed{P = \frac{\sin a + f \cdot \cos a}{\cos b + f \cdot \sin b} \cdot G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 581$$

oder, wenn man den Reibungskoëffizienten durch den Reibungswinkel ersetzt, also

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

einführt:

$$P = \frac{\sin a \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos a}{\cos b \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sin b} \cdot G,$$

$$P = \frac{\sin (a + \varphi)}{\cos (b - \varphi)} \cdot G \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 582$$

Für $b = \varphi$, also $\cos (b - \varphi) = \cos 0 = 1$ erreicht P den kleinsten Werth; nämlich:

$$P_{min} = \sin (a + \varphi) \cdot G.$$

Für $b = 0$, d. h. für eine Kraft parallel zur schiefen Ebene, ist:

$$\boxed{P = (\sin a + f \cdot \cos a) \cdot G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 583$$

Nach dieser Gleichung würde der Zug im Seile zu berechnen sein bei der Förderung in einem tonnlägigen Schachte (dessen Tonnlage, d. h. Neigung gegen den Horizont durch den Winkel a bestimmt ist).

Für $b = -a$, d. h. für eine horizontale Kraft ist:

$$P = \frac{\sin a + f \cdot \cos a}{\cos a - f \cdot \sin a} \cdot G,$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner durch cos a theilt:

$$\boxed{P = \frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f \operatorname{tg} a} \cdot G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 584$$

Diese letzte Gleichung ist wichtig für die Theorie der Schraube (§ 299).

Für $a = 0$, d. h. für die Fortbewegung auf einer wagerechten Ebene ist:

$$P = \frac{f}{\cos b + f \cdot \sin b} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots \quad 585$$

oder für $f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$:

$$P = \frac{\sin \varphi}{\cos b \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sin b} \cdot G,$$

$$= \frac{\sin \varphi}{\cos (b - \varphi)} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots \quad 586$$

aus der letzten Gleichung folgt für $b = \varphi$, also $\cos (b - \varphi) = 1$:

$$P_{min} = \sin \varphi \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots \quad 587$$

Schliesslich ergiebt sich:

für $b = 0$

und $a = 0$

wiederum die erste Gleichung (§ 295) für die Bewegung auf einer horizontalen Ebene durch eine horizontal gerichtete Kraft:

$$P = f \cdot G \text{ (Gleichung 572)},$$

da G hier der Normaldruck ist, welchen wir oben mit Q bezeichneten.

Soll die Kraft P den Körper nicht auf der schiefen Ebene emporziehen, sondern nur verhindern, dass derselbe mit Beschleunigung abwärts gleitet, so ist für diese Abwärtsbewegung die Reibung W aufwärts gerichtet, kurz entgegengesetzt, einzuführen. In den Gleichungen führen wir demnach dieses gleichförmige Hinunterlassen, d. i. denjenigen Bewegungsvorgang, den der Bergmann „hängen“ nennt, ein, wenn wir alle diejenigen Glieder, die mit f behaftet sind, mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen.

Also würde für das Hängen die Hauptgleichung (581) heissen:

$$P = \frac{\sin a - f \cdot \cos a}{\cos b - f \cdot \sin b} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots \quad 588$$

welche sich auch aus der Gleichung: $P \cos b + W = G \sin a$ ergiebt.

§ 299.

Die flachgängige Schraube. Eine der wichtigsten Verwerthungen der schiefen Ebene findet sich bei der Schraube, einem der ältesten und verbreitetsten technischen Hülfsmittel.

Wir finden unter anderem in der Technik die Schraube als: Befestigungsschraube, Klemm-, Druck-, Stellschraube, Fortbewegungsschraube für feste, flüssige, gasförmige Körper, Schiffsschraube, Mikrometerschraube, Schraube ohne Ende.

Wird, wie die Fig. 390 andeutet, die schiefe Ebene in der Form eines prismatischen Stabes von rechteckförmigem Querschnitte auf einen Cylinder (eine Spindel) aufgewickelt, so entsteht die flachgängige Schraube, für welche dann ebenfalls jene Gleichung gilt, die im voran-

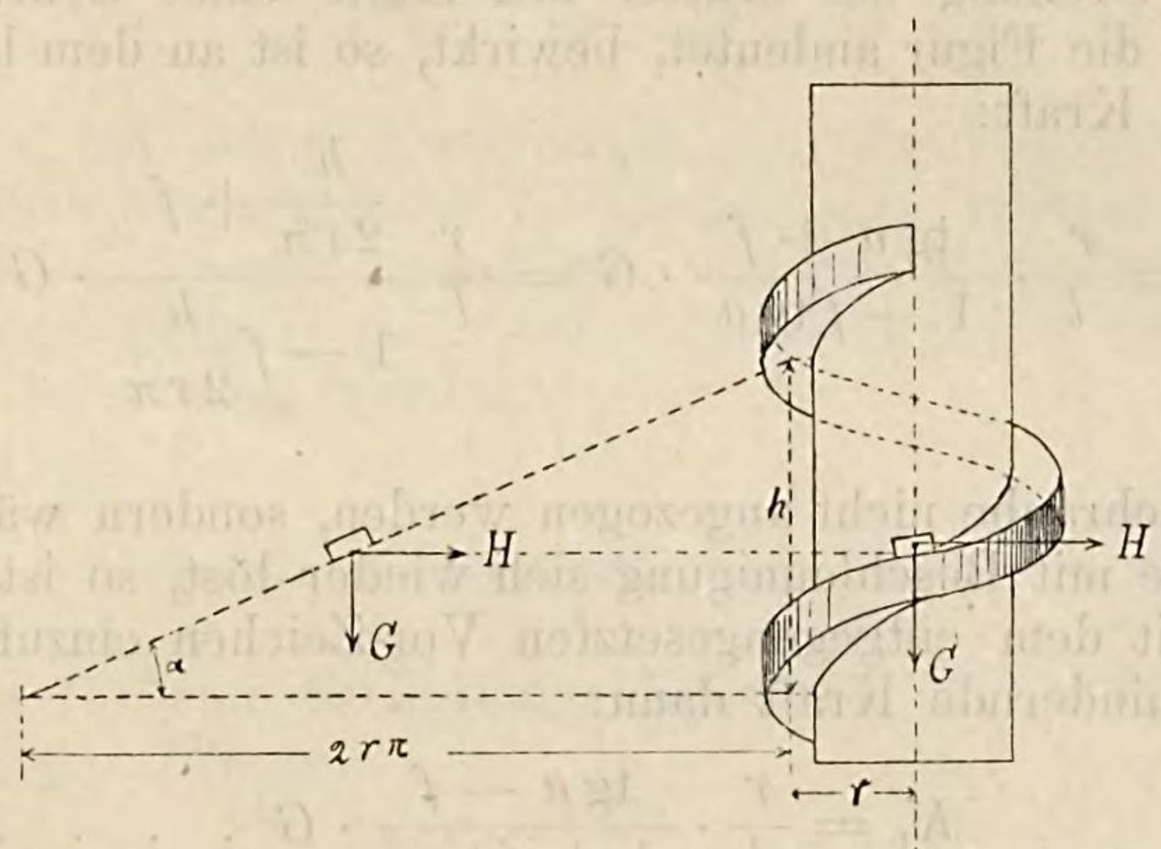


Fig. 390.

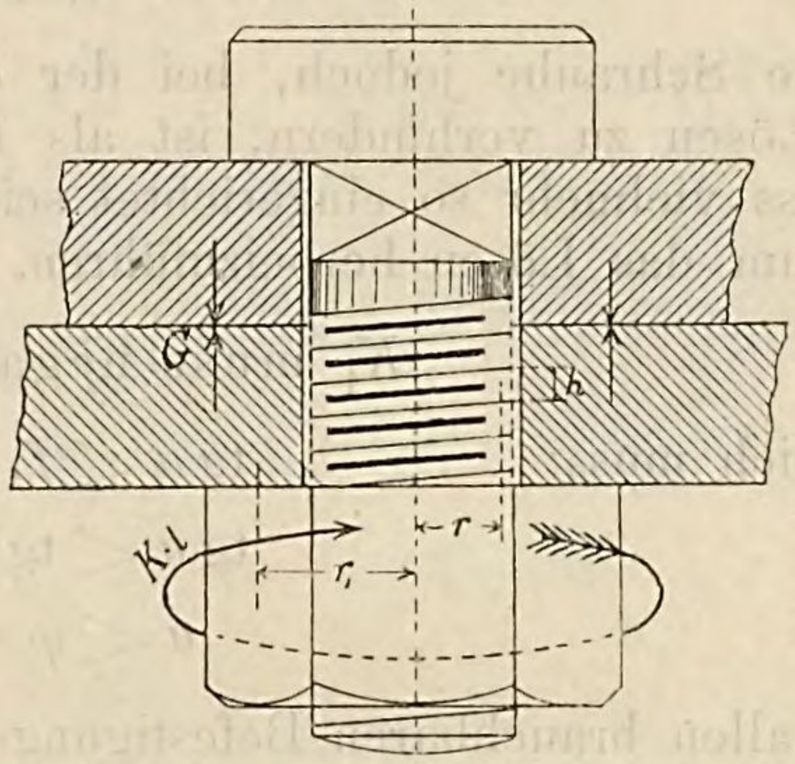


Fig. 391.

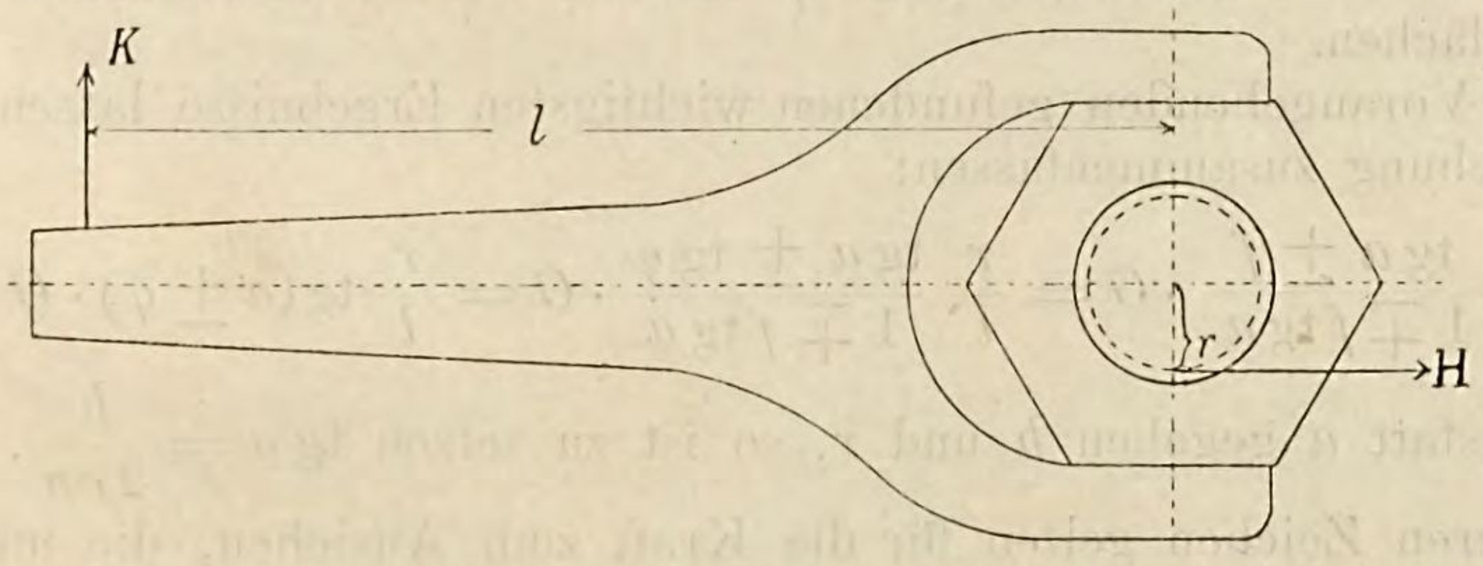


Fig. 392.

stehenden Paragraphen mit Hindeutung auf die Theorie der Schraube abgeleitet wurde:

$$P = \frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f \cdot \operatorname{tg} a} \cdot G \text{ (Gleichung 584).}$$

Der längs der schiefen Ebene bewegte Körper ist als Schrauben-Mutter anzusehen. G ist der Druck, mit welchem die Mutter und Spindel in der Richtung der Achse aufeinander einwirken. Dient die Schraube

z. B. zur Befestigung zweier Platten (Fig. 391), so ist G der Druck zwischen diesen, wenn die Schraube, wie man zu sagen pflegt, angezogen wird. H dagegen ist die senkrecht zu G und tangential zum Kreise vom Halbmesser r wirkende (Dreh-) Kraft (Fig. 392).

Wird die Drehung der Mutter mit Hülfe eines Schraubenschlüssels (Fig. 392), wie die Figur andeutet, bewirkt, so ist an dem längeren Hebelarme l nur die Kraft:

$$K = \frac{r}{l} \cdot \frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f \operatorname{tg} a} \cdot G = \frac{r}{l} \frac{\frac{h}{2r\pi} + f}{1 - f\frac{h}{2r\pi}} \cdot G \quad . \quad . \quad . \quad 589$$

erforderlich.

Soll die Schraube nicht angezogen werden, sondern wäre nur zu verhindern, dass sie mit Beschleunigung sich wieder löst, so ist der Reibungskoëffizient f mit dem entgegengesetzten Vor-Zeichen einzuführen und die das Lösen verhindernde Kraft dann:

$$K_1 = \frac{r}{l} \cdot \frac{\operatorname{tg} a - f}{1 + f \operatorname{tg} a} \cdot G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 590$$

Solche Schraube jedoch, bei der eine Kraft K_1 erforderlich wäre, um das Lösen zu verhindern, ist als Befestigungsschraube unbrauchbar. Diese muss vielmehr so eingerichtet sein, dass sogar eine Kraft erforderlich ist, um das Lösen herbeizuführen. Oder durch die Gleichung ausgedrückt:

K_1 muss negativ sein.

Folglich muss:

$$\operatorname{tg} a < f,$$

$$\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a < \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 591$$

d. h. bei allen brauchbaren Befestigungsschrauben, der Steigungswinkel a kleiner sein als der Reibungswinkel φ für die beiden übereinander hergleitenden Flächen.

Die im Vorangehenden gefundenen wichtigsten Ergebnisse lassen sich in eine Gleichung zusammenfassen:

$$K = \frac{r}{l} \frac{\operatorname{tg} a \pm f}{1 \mp f \operatorname{tg} a} \cdot G = \frac{r}{l} \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp f \operatorname{tg} a} \cdot G = \frac{r}{l} \operatorname{tg}(a \pm \varphi) \cdot G \quad 592$$

Sind anstatt a gegeben h und r, so ist zu setzen $\operatorname{tg} a = \frac{h}{2r\pi}$.

Die oberen Zeichen gelten für die Kraft zum Anziehen, die unteren für die Kraft, die das freiwillige Sichlösen der Mutter verhindern soll. Für jede brauchbare Befestigungs-Schraube muss die letztere Kraft negativ ausfallen, d. h. $\operatorname{tg} a < f$; $a < \varphi$ sein.

Für Spindel und Mutter aus schmiedbarem Eisen (oder Bronze) kann man bei regelrechtem Zustande der Gewindeflächen annehmen:

$$f = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}15 \quad \text{bis} \quad 0{,}18 \text{ (Reibflächen angefettet)},$$

$$\varphi = 8\frac{1}{2}^{0} \quad \text{bis} \quad 10\frac{1}{6}^{0}.$$

Häufig werden in den Lehrbüchern hier zu kleine Werthe angenommen. Bei obiger Annahme müsste demnach für eine brauchbare flachgängige Befestigungsschraube aus schmiedbarem Eisen der Steigungswinkel:

$$a < 8\frac{1}{2}^{0} \text{ sein.}$$

Schrauben, bei denen Fortbewegung in der Achsenrichtung Hauptzweck ist, erhalten häufig grössere Steigungswinkel (Mehrgängige Schrauben, Maschinenbau). Uebrigens wendet man meistens als Befestigungsschrauben die noch grössere Reibung gebenden scharfgängigen Schrauben an, die im Folgenden besprochen werden.

Beispiel 117:

$$\text{Ist } r = 2 \text{ cm}, \quad l = 40 \text{ cm}, \quad a = 3^{0}, \quad \varphi = 8\frac{1}{2}^{0},$$

so ergiebt sich für eine flachgängige Schraube und Mutter aus schmiedbarem Eisen (oder Bronze):
zum Anziehen:

$$K = \frac{r}{l}\operatorname{tg}\left(3 + 8\frac{1}{2}\right)G = 0{,}2\,\frac{r}{l}\,G,$$

$$= \frac{2}{40}\cdot 0{,}2\,G \qquad = 0{,}01\,G,$$

zum Anhalten, d. h. zum Verhindern des freiwilligen Wiederlosdrehens:

$$K = \frac{r}{l}\operatorname{tg}\left(3 - 8\frac{1}{2}\right)G = -\,0{,}096\,\frac{r}{l}\,G,$$

$$= -\,0{,}0048\,G,$$

zum Lösen wäre erforderlich:

$$K = +\,0{,}096\,\frac{r}{l}\,G = +\,0{,}0048\,G.$$

Eine erhebliche Reibung findet noch statt zwischen der Mutter und der Unterlegplatte. Mit Berücksichtigung dieser ist die Kraft zum Anziehen:

$$K = \frac{r}{l}\left[\operatorname{tg}(a+\varphi)\,G + f\,\frac{r_1}{r}\right]G \quad \ldots\ldots\ 593$$

Werden die obigen Zahlenwerthe beibehalten; wird ferner angenommen als Reibungskoëffizient zwischen Mutter und Unterlegplatte . . . $f = 0{,}15$ und als mittlerer Halbmesser der Mutter . . . $r_1 = 3$ cm (Siehe Fig. 391), so ist für das Anziehen erforderlich:

$$K = \frac{r}{l}\left[\operatorname{tg}\left(3 + 8\frac{1}{2}\right)G + 0{,}15\cdot\frac{3}{2}\,G\right]$$

$$= \frac{r}{l}\left[0{,}2\cdot G + 0{,}225\,G\right],$$

$$= \frac{2}{40}\cdot 0{,}425\,G = 0{,}021\,G.$$

Die Reibung zwischen Mutter und Platte ist etwa ebenso gross wie im Inneren des Gewindes.

Ohne Reibung, d. i. für $f = 0$, und $\varphi = 0$, wäre zum Anziehen erforderlich:

$$K_0 = \frac{r}{l} \cdot \operatorname{tg} a \cdot G \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 594$$

$$K_0 = \frac{2}{40} \cdot 0{,}052 \cdot G = 0{,}0026\ G,$$

danach das Verhältniss:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{0{,}021}{0{,}0026} = \text{etwa } 8 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 595$$

In Folge der Reibung beansprucht unsere flachgängige Schraube demnach eine achtmal so grosse Kraft zum Anziehen, wie wenn keine Reibung vorhanden wäre. Bei unsorgfältiger Herstellung würde das Verhältniss noch ungünstiger werden.

Der Techniker darf deshalb bei Kraftübertragungen durch die Schraube (bei denen der Winkel a meist weit grösser ist, als in unserem Beispiele angenommen wird) die Reibung nicht vernachlässigen und muss durch sorgfältige Bearbeitung und Schmierung der übereinander hergleitenden Flächen die Reibung so viel als thunlich herabmindern.

Die scharfgängige Schraube. Bei dieser ist der Querschnitt des Gewindeganges ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel $2\beta = 55^0$ (nach Whitworth's System).

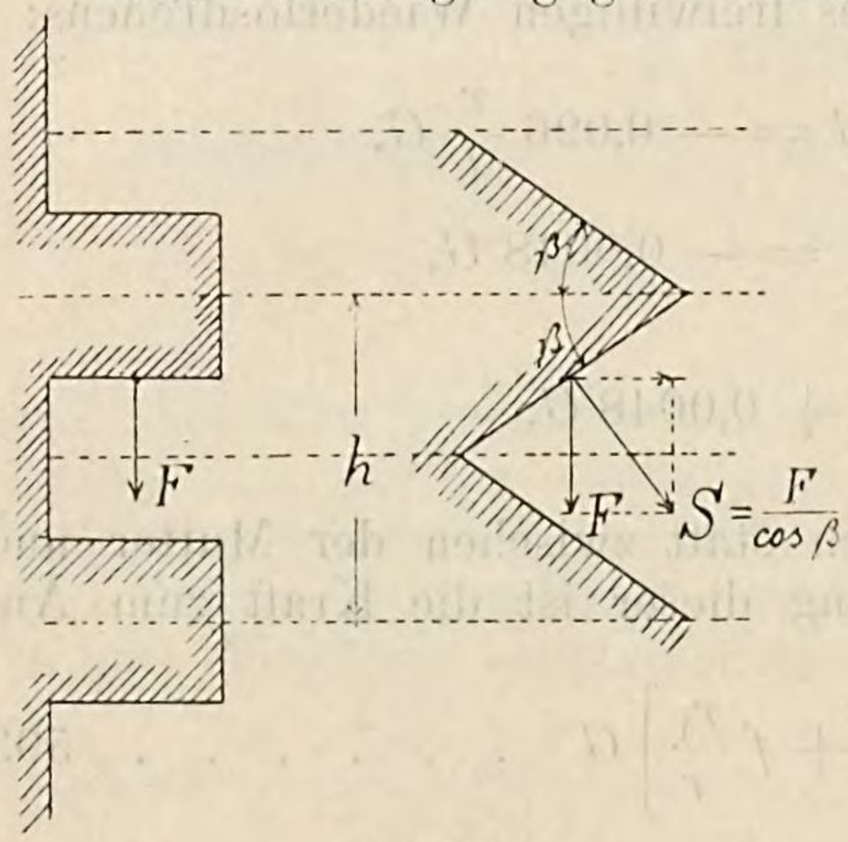


Fig. 393.

Bezeichnet man den Normaldruck auf den Gewindegang der flachgängigen Schraube mit F, der scharfgängigen mit S, so ist:

$$S = \frac{F}{\cos \beta} \quad \ldots \ldots \quad 596$$

In diesem Verhältnisse ist dann auch die Reibung der scharfgängigen Schraube grösser als die der flachgängigen.

Es gelten deshalb auch hier ohne Weiteres die oben abgeleiteten Formeln, wenn man anstatt f einsetzt:

$$f^1 = \frac{f}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \varphi^1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 597$$

so dass für die scharfgängige Schraube die Gleichung gilt;

$$K = \frac{r}{l} \frac{\operatorname{tg} a \pm f^1}{1 \mp f^1 \operatorname{tg} a} \cdot G = \frac{r}{l} \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} \varphi^1}{1 \mp \operatorname{tg} \varphi^1 \operatorname{tg} a} \cdot G = \frac{r}{l} \operatorname{tg} (a \pm \varphi^1)\, G \quad 598$$

Man könnte f^1 als Reibungskoëffizienten, φ^1 als Reibungswinkel der scharfgängigen Schraube ansehen.

Für Schrauben aus schmiedbarem Eisen kann angenommen werden:

$$f^1 = \operatorname{tg}\varphi^1 = \frac{f}{\cos\beta} = \frac{0{,}15}{\cos 27{,}5} \quad \text{bis} \quad \frac{0{,}18}{\cos 27{,}5}$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}887} \quad „ \quad \frac{0{,}18}{0{,}887}$$

$$f^1 = 0{,}17 \quad „ \quad 0{,}20$$

$$\varphi^1 = 9^0 \quad „ \quad 11^0\,20'.$$

Bei einer brauchbaren, scharfgängigen Schraube aus schmiedbarem Eisen müsste demnach der Steigungswinkel:

$$a < 9^0 \text{ sein.}$$

In der Formel 598 für K gelten ebenfalls die oberen Zeichen für das Anziehen, die unteren für das Lösen der Schraube. Im letzteren Falle muss sich für Befestigungsschrauben eine negative Kraft ergeben.

Beispiel 118: Setzt man im Mittel:

$$a = 3^0, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg} a = 0{,}052; \quad f^1 = 0{,}17,$$

so ist:

$$K = \frac{r}{l}\,\frac{0{,}052 + 0{,}17}{1 - 0{,}17 \cdot 0{,}052} \cdot G$$

$$= \frac{r}{l} \cdot 0{,}22 \cdot G.$$

Für:

$$r = 2 \quad \text{Centimeter},$$

$$l = 40 \quad „$$

folgt:

$$K = \frac{2}{40} \cdot 0{,}22 \cdot G = 0{,}011\ G.$$

Um demnach mittelst dieser Schraube zwei Platten mit $G = 1000$ kg zusammenzupressen, hätte der Arbeiter am Ende des Schraubenschlüssels nur eine Kraft von 11 kg auszuüben. Die Kraft G tritt auch als Zugbeanspruchung des Schraubenbolzens auf. Wendete der Arbeiter seine volle Kraft ruckweise und mit Zuhülfenahme seines Körpergewichtes an, oder triebe er sogar durch wuchtige Hammerschläge gegen das Ende des Schraubenschlüssels die Mutter an, was übrigens streng untersagt werden sollte, so könnte sich K steigern auf 100 kg und darüber. In diesem Falle würde in dem Schraubenbolzen (abgesehen von der noch hinzukommenden abwürgenden Wirkung) eine Zugbeanspruchung auftreten, der er nicht gewachsen ist, nämlich:

$$G = \frac{K}{0{,}011} = \frac{100}{0{,}011} = \text{nahezu } 10\,000 \text{ kg.}$$

Dieses Beispiel zeigt, welcher inneren erheblichen Anstrengung ein Schraubenbolzen durch ungebührliches Anziehen der Mutter ausgesetzt werden kann. Der Maschinentechniker hat deshalb bei Berechnung der

Dicke des Schraubenbolzens genügend sicher zu gehen. (Näheres ist im Maschinenbau zu finden.)

Beispiel 119: Mit Berücksichtigung der Reibung zwischen Mutter und Unterlage würde man erhalten als Kraft zum Anziehen:

$$K = \frac{r}{l}\left(\frac{\operatorname{tg} a + f^1}{1 - f^1 \operatorname{tg} a} + f\frac{r_1}{r}\right)G = \frac{r}{l}(0{,}22 + 0{,}225)\,G = \frac{r}{l}\,0{,}445\,G \quad 599$$

wenn mit $f = 0{,}15$ der Reibungskoëffizient zwischen Mutter und Unterlegplatte und mit $r_1 = 3$ cm der mittlere Halbmesser der Mutter bezeichnet wird (Fig. 391). Also für die obigen Werthe: $l = 40$ cm, $r = 2$ cm ist:

$$K = 0{,}022\,G.$$

Auch hier ist die Reibung an der Unterlagplatte nahezu so gross, wie die im Gewinde.

Beispiel 120: Ohne Reibung würde sein:

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= \frac{r}{l} \cdot 0{,}052\,G \\ K_0 &= \frac{2}{40} \cdot 0{,}052\,G = 0{,}0026\,G; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 600$$

so dass:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{0{,}022\,G}{0{,}0026\,G} = \text{beinahe } 10 \quad \ldots\ldots \quad 601$$

In Folge der Reibung ist nach unserem Beispiele eine etwa 10mal grössere Kraft erforderlich, als wenn keine Reibung vorhanden wäre.

Angenähert ist für scharfgängige Schrauben anzunehmen:

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{r}{l} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 602$$

Vergleich zwischen den flach- und scharfgängigen Schrauben.

Bei den scharfgängigen Schrauben haben die Gewindegänge eine grössere Haftfläche, in Folge dessen eine grössere Haltbarkeit. Auch die Reibung ist erheblich grösser (Gleichung 596). Sie werden deshalb als Befestigungsschrauben verwendet, während die flachgängigen überall da anzuwenden sind, wo es auf leichte Drehbarkeit ankommt. (Pressen, Schraubstöcke, Bremsen.)

Die Schraube ohne Ende (Fig. 394). So nennt man ein in der Technik sehr geschätztes Getriebe, bei dem die Schraube ebenfalls Verwendung gefunden hat.

Um das Getriebe aus bereits Bekanntem herzuleiten, denke man sich aus einer recht langen Mutter parallel zur geometrischen Achse einen Streifen herausgeschnitten und diesen zu einem Rade R so gebogen, dass die einzelnen Mutter-Gewindestücke als schräglaufende Zähne auf dem Radumfange erscheinen. Während der Drehung der Schraube S mittelst der Kurbel vom Halbmesser l üben die Schraubengänge gegen die Zähne einen Zähnedruck G aus, und bewegen so das Rad um je einen Zahn

weiter, wenn die Schraube eine volle Umdrehung ausführt (vorausgesetzt, dass die Schraube eine eingängige ist. Maschinenbau). Zugleich gleiten die Gänge an den Zähnen entlang und verursachen hier Reibung, die ebenfalls durch die Wirkung der Kraft K überwunden werden muss.

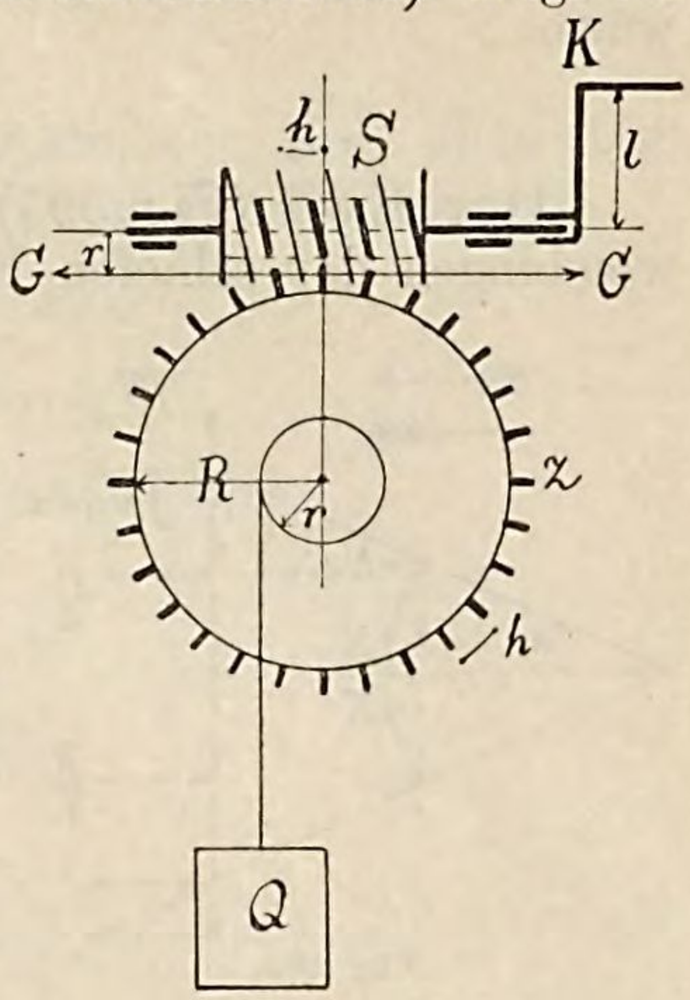


Fig. 394.

Ist f der Reibungskoëffizient, G der Normaldruck zwischen den Reibflächen, r der mittlere Halbmesser der Schraube, so ist genau genug $fG \cdot 2r\pi$ die mechanische Arbeit der Reibung während einer vollen Schraubenumdrehung. In derselben Zeit rückt das Rad (Schneckenrad) am Umfange um einen einzigen Zahn, d. h. um die Strecke h, weiter, wenn zugleich h die Steighöhe der Schraube bedeutet. Es müssen Steighöhe h und die Entfernung h zweier Zähne voneinander denselben Werth haben, wenn überhaupt ein richtiger Eingriff der Vorsprünge in einander möglich sein soll.

Dann ist nach dem Satze von den mechanischen Arbeiten für den gleichförmigen Fortbestand der Bewegung:

Mechanische Arbeit der Triebkraft = mechanischer Arbeit des Widerstandes.

Also für eine volle Umdrehung:

$$K \cdot 2l\pi = Gh + Gf \cdot 2r\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 603$$

oder da auch nach Fig. 394:

$$GR = Qr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 604$$

$$G = Q\,\frac{r}{R},$$

$$K = Q\,\frac{r}{R}\,\frac{h + f2r\pi}{2l\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 605$$

Beispiel 121: Für:

$h = 3$ cm, $r = 10$ cm, $f = 0{,}15$ ist:

$$K = Q\,\frac{r}{R}\,\frac{3 + 4{,}7}{2l\pi}$$

Ohne Reibung würde sein für $f = 0$:

$$K_0 = Q\,\frac{r}{R}\,\frac{3}{2l\pi}.$$

Es verhält sich demnach nahezu:

$$K : K_0 = 8 : 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 606$$

Rechnet man auch die Reibung in den übrigen Theilen (Zapfenlagern) des Getriebes hinzu, so kann man gut:

$$\frac{K}{K_0} = 3 \text{ annehmen.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 607$$

Es muss demnach bei der Schraube ohne Ende in Folge der Reibung die Triebkraft dreimal so gross sein, wie wenn keine Reibung vorhanden wäre.

§ 300.

Der Keil (Fig. 395). Auch der Keil ist als eine der wichtigen Anwendungen der schiefen Ebene anzusehen.

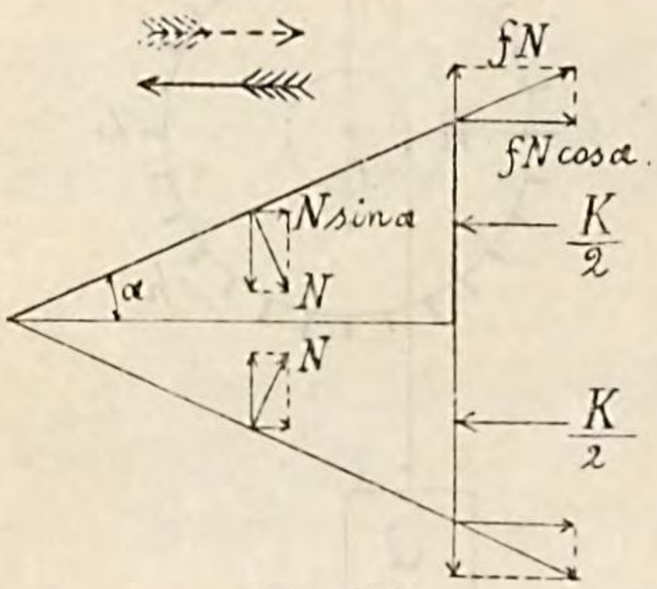


Fig 395.

Anstatt den Körper auf der festliegenden schiefen Ebene emporzuziehen (Fig. 389), um ihn auf die Höhe h zu erheben, könnte man auch unter den gegen seitliche Verschiebung gesicherten Körper die schiefe Ebene schieben, „keilen“.

Es muss sich deshalb die Gleichung für den Keil auch unmittelbar aus den Gleichungen für die schiefe Ebene ableiten lassen.

Auf dem Rücken des gleichschenkligen Keiles sei erforderlich die Kraft K, um die senkrecht zu den beiden Seitenflächen wirkenden Widerstände N und die aus letzteren erwachsenden Reibungswiderstände fN zu überwinden.

Was für den ganzen Keil gilt, ist auch entsprechend giltig für je eine, z. B. die obere symmetrische Hälfte. Dann ergiebt sich, nachdem die Kräfte in ihre horizontalen und vertikalen Antheile zerlegt sind, nach bekanntem Verfahren, ohne weiteres:

$$\frac{K}{2} = N \sin a + fN \cos a.$$

$$\left.\begin{aligned} K &= 2N(\sin a \pm f \cos a) \\ N &= \frac{K}{2(\sin a \pm f \cos a)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 608$$

Die oberen Zeichen gelten für das Eintreiben des Keiles, die unteren für das Anhalten, damit er nicht in der Richtung des punktirten Pfeiles zurückspringt.

Soll zum Anhalten keine Kraft erforderlich, im Gegentheil eine Kraft nöthig sein, um den eingetriebenen Keil wieder herauszuziehen, so muss K negativ werden, d. h. nach der Gleichung 608:

$$\sin a < f \cos a,$$
$$\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} \varphi,$$
$$a < \varphi.$$

Der halbe Schneide- oder Kantenwinkel a muss kleiner sein als der Reibungswinkel φ.

Je kleiner a, eine desto grössere Kraft zum Wiederherausziehen ist erforderlich, und desto grösser ist der Normaldruck N.

Beispiel 122: Es sei für Eisen auf Eisen und rauhe Gleitflächen

$$f = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}44$$

angenommen, dann ist der Reibungswinkel:

$$\varphi = 24^0.$$

Nehmen wir deshalb für einen eisernen Keil, der zwischen Eisenflächen getrieben werden soll,

$$a = 10^0$$

an, so sind wir zunächst sicher, dass der eingetriebene Keil nicht von selbst wieder herausspringt, und es folgt nach der obigen Gleichung:

$$K = 2\,N\,(\sin 10 + 0{,}44 \cdot \cos 10),$$
$$= 2\,N\,(0{,}174 + 0{,}44 \cdot 0{,}985),$$
$$= 2\,N\,(0{,}174 + 0{,}43) = 2\,N \cdot 0{,}604.$$

Für $N = 100$ kg wäre erforderlich:

$$K = 200 \cdot 0.604 = 120{,}8 \text{ kg}.$$

Ohne Reibung würde sein für $f = 0$:

$$K_0 = 2N \cdot 0{,}174 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 609$$

folglich sich verhalten:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{0{,}604}{0{,}174} = \text{etwa } 3{,}5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 610$$

Bei unserem Keile muss also, um dieselbe Wirkung zu erzielen, in Folge des Reibungswiderstandes, die Triebkraft 3,5mal grösser sein, als wenn keine Reibung aufträte. Aber gerade die Reibung macht den Keil in vielen Fällen zu einem sehr geschätzten Maschinenbestandtheile (Keile zum Festkeilen der Räder. Auch die Nägel sind Keile).

Um den obigen eingetriebenen Keil gegen Herausspringen zu bewahren, ist die Kraft erforderlich:

$$K = 2\,N\,(\sin a - f \cos a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 611$$
$$= 2\,N(0{,}174 - 0{,}43)$$
$$= -\,2\,N \cdot 0{,}256.$$

Der negative Werth deutet an, dass nicht nur keine Kraft zum Festhalten des Keiles erforderlich ist, sondern die Kraft:

$$K = +\,2\,N \cdot 0{,}256$$

aufgewendet werden muss, um den Keil wieder aus der Klemme herauszuziehen.

Für $N = 120{,}8$ würde sein müssen:

$$K = 2 \cdot 120{,}8 \cdot 0{,}256 = 61{,}8 \text{ kg}.$$

Es ist deshalb oft mit Schwierigkeiten verknüpft, einen gewaltsam eingetriebenen Keil zu lösen.

Keil-Presse. Man hilft in solchen Fällen durch einen sogen. Lösekeil K, wie er bei der Keilpresse (Fig. 396) angegeben ist.

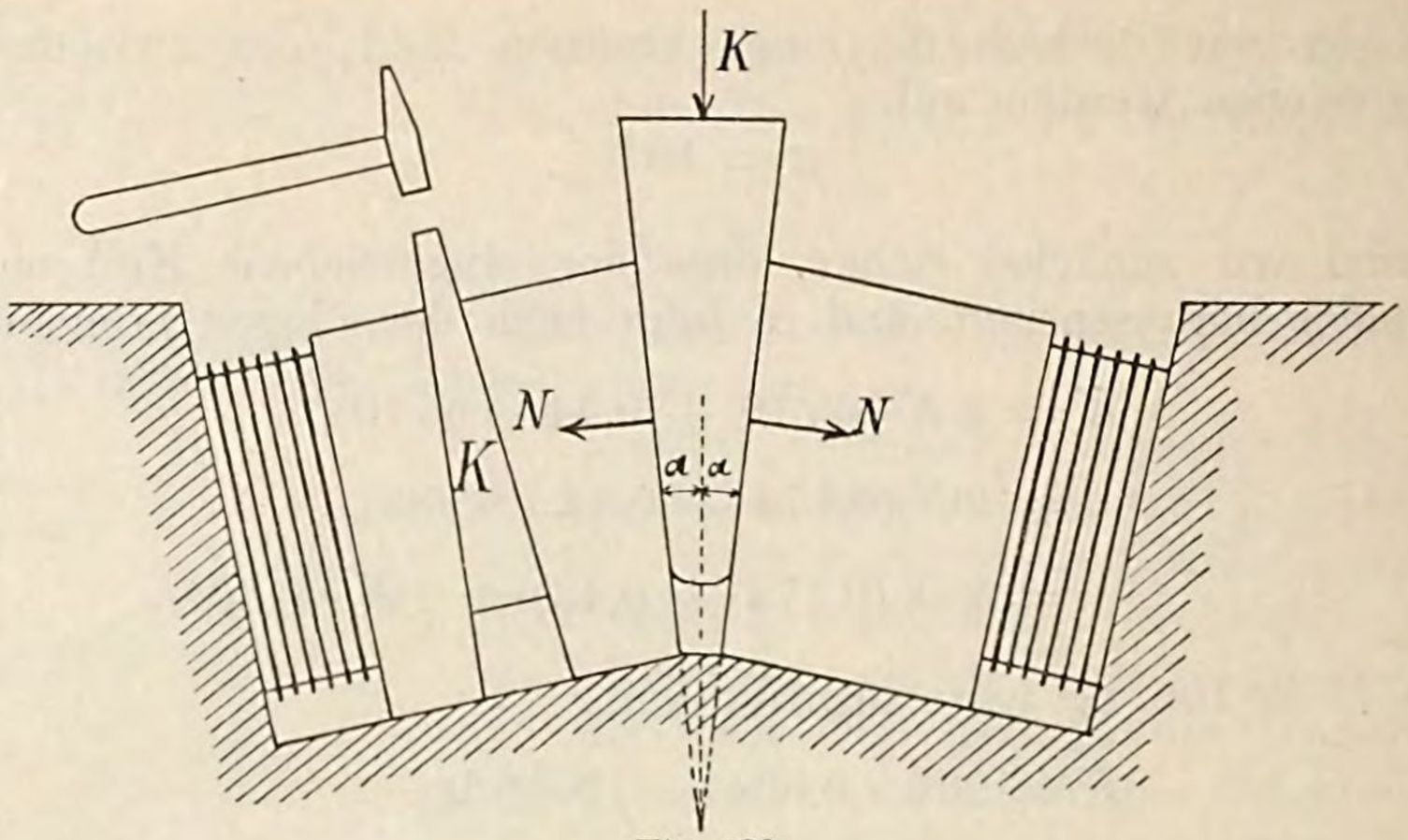


Fig. 396.

Schrauben-Keil-Presse. Eine Vereinigung der Schraube und des Keiles zu einer Presse zeigt die Fig. 397. Durch Drehung der mit rechtem

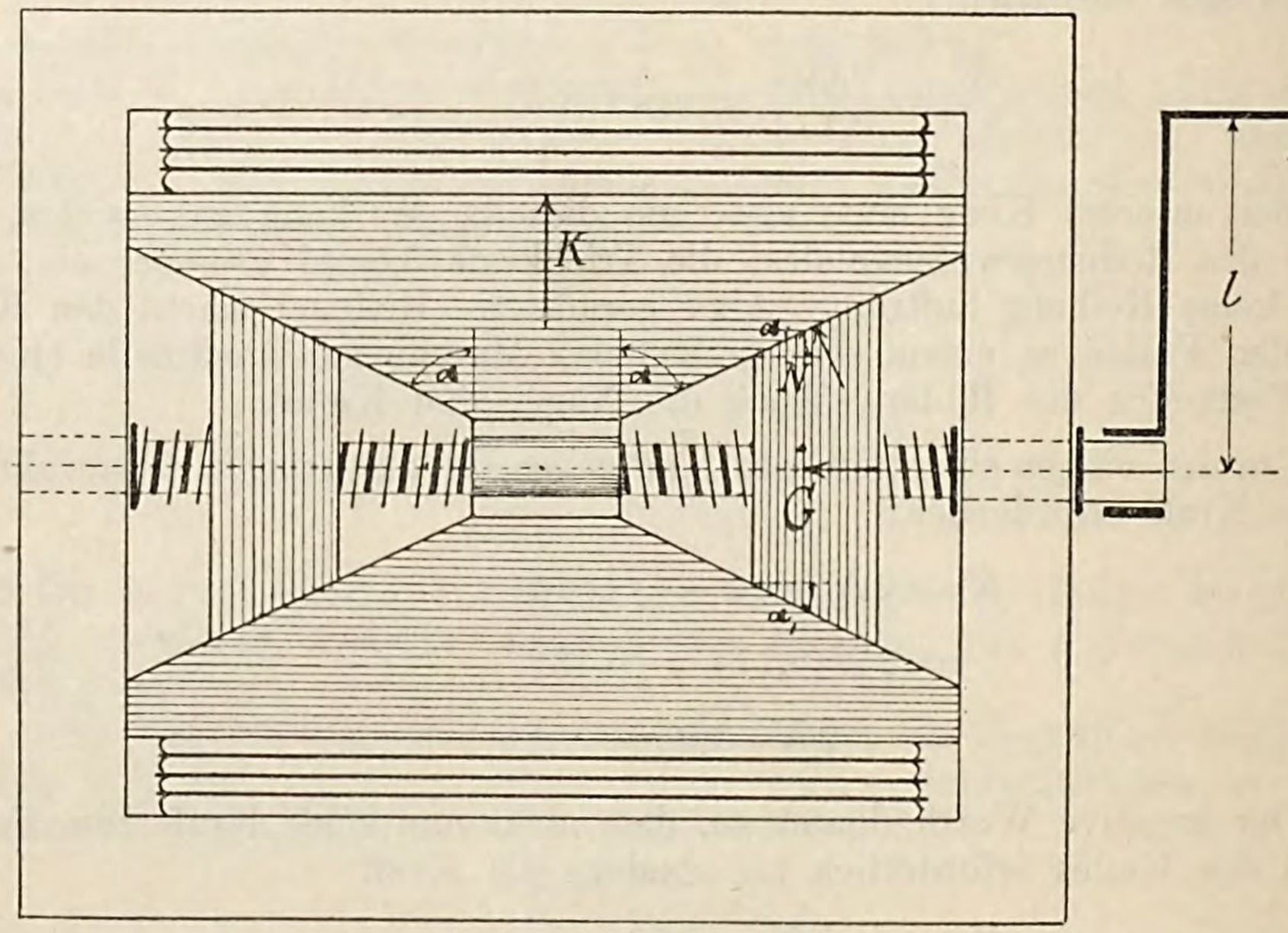


Fig. 397.

und linkem Gewinde versehenen Schraubenspindel werden die kleinen Keile mit der Kraft G (§ 299) einander genähert und dadurch zugleich die grossen Keile auseinander und gegen das Press-Gut getrieben.

Allgemeine Theorie des Keiles. Auf den oben behandelten s. z. s. praktischen Keil soll nun noch in möglichster Kürze einiges über den beliebig gestalteten theoretischen Keil folgen.

Soll der Keil sich im Gleichgewicht befinden, so müssen nach bekannten Sätzen (§ 151) die drei Kräfte KN_1N_2 sich in einem Punkte schneiden, ferner die Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

1. $N_1 (\cos a_1 - f_1 \sin a_1) = N_2 (\cos a_2 - f_2 \sin a_2)$,
2. $N_1 (\sin a_1 + f_1 \cos a_1) + N_2 (\sin a_2 + f_2 \cos a_2) = K$.

Hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$3.\quad K = \frac{(1 - f_1 f_2)\sin(a_1 + a_2) + (f_1 + f_2)\cos(a_1 + a_2)}{\cos a_2 - f_2 \cdot \sin a_2} N_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 612$$

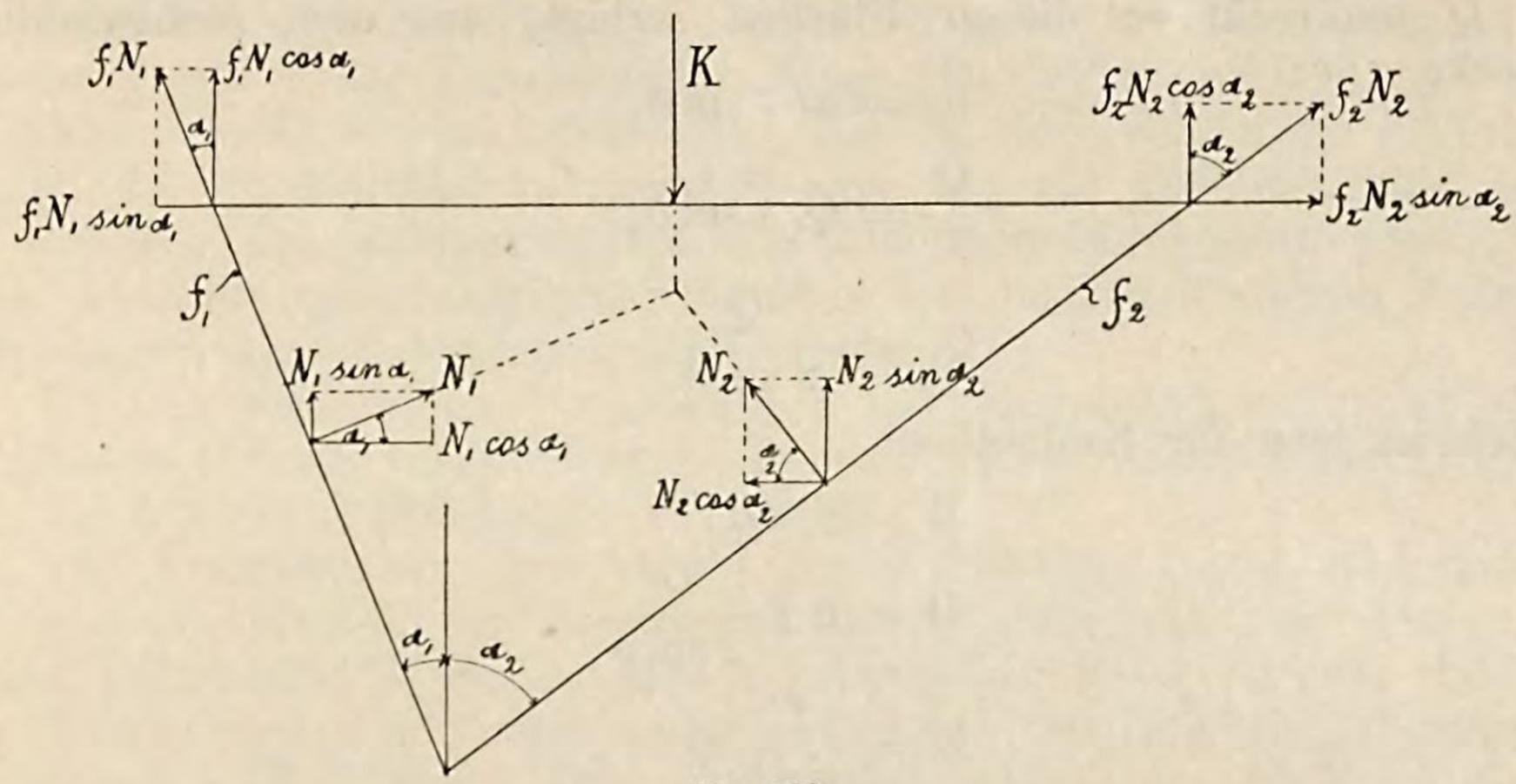


Fig. 398.

Die Kraft, welche das Zurückspringen des Keiles verhindert, erhält man, wenn man die Vorzeichen von f_1 und f_2 umkehrt. Für $a_1 = a_2 = a$ und $f_1 = f_2 = f$ erhält man wieder die bekannte Gleichung:

$$K = 2N(\sin a + f \cos a).$$

Denn die Gleichung 3. geht über in:

$$K = \frac{(1 - f^2)\sin 2a + 2f \cos 2a}{\cos a - f \sin a} \cdot N,$$

$$K = \frac{2\sin a \cos a - 2f^2 \sin a \cos a + 2f \cos^2 a - 2f \sin^2 a}{\cos a - f \sin a} \cdot N,$$

$$K = \frac{2(\sin a + f \cos a)(\cos a - f \sin a)}{\cos a - f \sin a} \cdot N,$$

$$K = 2(\sin a + f \cos a) \cdot N.$$

§ 301.

Keilnuthen. Bewegt sich der keilförmig gestaltete Körper in einer horizontal liegenden Keilnuthe (Fig. 399) mit dem Konvergenzwinkel $2\,\delta$ so gilt auch hier die Gleichung:

Reibung W = *Reibungskoëffizient* $f \times$ *Normaldruck* Q_1.

Fig. 399.

Fig. 400.

(Dasselbe würde gelten, wenn der bewegte Körper die Keilnuthe hätte und der festliegende keilförmig gestaltet wäre Fig. 400.) Die beiden normal zu den Nuthflächen gerichteten Drücke Q_1 ergeben sich, wenn man Q senkrecht zu diesen Flächen zerlegt, aus dem rechtwinkligen Dreiecke abc:

$$ac = ab \cdot \sin\delta,$$

$$\frac{Q}{2} = Q_1 \cdot \sin\delta,$$

$$Q_1 = \frac{Q}{2\sin\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 613$$

folglich ist jetzt für Keilnuthen:

$$W = 2 f Q_1,$$

$$W = 2 f \frac{Q}{2\sin\delta},$$

$$W = \frac{f}{\sin\delta} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 614$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der für ebene Flächen geltenden (572) nur dadurch, dass der Ausdruck:

$$\frac{f}{\sin\delta} \text{ an Stelle des Werthes } f$$

getreten ist. Es soll in der Folge:

$$\frac{f}{\sin\delta} \text{ mit } f^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 615$$

bezeichnet und Reibungskoëffizient für Keilnuthen genannt werden. Die Kraft P_1, welche erforderlich ist, die Reibung in Keilnuthen zu überwinden, muss demnach der Gleichung genügen:

$$P \geqq W = f^1 Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 616$$

Die Reibung hängt nicht ab von der Anzahl der Keilnuthen, die man parallel nebeneinander anbrachte, sondern nur von dem (in die Halbirungslinie der Keilnuthe fallenden) Drucke Q und von dem Koëffizienten $f^1 = \frac{f}{\sin\delta}$, also insbesondere von dem halben Konvergenzwinkel der Keilnuthe.

Beispiel 123: Setzt man:

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 15^0 \\ \sin\delta = 0{,}258 \sim \frac{1}{4} \\ f^1 = 4f, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 617$$

so ist:

also:

d. h. die Reibung wird durch Anwendung dieser Keilnuthe vervierfacht.

Der Reibungswinkel φ^1 für Keilnuthen ergiebt sich dann aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi^1 = f^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 618$$

Für unser Beispiel ist:

$$\operatorname{tg}\varphi^1 = 4f = 4\operatorname{tg}\varphi.$$

Setzen wir die hier gewonnenen Werthe f^1 und φ^1 anstatt f und φ in die obigen für die schiefe Ebene abgeleiteten Gleichungen ein, so gelten diese Gleichungen ohne Weiteres für die Bewegung in Keilnuthen.

Auch für die scharfgängigen Schrauben gelten f^1 und φ^1 anstatt der Werthe f und φ der flachgängigen (Siehe Gl. 592 u. 598).

Aus dem Erörterten leuchtet ein, dass in der Technik die Keilnuthen überall da mit Vortheil anzuwenden sind, wo die Reibung nützt; z. B. bei Bremsen, den Reibungsrädern von Robertson und Minotto (Maschinenbau). Auch die scharfgängigen Schrauben und die kegelförmigen Reibungskuppelungen können hierher gezählt werden.

Zu den technischen Vorkehrungen mit Keilnuthwirkung, bei denen die grössere Reibung schädlich ist, gehören die Keilnuth-Zapfenlager (Fig. 425) und die konischen Stützzapfen (Fig. 426).

Die Vergrösserung der Anzahl der Keilnuthen (bis 5 und darüber) ändert zwar nichts an der theoretischen Betrachtung, hat aber den wesentlichen, praktischen Vortheil, dass bei demselben Flächendrucke die Tiefe der Nuthen und damit die ungleichmässige Abnutzung der Berührungsflächen vermindert wird. Der nachtheilige Einfluss der Tiefe der Nuthen ist auf den Umstand zurückzuführen, dass nur in zwei sich berührenden Kreisen (den sogen. Theilkreisen) dieselbe Umfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, also gleichsam ein Aufeinanderrollen eintritt; dagegen in allen anderen Kreisen ein mit Reibung verbundenes Uebereinander-Hergleiten auftritt, das um so wirksamer wird, je grösser die Geschwindigkeitsunterschiede (in den tiefsten Punkten der Nuthen) sind.

c.

Seilreibung.

§ 302.

Die Seilreibung ist eine besondere Art der gleitenden Reibung, die für eine grosse Zahl technisch wichtiger Vorkehrungen (Seil-, Riementrieb; Rollenzüge, Bandbremsen) ausgenutzt wird.

Sie äussert sich zwischen den Berührungspunkten, in denen ein Cylinder (eine Rolle, Scheibe) und ein darüber gelegtes Seil (Riemen) übereinander hergleiten oder herzugleiten suchen, und ist erfahrungsgemäss ebenfalls abhängig von dem für die übereinanderhergleitenden Flächen geltenden Reibungskoëffizienten f und von dem Normaldrucke, der erzeugt wird durch die an den Seilenden erforderlichen, ungleich grossen Zugkräfte t und T (Siehe Fig. 401).

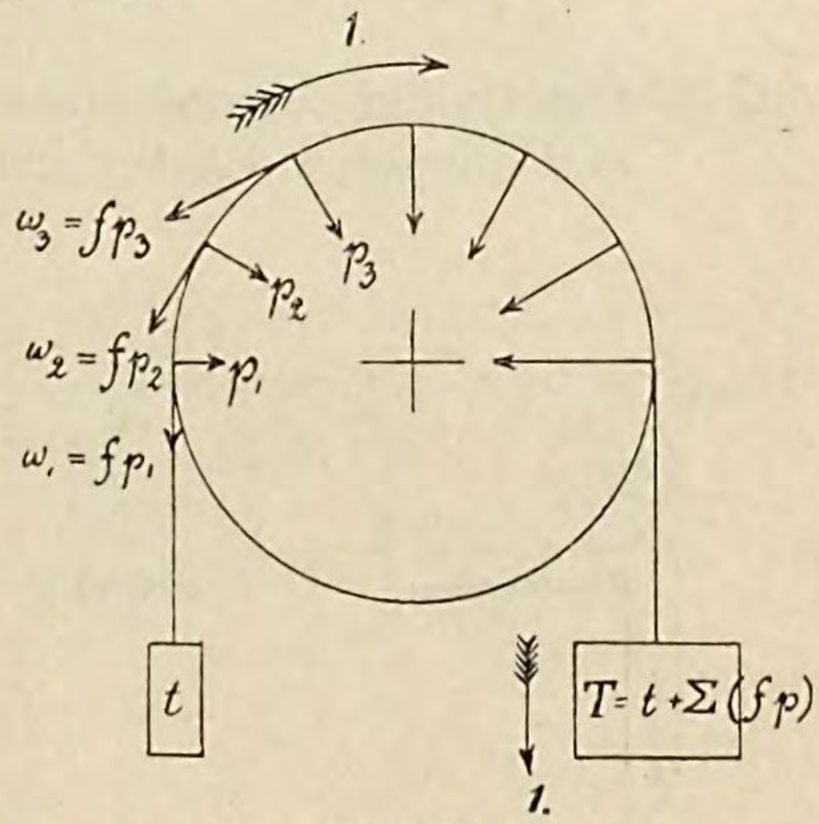


Fig. 401.

Indess besteht zwischen der gewöhnlichen gleitenden Reibung und der Seilreibung ein wesentlicher Unterschied. Bei ersterer vertheilt sich der Normaldruck, sowie die Reibung gleichmässig über die Berührungsfläche, bei letzterer jedoch keineswegs.

Denn der Ungleichheit der Kräfte t und T wegen sind auch die in

den einzelnen Theilen des umspannten Bogens auftretenden Normaldrücke: $p_1 p_2 p_3 \ldots$ bezw. Widerstände: $f p_1 f p_2 f p_3 \ldots$ verschieden gross. Hieraus folgt, was weiter unten bei der mathematischen Ableitung deutlich hervortritt, dass hier die Reibung mit der Grösse des umspannten Bogens a, (Fig. 404) also gewissermassen mit der Berührungsfläche wächst.

Zwischen den drei Grössen T, t und $W = \Sigma (w)$ besteht im Allgemeinen die Beziehung:

die Seilreibung = dem Unterschiede der Zugkräfte T und t an den Seilenden,

$$W = T - t \quad \text{oder} = t - T$$

je nachdem $T < t$ oder $t > T$ ist.

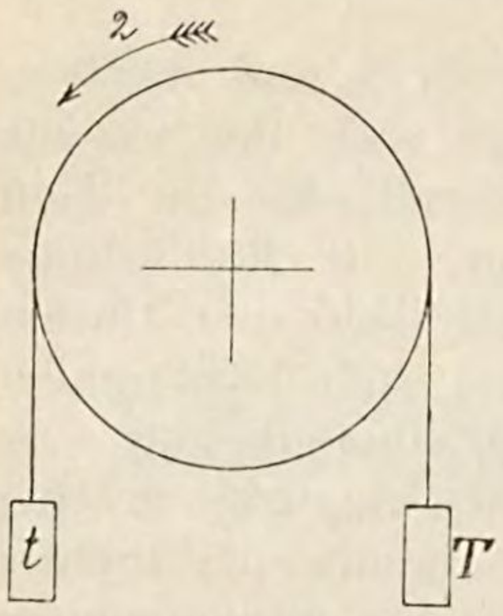


Fig. 402.

Bevor die Beziehung zwischen T, t und W im Folgenden aufgesucht wird, soll kurz angedeutet werden, dass alle Fälle, in denen die Seilreibung eine Rolle spielt, in drei Hauptgruppen sich unterbringen lassen.

I. Der Cylinder ist gegen Drehung gesichert.

1. Das Seil wird über den Cylinder in der Richtung des Pfeiles 1 gezogen (Fig. 401), dann ist:

$$T > t, \text{ bezw. } T = t + W$$

(z. B. beim gleichförmigen Aufziehen einer Last t)

2. Das Seil läuft in der Richtung des Pfeiles 2 über den Cylinder (Fig. 402), dann ist

$$t > T, \text{ bezw. } t = T + W$$

(z. B. beim gleichförmigen Hinablassen oder „Hängen“ einer Last t).

II. Der Cylinder (die Scheibe) dreht sich unter dem fest über ihn gezogenen Seile (Stahlbande), das gegen fortschreitende Bewegung gegeschützt ist (Bandbremse Fig. 405). Dann ist der Bremswiderstand:

$$W = T - t.$$

III. Der Cylinder sowohl als auch das Seil sind in Bewegung (Fig. 403). Die Reibung dient zur Uebertragung der Bewegung vom Cylinder

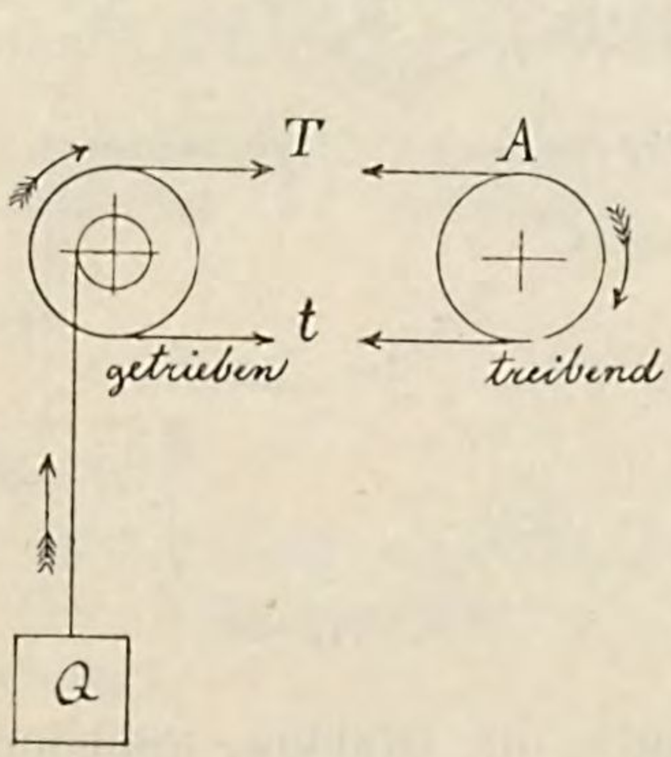


Fig. 403.

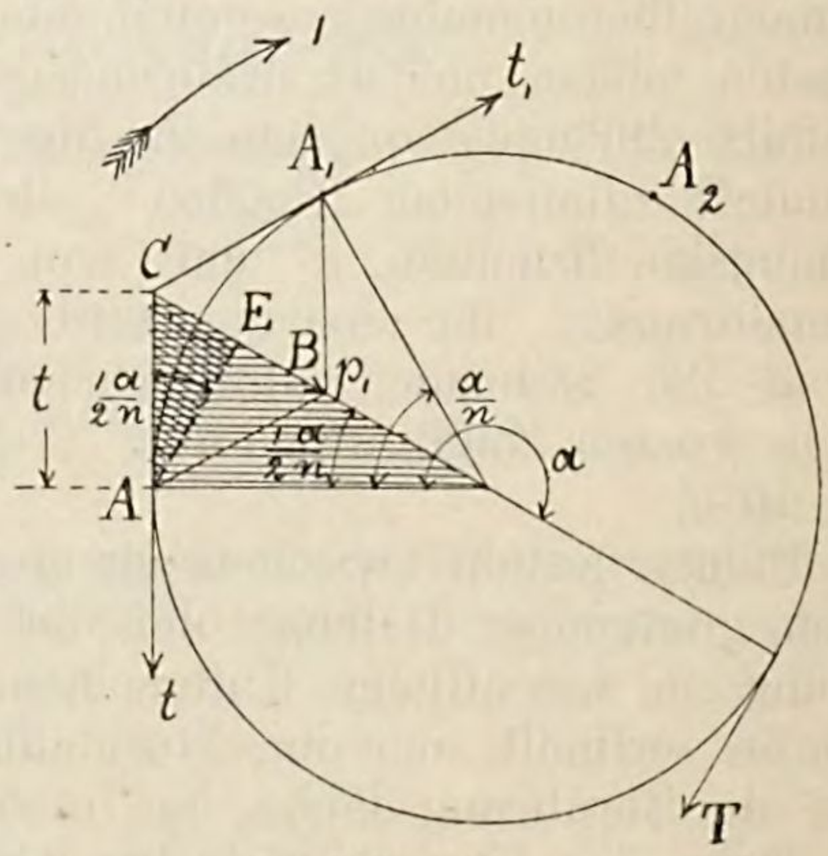


Fig. 404.

(von der Scheibe) auf das Seil (Kraftscheibe, treibende Scheibe A), oder von dem Seile auf die Scheibe (Lastscheibe, getriebene Scheibe B). Das Seil läuft in sich zurück, ist ein sogen. endloses. Der an der Lastscheibe auftretende Widerstand ist in der Figur als Gewicht Q versinnlicht, welches bei der Drehung von B gehoben wird. Der Widerstand Q könnte auch als Zähnedruck aufgefasst werden. (Riemen-, Seil-Triebwerke, Fig. 407).

Beziehung zwischen T, t und W (Fig. 404). Soll das Seil über den festliegenden Cylinder in der Richtung des Pfeiles gezogen werden, so muss, wie schon oben unter I, 1 angedeutet wurde:

$$T = t + \Sigma(w) \text{ sein.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 619$$

Allgemein ist: $\Sigma(w) = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$

$$= fp_1 + fp_2 + fp_3 + \ldots$$

Um die unbekannten (von t nach T hin wachsenden) Normaldrücke kennen zu lernen, zerlegen wir den vom Seile umspannten Bogen a in n-gleiche Theile von der Grösse $\frac{a}{n}$ und bezeichnen die Seilspannungen

in den Theilpunkten . . . . . $A_1\ A_2\ A_3 \ldots$
der Reihe nach mit . . . . . $t_1\ t_2\ t_3 \ldots$

Alsdann wirken an den Enden des ersten Seilstückes tangential zum Umfange des Rundbaumes die beiden Kräfte t und t_1 und erzeugen die Mittelkraft p_1, die sich nach dem Parallelogrammgesetze als Diagonale des über t und t_1 verzeichneten Parallelogrammes ACA_1B ermitteln lässt.

Nehmen wir vor der Hand an, es wäre:

$$t_1 = t,$$

so würde sich nach dem rechtwinkeligen Dreiecke ACE ergeben:

$$CE = \frac{p_1}{2} = t \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{a}{n}\right).$$

Der Fehler, den wir durch unsere Annahme in die Rechnung einführten, ist um so kleiner, je kürzer das Seilstück, bezw. je kleiner der Winkel $\frac{1}{2}\,\frac{a}{n}$, oder je grösser n ist.

Je kleiner aber ein Winkel ist, desto eher ist der Sinus mit dessen Bogen zusammenfallend anzusehen. Um also auszudrücken, dass n unendlich gross, oder der Winkel unendlich klein ist, setzen wir:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a}{n};$$

und erhalten:

$$\frac{p_1}{2} = t\,\frac{a}{2n},$$

$$p_1 = t\,\frac{a}{n}.$$

Da nun t_1 ausser t noch die aus p_1 sich ergebende Reibung zu überwinden hat, ist nicht $t_1 = t$, wie ursprünglich angenommen wurde, sondern:

$$t_1 = t + f p_1,$$
$$t_1 = t + f \cdot t \frac{a}{n} = t\left(1 + f\frac{a}{n}\right).$$

In derselben Weise aber, wie t_1 aus t, so ergiebt sich t_2 aus t_1, t_3 aus t_2 u. s. w., so dass erfolgt:

$$t_2 = t_1\left(1 + f\frac{a}{n}\right) = t\left(1 + f\frac{a}{n}\right)^2$$
$$t_3 = t_2\left(1 + f\frac{a}{n}\right) = t\left(1 + f\frac{a}{n}\right)^3$$
$$t_n = T \qquad = t\left(1 + f\frac{a}{n}\right)^n.$$

Nun lässt sich aber mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes beweisen, dass für n unendlich

$$T = t\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n f a}$$
$$= t\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{f a}$$
$$\boxed{T = t \cdot e^{f a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 620$$

In dieser letzten Formel ist:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \quad \ldots\ldots\ldots\ 621$$

die Basis der natürlichen Logarithmen,

$\widehat{a}$ der umspannte Bogen, gemessen auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser = 1,

f der Reibungskoëffizient zwischen Seil und Oberfläche des Cylinders,
= 0,4 bis 0,5 für Hanfseil und Lederriemen auf Holzscheiben,
= 0,28 für Hanfseil und Lederriemen auf Eisenscheiben,
= 0,18 für Stahlband auf Eisenscheibe (wie z. B. bei den Bandbremsen).

Bemerkenswerth ist, dass in der Formel:

$$T = te^{f a}$$

der Halbmesser des Cylinders nicht vorkommt.

Soll T nicht die Last t emporziehen, sondern nur verhindern, dass letztere mit Beschleunigung sich abwärts bewegt; soll also die Bewegung in der Richtung des Pfeiles 2 der Fig. 402 vor sich gehen, so kommt die Reibung der Kraft T zu statten, es ist also die Reibung entgegengesetzt, beziehungsweise der Reibungskoëffizient mit entgegengesetztem Vorzeichen einzuführen. Die Formel heisst für diesen Fall:

$$T = te^{-f a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 622$$

Zur Erleichterung der Rechnung diene folgende kleine Tabelle, mit den Werthen von e^{fa}.

$$\frac{\text{Umspannter Bogen}}{\text{Umfang}} = \frac{\widehat{a}}{2\pi} = \frac{\overset{\sphericalangle}{a}}{360^0} =$$

	f		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5
Neue Lederriemen oder Hanfseile auf rauhem Holzcylinder	0,5	$e^{f\widehat{a}} =$	1,88	2,56	3,51	4,81	6,59	9,02	12,34	16,90	23,14	111,2	535,5	2576,0
Gewöhnl. Lederriemen oder Hanfseile auf hölz. Scheiben	0,47		1,81	2,43	3,26	4,38	5,88	7,90	10,62	14,27	19,16	—	—	—
Gewöhnl. Lederriemen oder Hanfseile auf eisernen Scheiben	0,28		1,42	1,69	2,02	2,41	2,87	3,43	4,09	4,87	5,81	—	—	—
Eiserne Bremsbänder auf eisernen Scheiben	0,18		1,25	1,40	1,57	1,76	1,97	2,21	2,47	2,77	3,10	—	—	—

Beispiel 124: Es soll eine Last $t = 40$ kg mittelst eines über einen rauhen Holzcylinder geschlagenen Hanfseiles emporgezogen werden. Der umspannnte Bogen sei:

$$a = 0{,}6\,\pi.$$

Dann ist:

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{0{,}6\,\pi}{2\pi} = 0{,}3;$$

folglich nach der Tabelle:

$$e^{f\,a} = 2{,}56,$$

und die gesuchte Zugkraft:

$$T = t e^{f\,a} = 40 \cdot 2{,}56 = 102{,}8 \text{ kg}.$$

Beispiel 125: Es soll eine Last:

$$t = 2000 \text{ kg}$$

mit Hülfe einer Kraft:

$$T = 20 \text{ kg}$$

gleichförmig hinabgelassen werden, es ist der umspannte Bogen a zu ermitteln, wenn ein neues um einen rauhen Holzcylinder geschlagenes Hanfseil benutzt wird.

Nach Gleichung:

$$T = t e^{-f\,a} = t \frac{1}{e^{+f\,a}}$$

folgt:

$$e^{f\,a} = \frac{t}{T} = \frac{2000}{20} = 100.$$

Oder wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$l e^{f\,a} = l\,100,$$

$$f\,a = l\,100,$$

$$a = \frac{1}{0{,}5} \cdot 4{,}6 = 9{,}2.$$

Hieraus ergiebt sich die Anzahl der Umwickelungen:

$$i = \frac{a}{2\pi} = \frac{9{,}2}{2 \cdot 3{,}14} = \text{ rund } 1{,}5.$$

Denselben Werth hätten wir auch schon aus der obigen Gleichung:

$$e^{fa} = 100$$

mit Hülfe der Tabelle angenähert bestimmen können, welche für $f = 0{,}5$ und $e^{fa} = 111{,}2$ ebenfalls ergiebt:

$$\frac{a}{2\pi} = 1{,}5.$$

Läuft das Seil in einer Keilnuthe, so ist der Reibungskoëffizient für Keilnuthen $f^1 = \frac{f}{\sin\delta}$ einzuführen, also:

$$T = te^{\pm \frac{f}{\sin\delta} a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 623$$

und es gilt das obere Zeichen (+) für das Aufziehen, das untere Zeichen (—) für das Hinablassen (Hängen). Auch hier bedeutet δ den halben Konvergenzwinkel der Keilnuthe.

Anwendung der obigen Gleichung auf einige wichtige technische Vorkehrungen.

§ 303.

Bandbremse. Die an der Trommel vom Halbmesser r hängende Last Q soll hinabgelassen werden. Die Bremsscheibe vom Halbmesser R und die genannte Trommel sitzen fest auf derselben Welle. Das über die Scheibe (R) gelegte Bremsband ist mit demjenigen Ende, welches die grösste Spannung (T) zeigt, an dem festen Drehpunkte C, das andere Ende mit der Spannung (t) an dem kürzeren Arme des Hebels bei D befestigt. Der Hebel wird durch die Kraft des Arbeiters P angedrückt und hierdurch bei D das Bremsband kräftiger über die Bremsscheibe gezogen. L und l seien bezw. die Hebelarme der Kräfte P und t.

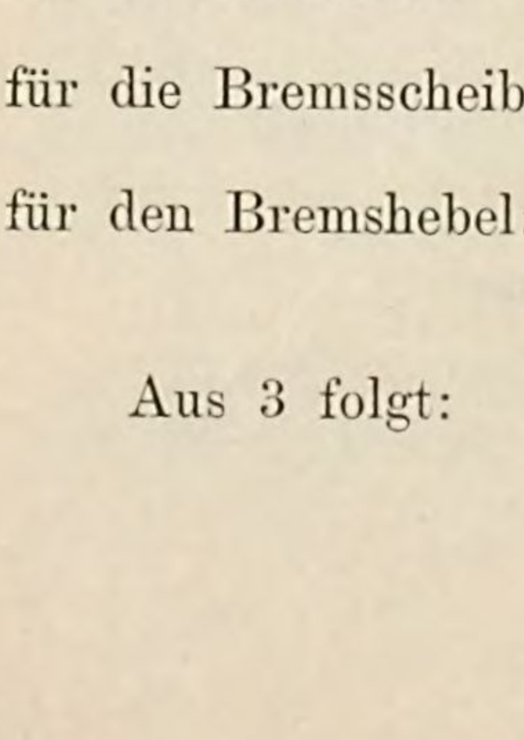


Fig. 405.

Durch die gewählte Anordnung sind zwei Vortheile bezweckt. Einmal soll das Bremsband für gewöhnlich durch das eigene Gewicht des Hebels gelüftet werden, also nicht auf der Scheibe schleifen; dann soll der grössere Zug T im Bremsbande durch den festen Punkt C aufgenommen und nicht durch den Druck am Hebel überwunden werden.

Es ergeben sich nun folgende Gleichungen:

für das Bremsband:

$$1. \qquad T = te^{fa},$$

für die Bremsscheibe:

$$2. \quad (T - t)R = Q \cdot r, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 624$$

für den Bremshebel:

$$3. \qquad PL = tl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 625$$

Aus 3 folgt:

$$4. \qquad P\frac{L}{l} = t,$$

Aus 1 und 2 folgt:

$$5.\quad t(e^{fa}-1)R = Qr \quad \ldots\ldots\ldots\

In dem vorliegenden Falle kommt es hauptsächlich darauf an, die grösseste im Seile auftretende Spannung T zu ermitteln, weil nach dieser die Dicke des Seiles zu berechnen ist. Für die Scheibe B gilt die Gleich.:

$$(T - t)\, R = Qr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 631$$

$$\left(T - \frac{T}{e^{fa}}\right) R = Qr,$$

$$T = \left(Q\frac{r}{R}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{fa}}}$$

oder:

$$T = \left(Q\frac{r}{R}\right) \frac{e^{fa}}{e^{fa} - 1} \quad \ldots\ldots \quad 632$$

Dagegen ist:

$$t = \left(Q\frac{r}{R}\right) \frac{1}{e^{fa} - 1} \quad \ldots\ldots \quad 633$$

Der Mittelwerth aus T und t würde die Spannung T_0 ergeben, welche das Seil im Ruhezustande überall hat:

$$T_0 = \frac{T + t}{2} = \frac{1}{2}\left(Q\frac{r}{R}\right) \frac{e^{fa} + 1}{e^{fa} - 1} \quad \ldots\ldots \quad 634$$

Man nennt $\left(Q\frac{r}{R}\right)$ den auf den Hebelarm R (oder den auf den Umfang der Scheibe B) reducirten Widerstand.

Bei den Hanfseil-Triebwerken läuft das Seil in Nuthen mit dem Konvergenzwinkel $\delta = \frac{45}{2} = 22{,}5$. Für diese würde demnach anstatt f zu setzen sein:

$$f^1 = \frac{f}{\sin 22{,}5} = \sim 3f.$$

d.

Steifigkeit der Seile
(Seilbiegungswiderstand oder innere Seilreibung).

§ 305.

Während die oben behandelte Seilreibung in unzähligen Fällen der Technik ausgenutzt wird, z. B. bei den Bandbremsen, um beschleunigte Bewegung einer Welle zu verhüten, bei den Seil- und Riementriebwerken, um Bewegung zu übertragen, erweist sich die Steifigkeit der Seile nur schädlich und muss beispielsweise bei den Seil-Triebwerken, den Seilen der Fördermaschinen, bei allen Rollenzügen und dergleichen technischen Vorrichtungen als unwillkommene Beigabe, sozusagen als eine Lastvermehrung in den Kauf genommen werden.

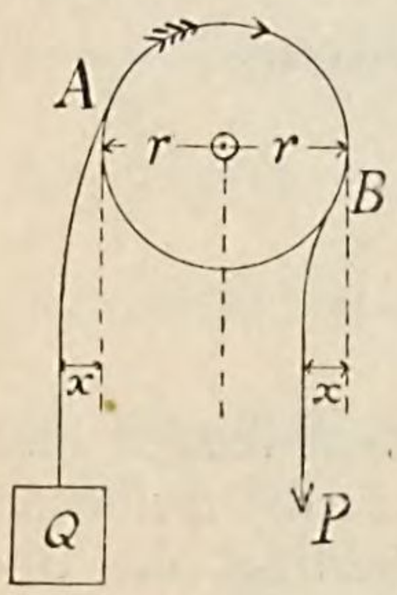


Fig. 408.

Bislang wurde das Seil als vollkommen biegsam angesehen, in Wirklichkeit jedoch stellt es sowohl dem Krümmen beim Auflaufen (A) auf eine Scheibe, als auch

dem Wiedergeradestrecken beim Ablaufen (B) von der Scheibe (Fig. 408) einen gewissen Widerstand entgegen, den man Steifigkeit oder Seilbiegungswiderstand zu nennen pflegt. Er rührt zum nicht geringen Theile auch von der Reibung, nämlich zwischen den einzelnen Fäden oder Drähten im Innern des Seiles her, die sich bei der Biegung des Seiles gegeneinander verschieben müssen, könnte deshalb im Gegensatz zu der oben behandelten (äusseren) Seilreibung auch innere Seilreibung genannt werden. Die Wirkung des Seilbiegungswiderstandes ist als eine Vermehrung des Lastarmes um x und gleichzeitige Verminderung des Kraftarmes um x aufzufassen.

Wäre kein Seilbiegungswiderstand vorhanden und auch der Reibungswiderstand an den Unterstützungszapfen gleich Null, so müsste für eine gleichförmige Drehung der Scheibe die Gleichung gelten:

$$\left.\begin{aligned} \textit{Kraftmoment} &= \textit{Lastmoment},\\ P \cdot r &= Q \cdot r\\ P &= Q. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 635$$

Mit Rücksicht auf die Seilbiegung muss jedoch die Gleichung heissen:

$$P(r - x) = Q\,(r + x)$$

$$P = Q\,\frac{r+x}{r-x} = Q\,\frac{1+\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 636$$

oder wenn man auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $\left(1+\frac{x}{r}\right)$ vervielfältigt:

$$P = Q\,\frac{1+2\,\frac{x}{r}+\left(\frac{x}{r}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 637$$

Da schon $\frac{x}{r}$ im Allgemeinen ein kleiner Bruch sein wird, darf, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, $\left(\frac{x}{r}\right)^2$ vernachlässigt werden und der Ausdruck lautet dann:

$$P = Q\left(1 + 2\,\frac{x}{r}\right) = Q + \left(2\,\frac{x}{r}\,Q\right) \quad \ldots\ldots \quad 638$$

Das zweite Glied $\left(2\,\frac{x}{r}\,Q\right)$ stellt den Seilbiegungswiderstand dar. Angenähert, aber für die meisten Fälle genau genug, kann der Seilbiegungswiderstand s bestimmt werden durch die Erfahrungsformel:

$$\boxed{s = c\,\frac{\mathfrak{d}^2}{D}\,Q,} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 639$$

worin bedeuten:
Q die aufzuziehende Last,
$\mathfrak{d}$ in Centimetern, den Durchmesser des Seiles,
D „ „ „ „ der Scheibe,
c einen Erfahrungswerth, für welchen, wenn $\mathfrak{d}$ und D in Centimetern gegeben sind, gewählt werden kann
$= 0{,}2$ für gebrauchte Hanfseile,
$= 0{,}3$ „ neue „ (Nach Coulomb 0,26. Redtenbacher, Maschinenbau I. Bd. 1862, S. 295.)
$= 0{,}6$ „ Drahtseile (Nach Redtenbacher's Versuchen 0,58. Redt., Maschinenbau I. Bd. 1862, S. 296.)

Beispiel 126: Eine Last $Q = 500$ kg
ist an einem Hanfseile vom Durchmesser
$\mathfrak{d} = 3$ cm
mittelst einer Scheibe vom Durchmesser
$D = 21$ cm zu heben.

Sodann ist der Seilbiegungswiderstand:

$$s = 0{,}2 \frac{3^2}{21} \cdot 500$$

$$s = \text{nahezu } 0{,}09 \cdot 500 = 45 \text{ kg}.$$

Die Lastvermehrung durch Seilbiegungswiderstand beträgt demnach 9 Prozent der Last, also im vorliegenden Falle 45 kg.

Da s zunimmt mit $\mathfrak{d}^2$, aber abnimmt mit D, so sollte man, weil $\mathfrak{d}$ durch die Belastung bereits bestimmt ist, zur Erzielung eines kleinen Werthes „s“, wenigstens D nicht unter 7 bis 8 $\mathfrak{d}$ bei Hanfseilen und gewöhnlichem Gebrauche, wie z. B. bei Flaschenzügen (§ 307), wählen.

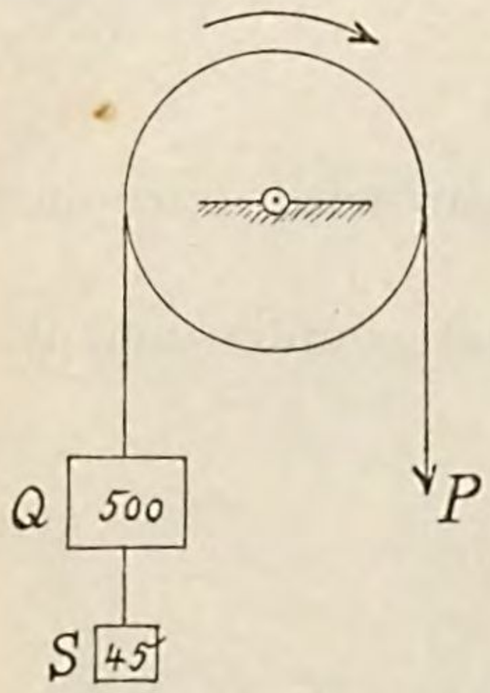


Fig. 409.

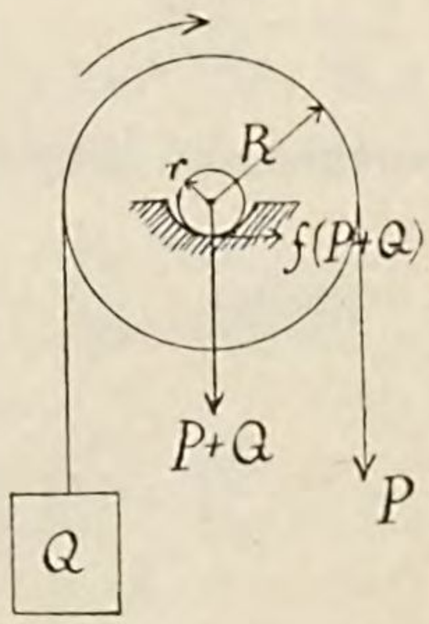


Fig. 410.

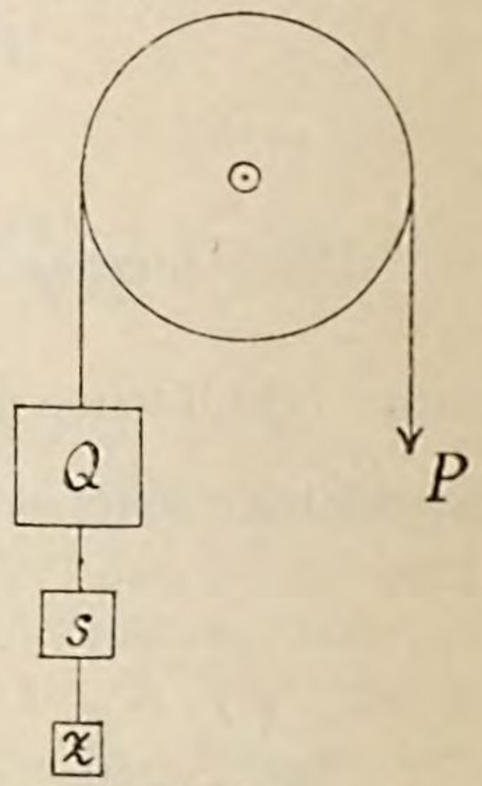


Fig. 411.

§ 306.

Zapfenreibungswiderstand bei Seilscheiben und Trommeln. Auch der bislang vernachlässigte Zapfenreibungswiderstand, der sich bei der Drehung einer Seilscheibe äussert, kann als eine Vermehrung der Last angesehen werden.

Wäre das Seil vollkommen biegsam, so hätte die Kraft P nur die Last Q und den auf den Scheibenumfang reducirten Zapfenreibungswiderstand zu überwinden und es würde sich für die zum gleichförmigen Aufziehen erforderliche Zugkraft P ergeben (Fig. 410):

$$PR - QR - f_1 (P + Q) \cdot r = O$$

$$P = \frac{\mathrm{R} + f_1 r}{R - f_1 r} Q = \frac{1 + f_1 \frac{r}{R}}{1 - f_1 \frac{r}{R}} Q$$

$$P = \frac{\left(1 + f_1 \frac{r}{R}\right)\left(1 + f_1 \frac{r}{R}\right)}{\left(1 - f_1 \frac{r}{R}\right)\left(1 + f_1 \frac{r}{R}\right)} Q = \frac{1 + 2 f_1 \frac{r}{R} + \left(f_1 \frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(f_1 \frac{r}{R}\right)^2} Q$$

oder, wird das Glied $\left(f_1 \frac{r}{R}\right)^2$ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt:

$$\left.\begin{aligned} P &= \left(1 + 2 f_1 \frac{r}{R}\right) Q, \\ &= Q + 2 f_1 \frac{r}{R} Q, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 640$$

oder, wenn statt der Halbmesser r und R die Durchmesser eingeführt werden:

$$P = Q + 2 f_1 \frac{\mathfrak{d}}{D} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 641$$

Das zweite Glied ist der gesuchte Zapfenreibungswiderstand:

$$\boxed{z = 2 f_1 \frac{\mathfrak{d}}{D} Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ 642$$

Auch hier zeigt es sich, dass durch Vergrösserung von D und Verkleinerung von $\mathfrak{d}$ der Zapfenreibungswiderstand vermindert wird. Bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Seilbiegungs- und Zapfenreibungswiderstandes würden jetzt die Gleichungen heissen (Fig. 411):

$$P = Q + s + z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 643$$

$$P = Q + c \frac{\mathfrak{d}^2}{D} Q + 2 f_1 \frac{\mathfrak{d}}{D} Q,$$

$$P = Q\left(1 + c \frac{\mathfrak{d}^2}{D} + 2 f_1 \frac{\mathfrak{d}}{D}\right) \quad \ldots\ldots\ 644$$

§ 306.

Kettenreibung. Legt man anstatt des Seiles eine Kette auf die Scheibe, so entsteht bei der Biegung der einzelnen Kettenglieder während

des Auf- und Ablaufens eine Kettenreibung, die ähnlich wie die Zapfenreibung, nämlich durch den Ausdruck:

$$2 f_{,,} \frac{\mathfrak{d}}{D} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 645$$

zu bestimmen ist, wenn verstanden wird: unter $\mathfrak{d}$ der Durchmesser des Ketteneisens bei der gewöhnlichen Kette, bezw. des Gelenkbolzens bei der sogen. Laschenkette, unter $f_{,,}$ der Reibungskoëffizient für die bei der Drehung der einzelnen Kettenglieder übereinander hergleitenden Flächen.

Es gilt sonach für die Kette folgende der obigen ähnliche Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} P &= Q + 2 f_{,,} \frac{\mathfrak{d}}{D} Q + 2 f_{,} \frac{\mathfrak{d}}{D} Q \\ P &= Q \left(1 + 2 f_{,,} \frac{\mathfrak{d}}{D} + 2 f_{,} \frac{\mathfrak{d}}{D}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 646$$

Im Allgemeinen kann gesetzt werden:

$f_{,,} = f_{,} = 0{,}2$ bei unvollkommener Schmierung,
$= 0{,}1$ „ vollkommener „

(Siehe auch die Angaben auf Seite 289.)

Im folgenden soll das Verhältniss:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Kraft}{Last} = \frac{P}{Q} &= \left(1 + c \frac{\mathfrak{d}^2}{D} + 2 f_{,} \frac{d}{D}\right) = k \text{ für Seile} \\ &= \left(1 + 2 f_{,,} \frac{\mathfrak{d}}{D} + 2 f_{,} \frac{d}{D}\right) = k \text{ für Ketten} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 647$$

Widerstandskoëffizient genannt werden (Ritter, Techn. Mech. 1884, 373).

Last (Q) ⟿⟿⟿

Beispiel 128: Für eine Scheibe mit Kette, welche 900 kg trägt, sei:

die Dicke des Ketteneisens oder des Kettenbolzens $\mathfrak{d} = 1{,}0$ cm,
der Scheibendurchmesser $D = 20{,}0$ cm,
der Zapfendurchmesser $d = 3{,}0$ cm,
der Zapfenreibungskoëffizient $f_{,} = 0{,}1$,
der Kettenreibungskoeffizient $f_{,,} = 0{,}2$,

dann ist:

$$\left.\begin{aligned} k = \frac{P}{Q} &= 1 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{3}{20} \\ &= 1 + 0{,}02 \quad + 0{,}03 \quad = 1{,}05 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 649$$

Bei einer Kettenscheibe betragen die Widerstände sonach nur $5\,^0/_0$ der Last.
Den folgenden Flaschenzügen soll ein Mittelwerth:

$$k = 1{,}1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 650$$

zu Grunde gelegt werden.

Die Kettenscheiben müssen am Umfange mit einer Nuth zur Aufnahme der Kettenglieder versehen sein. Damit die Kette nicht gleitet, sind Vorsprünge (Knaggen) angebracht, gegen die sich die Kettenglieder legen.

Den Durchmesser der Kettenscheibe sollte man mindestens 20 bis 30 mal dem Durchmesser des Ketteneisens wählen, also:

$$D \geqq 20\,\mathfrak{d} \text{ bis } 30\,\mathfrak{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 651$$

e.

Anwendung der obigen Ergebnisse auf die **Flaschen- oder Rollenzüge.**

§ 307.

Gewöhnlicher Flaschenzug. Meistens liegen die Rollen, sowohl des festen (A) als auch des losen (B) Gehäuses (Flasche, Klobens) nebeneinander und sind von gleicher Grösse. In nebenstehender Fig. 412 ist der Deutlichkeit wegen angenommen, dass die Rollen untereinander angebracht sind und nach der Mitte hin kleiner werden. Die Anzahl der Rollen in jeder Flasche sei $n = 3$.

Ohne Zapfenreibung und Seilsteifigkeit würde die Spannung in jedem Seile zwischen den beiden Flaschen gleich P, der Kraft am Seilende, sein, folglich für die untere Flasche die Gleichung gelten:

$$Q = 6 \cdot P,$$

oder allgemein:

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot P,$$

$$Q = 2 \cdot n \cdot P, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 652$$

wenn, wie schon vorhin hervorgehoben wurde, unter n die Anzahl der Rollen in einer Flasche verstanden wird.

In Wirklichkeit nimmt in Folge der Widerstände die Spannung der Seilstränge von aussen nach innen ab. Sie ist am freien Ende P,

in dem folgenden Strange $\frac{P}{k}$,

in dem darauffolgenden $\frac{P}{k^2}$,

im letzten $\frac{P}{k^6}$.

Es gilt deshalb für die untere Flasche, Parallelismus der Seile vorausgesetzt, wenn wir die Last, die in Wirklichkeit gehoben werden kann, mit Q_w bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} Q_w &= \frac{P}{k} + \frac{P}{k^2} + \frac{P}{k^3} + \frac{P}{k^4} + \frac{P}{k^5} + \frac{P}{k^6}, \\ Q_w &= \frac{P}{k^6} \quad (k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k + 1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 653$$

Um für die eingeklammerte Summe (geometrische Reihe) einen einfachen Ausdruck zu gewinnen, setzen wir

$$k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 = S$$

oder:

$$k^6 + k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k = kS,$$

durch Subtraktion ergiebt sich dann:

$$k^6 - 1 = S\,(k - 1),$$

$$S = \frac{k^6 - 1}{k - 1} = \frac{k^{2 \cdot 3} - 1}{k - 1},$$

allgemein:

$$S = \frac{k^{2n} - 1}{k - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\

$$\mathfrak{g} = \frac{Q_w}{Q} = \frac{P\,\dfrac{k^{2n}-1}{k^{2n+1}-k^{2n}}}{2n \cdot P}$$

$$\mathfrak{g} = \frac{Q_w}{Q} = \frac{k^{2n}-1}{2n\,(k^{2n+1}-k^{2n})} < 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 656$$

bezeichnet man als Güteverhältniss des Flaschenzuges. Ist $\mathfrak{g}$ bekannt, so folgt $Q_w = \mathfrak{g} \cdot Q$.

Für:

$n =$	2	3	4
und $k =$ 1,05 ist $\mathfrak{g} =$	0,88	0,85	0,81
1,10 „ $\mathfrak{g} =$	0,79	0,73	0,66
1,15 „ $\mathfrak{g} =$	0,75	0,63	0,56

Die Werthe von $\mathfrak{g}$ in der ersten Reihe (für $k = 1{,}05$) können für Kettenflaschenzüge gelten.

Die Tabelle zeigt, dass das Güteverhältniss wesentlich mit n, der Anzahl der Rollen in einer Flasche, abnimmt. Man wendet deshalb selten mehr als 4 Rollen in einer Flasche an.

Beispiel 129:

Welche Last Q_w kann mittelst eines Flaschenzuges gehoben werden, wenn:

$P = 100$ kg,

$n = 4$ (Rollen in 1 Flasche), und

$k = 1{,}1$ angenommen wird?

Nach der Gleichung 656 und der Tabelle ist dann:

$$Q_w = \mathfrak{g} \cdot Q,$$

$$Q_w = 0{,}66 \cdot 4 \cdot 100 = 528 \text{ kg}.$$

Ohne Reibung würde sein:

$$Q = 2 \cdot 4 \cdot 100 \quad = 800 \text{ kg}.$$

§ 308.

Potenzflaschenzug (Fig. 413). Ohne Rücksicht auf Reibung. Die Spannung in den Seilen nimmt, sowie es in der Figur angegeben ist, nach der Last hin zu, so dass:

$$Q = 8 \cdot P,$$

$$= 2^3 \cdot P.$$

Wird die Anzahl der Rollen allgemein mit n bezeichnet, so ist das Verhältniss der Last zur Kraft ausgedrückt durch die Gleichung:

$$Q = 2^n \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 657$$

Weil die Anzahl der Rollen als Exponent einer Potenz auftritt, nennt man den Flaschenzug Potenzflaschenzug.

Mit Rücksicht auf Reibung.

Hierfür gelten die in eckige Klammern eingeschlossenen Werthe der Fig. 413:

$$Q_w = P\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3,$$

oder allgemein für n Rollen:

$$Q_w = P\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 658$$

Das Güteverhältniss ist:

$$\mathfrak{g} = \frac{Q_w}{Q} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n}{2^n} = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 659$$

Für $k = 1{,}1$ ist:

$$g = 0{,}95^n$$

also für	n =	1	2	3	4	5
	$\mathfrak{g}$ =	0,95	0,90	0,86	0,81	0,77

Beispiel 130:

Für $P = 100$,

$n = 4$

ist $Q_w = 0{,}81 \cdot 2^4 \cdot P = 1296$ kg;

ohne Reibung: $Q = 2^4 \cdot 100 = 1600$ kg.

§ 309.

Differentialflaschenzug (von Weston).

1. Beziehung zwischen Kraft P und Last Q.

Auf derselben Achse (I) sind zwei fest miteinander verbundene Kettenrollen von verschiedenen Halbmessern r R drehbar. Die untere Rolle (II) trägt die zu hebende Last Q.

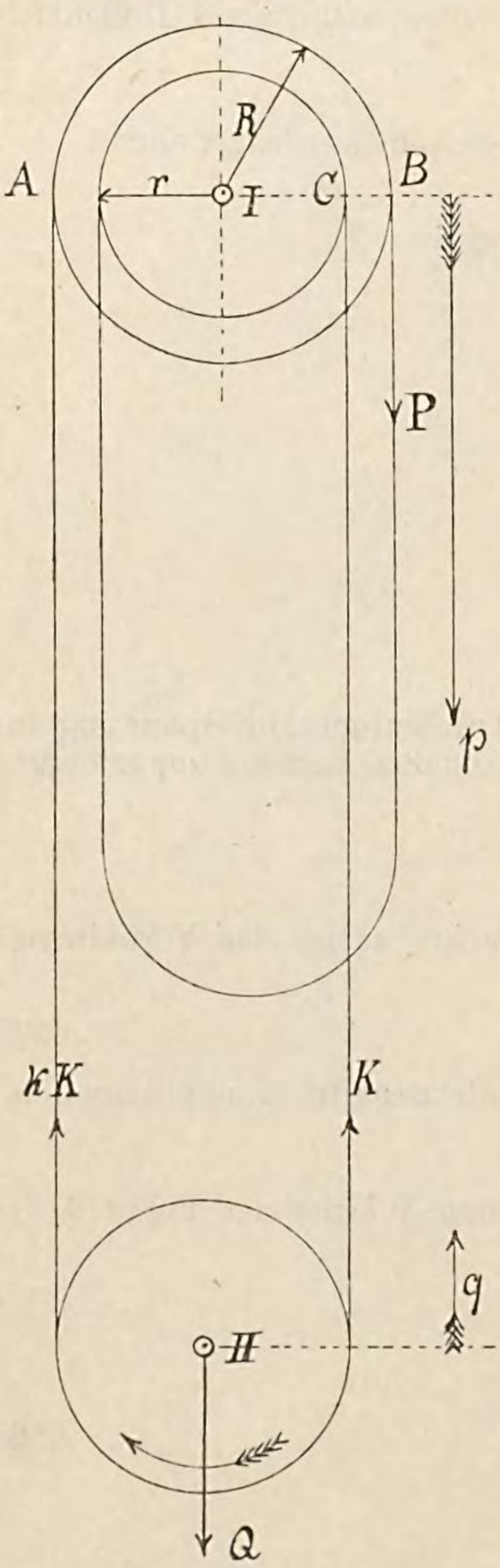


Fig. 414.

Die Fig. 414 zeigt, wie die Kette um die drei Rollen gelegt ist. An dem frei von der grossen Rolle herabhängenden Kettentrumm greift die Kraft P an.

Ohne Rücksicht auf Widerstände.

Würde die Kette oberhalb der unteren Rolle durchgeschnitten, so müsste zur Herstellung des Gleichgewichtes in jedem Schnitt die Kraft $\frac{Q}{2}$ angebracht werden.

Demnach gilt für die obere Doppelrolle die Gleichgewichtsbedingung, wenn auf das Eigengewicht der Rollen und der Ketten keine Rücksicht genommen wird:

$$P \cdot R + \frac{Q}{2} r - \frac{Q}{2} R = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$Q = 2P \frac{R}{R - r} = 2P \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{R}} \right) \quad . \quad 660$$

Je kleiner die Differenz $R - r$, desto grösser die zu hebende Last. Für $R = r$ wäre sogar $Q = \infty$.

Beispiel 131: Für $\frac{r}{R} = \frac{10}{11}$

ist:
$$Q = 2 \frac{1}{1 - \frac{10}{11}} P = 22\,P.$$

Mit Rücksicht auf Seilbiegung und Zapfenreibung. In Folge der Widerstände vertheilt sich die Last Q nicht gleichmässig auf die beiden Enden der die untere Rolle tragenden Kette. Vielmehr ist während der Bewegung die Spannung an der Spitze des die Bewegungsrichtung andeutenden Pfeiles grösser. Bezeichnen wir die vorläufig noch unbekannte Spannung auf der rechten Seite (Lastseite) mit K, so ist die Spannung auf der linken (Kraftseite) kK; es gilt deshalb für die untere Rolle die Gleichung:

$$K + kK = Q_w$$

$$K = Q_w \frac{1}{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 661$$

Nehmen wir für die obere Rolle ebenfalls als Widerstandskoëffizienten k an, so gilt für sie die Gleichung:

$$PR + Kr = k(kK)R,$$

$$PR = K(k^2R - r),$$

folglich ist:

$$PR = Q_w \frac{k^2R - r}{k+1},$$

also die zum Emporziehen der Last Q erforderliche Kraft:

$$\boxed{P = Q_w \frac{k^2 - \frac{r}{R}}{k+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 662$$

Führt man den oben (Gl. 649) für die Ketten gefundenen Werth:

$$k = 1{,}05,$$

ferner das Verhältnis ein:

$$\frac{r}{R} = \frac{10}{11},$$

so ergiebt sich:

$$P = Q_w \frac{1{,}05^2 - \frac{10}{11}}{1{,}05+1} = Q_w \cdot 0{,}094\dot{3} \quad \text{(Ritter, S. 383)},$$

also rund:

$$P = Q_w \cdot 0{,}1$$

oder:

$$Q_w = 10 \cdot P.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung war oben gefunden:

$$Q = 22 \cdot P.$$

Folglich ist das Güterverhältniss:

$$\mathfrak{g} = \frac{Q_w}{Q} = \text{etwa } 0{,}5.$$

Differenzialflaschenzug mit **Selbsthemmung.** Soll durch die Kraft P die Last Q nicht emporgezogen, sondern gleichförmig hinabgelassen

werden, der Flaschenzug sich demnach im entgegengesetzten Sinne drehen, so vertauschen P und Q gleichsam ihre Rollen: Q wird zur Kraft, P zur Last. Leitet man für diesen Vorgang die Gleichung ab, so ergiebt sich die zum „Hängen“ der Last Q erforderliche Kraft:

$$P = Q\,\frac{\frac{1}{k^2} - \frac{r}{R}}{\frac{1}{k} + 1}\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 663$$

es ist in der obigen Gleichung $\frac{1}{k}$ an die Stelle von k getreten.

Soll die Last Q freischwebend sich halten, also ohne die Einwirkung der Kraft P nicht abwärts gehen, so muss obige Gleichung der Bedingung genügen:

$$\left.\begin{array}{l} P \lessgtr Q \\ \text{d. h.} \\ \frac{1}{k^2} \lessgtr \frac{r}{R} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 664$$

also:

$$\frac{r}{R} \gtrless \frac{1}{1{,}05^2},$$

$$\frac{r}{R} \gtrless \frac{1}{1{,}1025},$$

also rund:

$$\frac{r}{R} \gtrless \frac{10}{11} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 665$$

sein.

Sogen. Selbsthemmung, die der Techniker von dem Differenzialflaschenzug meist verlangt, tritt demnach ein für:

$$\frac{r}{R} \lessgtr \frac{10}{11}, \text{ wenn } k = 1{,}05 \text{ ist.}$$

Diese Verhältnisse waren auch bei obigem Zahlenbeispiele angenommen.

2. Beziehung zwischen den Wegen oder Geschwindigkeiten der Kraft und Last.

Dreht sich die Kraftscheibe (I) einmal herum, so ist der von der Kraft P zurückgelegte Weg:

$$p = 2R\pi.$$

Gleichzeitig läuft im Punkte A eine Kettenlänge $2R\pi$ auf;
dagegen im Punkte C „ „ $2r\pi$ ab;

die Verkürzung der Kette zwischen der Kraftscheibe (I) und der Lastscheibe (II) beträgt demnach:

$$2R\pi - 2r\pi,$$

und vertheilt sich aut beide Kettentrümmer zwischen I und II; folglich ist der von der Last Q zurückgelegte Weg:

$$q = \frac{2R\pi - 2r\pi}{2}.$$

Das gesuchte Verhältniss zwischen den Wegen oder Geschwindigkeiten von P und Q ist somit:

$$\frac{p}{q} = \frac{2R\pi}{\frac{2R\pi - 2r\pi}{2}},$$

$$\frac{p}{q} = 2\,\frac{1}{1 - \frac{r}{R}},$$

oder:

$$\boxed{\frac{q}{p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 666$$

3. Beziehungen zwischen den mechanischen Arbeiten oder Effekten, die von P und Q während der Bewegung verrichtet werden.

Wenn man die früher gewonnene Gleichung 660:

$$Q = 2P\,\frac{1}{1 - \frac{r}{R}}$$

mit der letzten Gleichung:

$$q = \frac{1}{2}\,p\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

vervielfältigt, so ergiebt sich:

$$Q \cdot q = P \cdot p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 667$$

also die höchst einfache Beziehung, dass (für den überall vorausgesetzten Gleichgewichtszustand) der Effekt der Last gleich dem Effekte der Kraft ist, oder dass sich verhält:

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{q}$$

d. h. die Last Q zur Kraft P umgekehrt wie der Kraftweg p zum Lastwege q.

Somit sind wir durch den Differenzialflaschenzug s. z. s. auf Umwegen zu einem allgemein gültigen Satz gekommen, den man wohl als „goldene Regel“ bezeichnet hat und in die Worte fassen könnte: „Was an Kraft gewonnen wird, geht am Wege verloren.

Schon früher (§ 109) wurde dieser Satz gefunden und noch mit anderen Worten wiedergegeben.

f.

Prony's Zaum oder Bremsdynamometer.

§ 310.

Diese Vorrichtung dient zum Messen

1. der Kraft (Pkg) am Umfange einer auf einer Triebwelle sitzenden Scheibe,

2. derjenigen mechanischen Arbeit (N Pferde), die diese Welle abgiebt (bezw. aufnimmt).

Die Messungen beziehen sich selbstredend auf eine bestimmte Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe oder Umdrehungszahl n der Welle.

Im Wesentlichen besteht die Vorrichtung in einer Bremse, durch die die Welle gleichsam im Zaume gehalten, d. h. auf eine bestimmte Umdrehungszahl n in 1 Minute gebracht wird.

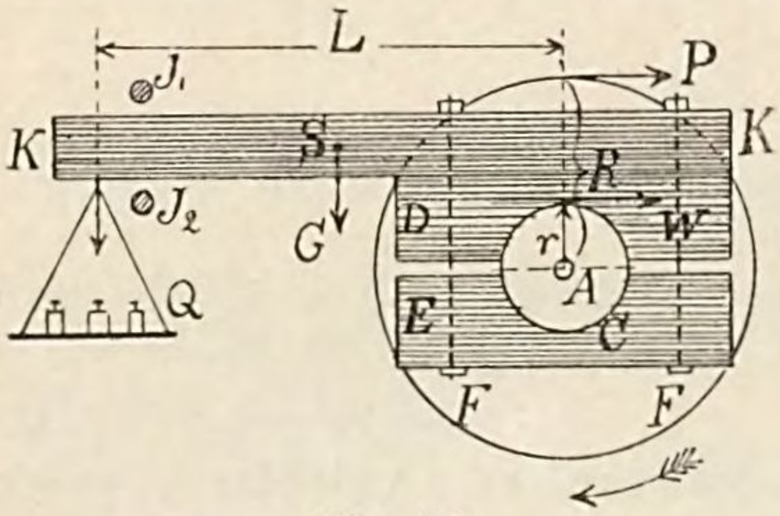


Fig. 415.

Der hierzu erforderliche Reibungswiderstand W ist gleich der Umtriebskraft und wird mittelst eines belasteten Hebels gemessen.

Es seien A die treibende und B die getriebene Welle (Fig. 407 und 415), C die fest mit A verkeilte Bremsscheibe vom Halbmesser r, D und E mit den Schrauben FF zum Anziehen eine um C gelegte Backenbremse, KK ein mit D fest verbundener Hebel von der Länge L, der am Ende eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Die Querbalken $J_1 J_2$ sollen die Schwankungen des Hebels beschränken.

Die treibende Welle führe bei regelrechtem Gange n Umdrehungen in 1 Minute aus.

Es soll nun gefunden werden, welche Kraft Pkg und welche mechanische Arbeit (N-Pferde) von dem Umfange der Riemenscheibe auf die Scheibe B (Fig. 407) durch den Riementrieb übertragen wird. Zu dem Ende wird durch Abwerfen des Riemens die Welle A entlastet, dafür aber durch allmähliches Anziehen der Bremse die Reibung zwischen Scheibe und Backen so gesteigert, dass die Welle wieder die regelrechte Umdrehungszahl n ausführt. Hierbei würden nun die Bremsbacken D und E und damit der Hebel in der Richtung der Drehung mit herumgerissen, wenn nicht der obere Querbalken J_1 solches unmöglich machte. Die sich hier am Ende des Hebels äussernde Wirkung des Reibungswiderstandes kann durch das auf die Wagschale gelegte Gewicht Q gemessen werden. Die Aufgabe des Beobachters besteht nun lediglich darin, bei der regelrechten Umdrehungszahl n der Welle A dasjenige Gewicht Q auszumitteln, bei dem der Wagebalken sich nicht mehr gegen J_1 legt, sondern in wagerechter Lage in der Schwebe (zwischen den Querbalken J_1 und J_2) erhält. Dann halten sich dieses Gewicht Q und der Reibungswiderstand W das Gleichgewicht und es gilt die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} Wr &= QL \\ W &= Q\frac{L}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 668$$

Für die gesuchte Kraft P am Umfange der Riemenscheibe vom Halbmesser R ergiebt sich die Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} PR &= Wr = QL \\ P &= Q\frac{L}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 669$$

Um nun auch den Effekt in Pferdekräften zu finden, der bei regelrechtem Betriebe durch die Riemenscheibe auf die Scheibe B übertragen wird, ist zu beachten, dass dieser Effekt genau derselbe ist, welcher durch den Bremszaum gleichsam übernommen (absorbirt) wird.

Vervielfältigt man deshalb jede Seite der ersten Gleichung mit dem Ausdrucke:

$$\frac{2\pi n}{60 \cdot 75},$$

so erhält man:

$$Wr \frac{2\pi n}{60 \cdot 75} = QL \frac{2\pi n}{60 \cdot 75}.$$

Sind W und Q in Kilogrammen, ferner r und R in Metern gegeben, und bedeutet 75 mkg das Maass einer Pferdekraft (Gl. 160), so ist der gesuchte Effekt:

$$N = \frac{W}{75} \frac{2r\pi n}{60} = \frac{Q}{75} \frac{2L\pi n}{60}.$$

$\frac{2L\pi n}{60} = V$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Angriffspunkt des Gewichtes Q im Kreise herum bewegen würde, wenn er frei folgen könnte. Es kann deshalb auch geschrieben werden:

$$\boxed{N = \frac{Q}{75} \cdot \frac{2L\pi n}{60} = \frac{Q}{75} \cdot V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 670$$

Beispiel 132: Wäre:

$L = 2$ m, $n = 120$ in 1 Minute, $Q = 75$ kg,

so würde die Leistung betragen:

$$N = \frac{75}{75} \frac{2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 120}{60} = 25{,}12 \text{ Pferde}.$$

Der Prony'sche Zaum kann auch dazu benutzt werden, diejenige Umdrehungszahl n einer Betriebswelle zu ermitteln, für welche diese unter sonst gleichen Verhältnissen den grössten Effekt ergiebt.

Der Beobachter hat für reichliches Schmieren zu sorgen, um das Warmlaufen zu verhüten. Das Eigengewicht G, im Schwerpunkte S angreifend, muss ermittelt und nach bekannten Grundsätzen zu Q geschlagen oder durch ein Gegengewicht ausgeglichen werden. (Nähere Angaben sind in des Verfassers Maschinenwissenschaften zu finden.)

g.

Die Erscheinung des Klemmens.

(Theorie des Pochstempels.)

§ 311.

Wer hätte nicht schon die Erfahrung gemacht, dass ein Schubkasten, den er in der Hast durch einen seitlichen Druck zuzuschieben suchte, nicht aus der Stelle wich, sich „klemmte“? Derselbe musste erst durch eine lösende Kraft aus seiner Verklemmung befreit werden und folgte dann willig, wenn die Kraft in der Mitte des Kastens und in der Richtung der dem Kasten durch seine Führungen vorgeschriebenen Bewegung wirkte.

Diese Erscheinung des sogen. „Klemmens“, die in unzähligen Fällen der Technik ausgenutzt, jedoch auch recht oft sehr unangenehm empfunden wird, ist ebenfalls eine Folge der Reibung und soll im Folgenden an einer bekannten technischen Vorkehrung, dem Pochstempel, näher erörtert werden.

Soll der Stempel vom Gewichte G durch eine (an einer sogen. Hublatte oder einem sogen. Däumling) in der Entfernung l von seiner Mittellinie angreifende Kraft P (mittelst Hebedaumen) lothrecht emporgehoben werden, so muss er in zwei Punkten $F_1 F_2$ gestützt und geführt werden, von denen F_1 unten und vorn, F_2 oben und hinten liegt. Die lothrechte Entfernung der Punkte sei h. Diese Führungen üben auf den Stempel die wagerechten Drücke $Q_1 Q_2$ aus und rufen in den Gleitflächen die Reibungswiderstände fQ_1 und fQ_2 hervor. Nach den bekannten Gleichgewichtsbedingungen gelten nun folgende Gleichungen:

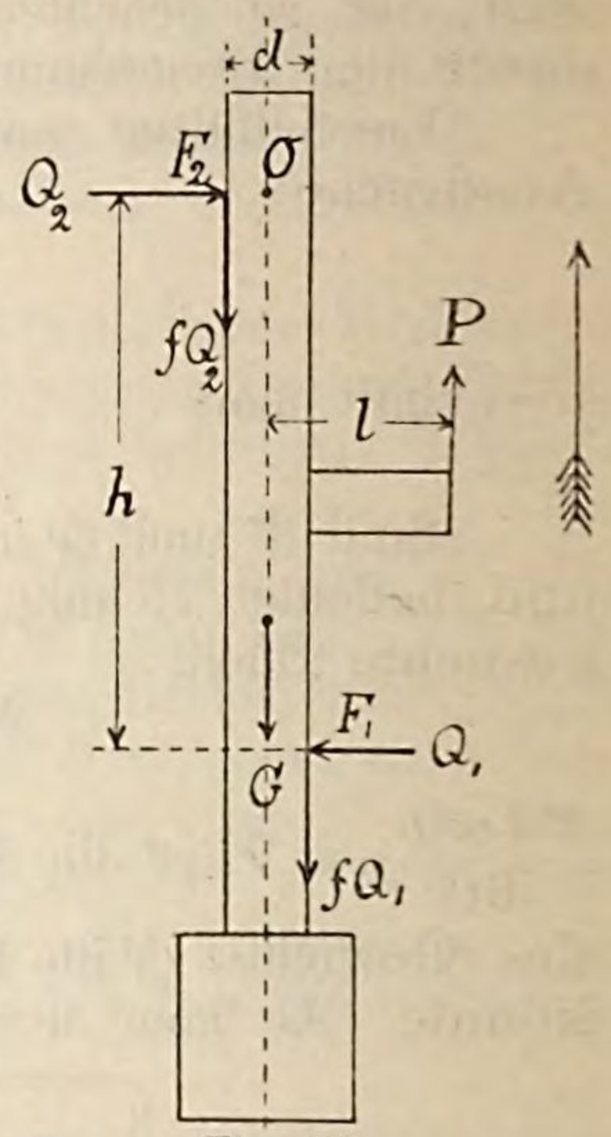


Fig. 416.

1. $Q_1 = Q_2 = Q$,
2. $P = G + 2fQ$,
3. $Pl = Qh$

in Bezug auf den beliebig angenommenen Drehpunkt O. (Die Dicke d des Stempels ist gegen h vernachlässigt, sonst müssten auch die Momente von fQ berücksichtigt werden.)

Aus 2 und 3 folgt:

$$4.\quad P = \frac{G}{1 - 2f\frac{l}{h}} \qquad \ldots\ldots\ldots\

$$\frac{h}{l} = 2f$$

erfüllt ist.

Es würde P sogar negativ werden für:

$$\frac{h}{l} < 2f,$$

also noch eine im entgegengesetzten Sinne (hier nach abwärts) wirkende Kraft erforderlich sein, um den „eingeklemmten“ Stempel erst wieder zulösen.

Es drückt deshalb die Gleichung:

$$\boxed{\frac{h}{l} \leqq 2f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 672$$

die Bedingung des **„Klemmens“** aus.

Sollte umgekehrt die Gefahr des Einklemmens ausgeschlossen sein, so müsste der Ungleichung:

$$\frac{h}{l} > 2f$$

genügt werden.

Der grösste Werth, den f bei den gebräuchlichen, technischen Vorkehrungen erreicht, bleibt doch meist weit unter 0,75 (als Reibungskoëffizient der Ruhe für Eichenholz auf Eichenholz, mit Wasser benetzt, wird angegeben 0,70; dagegen ist der Reibungskoëffizient der Ruhe für Gusseisen auf Gusseisen, wenig angefettet, kleiner als 0,2). Nehmen wir also als grössten Werth an:

$$f = 0{,}75,$$

so müssten wir bei unseren technischen Vorrichtungen, für welche dieser Reibungskoëffizient gilt, mindestens:

$$\frac{h}{l} = 1{,}5$$

machen, wenn wir das Festklemmen vermeiden wollten.

Andererseits müssten wir in allen den Fällen, in denen ein Festklemmen erwünscht ist, die Ungleichung:

$$\frac{h}{l} < 2f \quad \text{erfüllen.}$$

Beispiele. Die in neben- und umstehenden Figuren (417—422) dargestellten Beispiele möchten ohne viele Worte verständlich sein.

Die Schublade (Fig. 417) wird um so besser geführt, je grösser $\frac{h}{l}$ und je kleiner der Spielraum in den Führungen ist.

T in den Figuren 418 und 419 ist ein an einer Säule verschiebbarer Tisch oder Sitz.

Fig. 420 stellt zwei durch Stricke verbundene Rüstbäume dar.

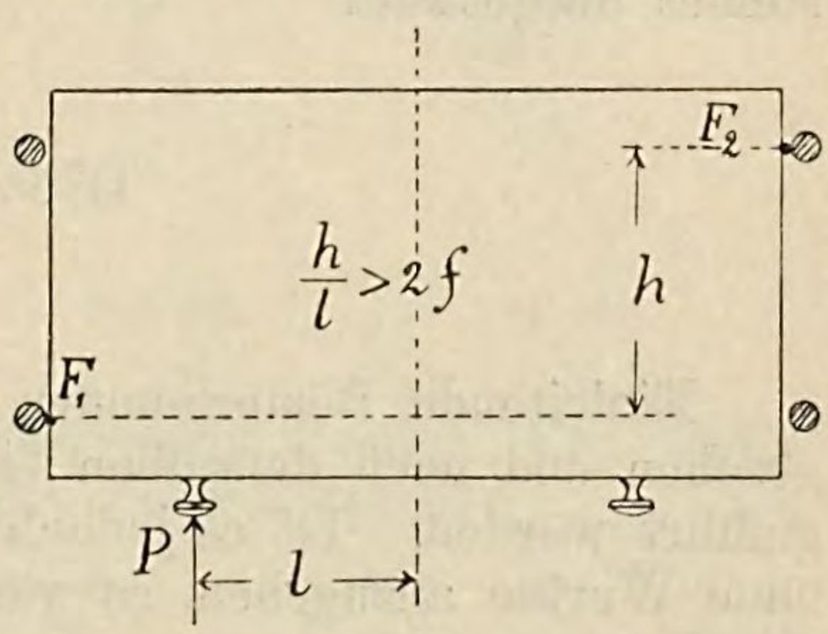


Fig. 417.

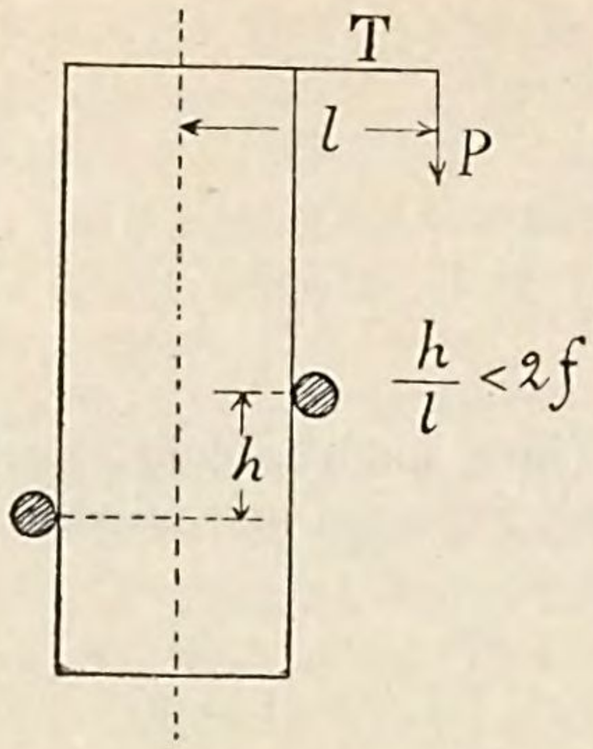


Fig. 418.

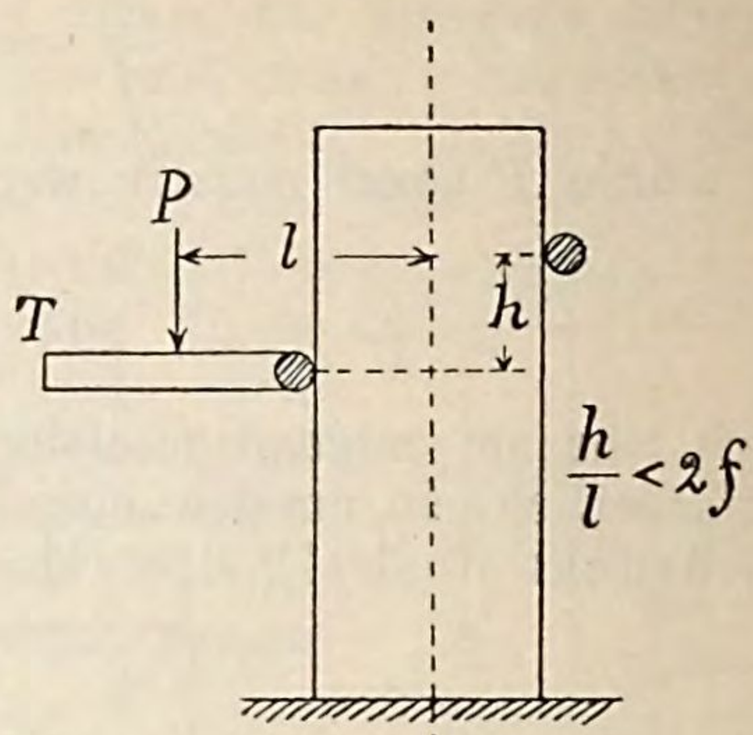


Fig. 419.

Fig. 421 deutet die sogen. Saladin'sche Einklinkung an, durch welche man mit geringer Mühe hohe glatte Bäume ersteigen kann.

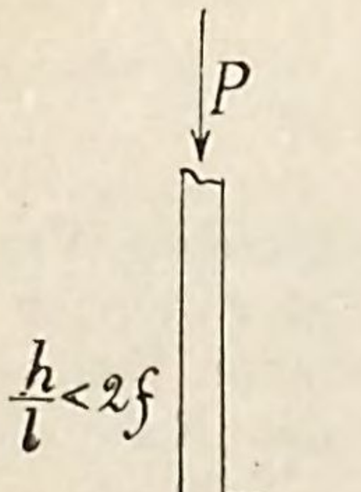


Fig. 420.

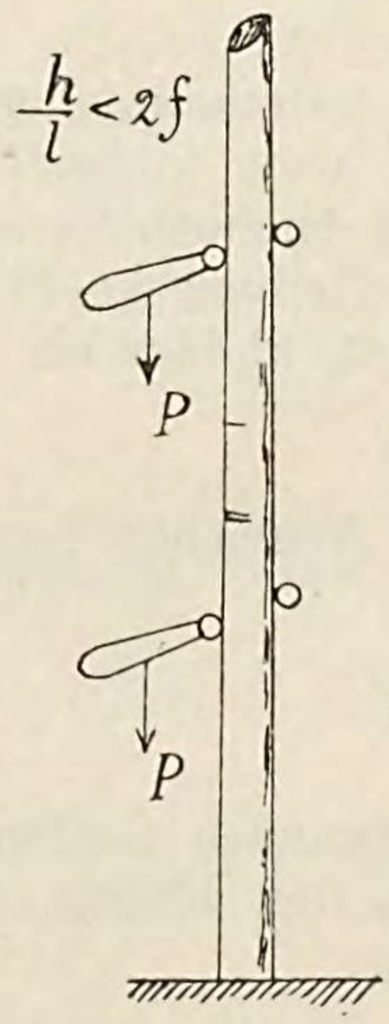


Fig. 421.

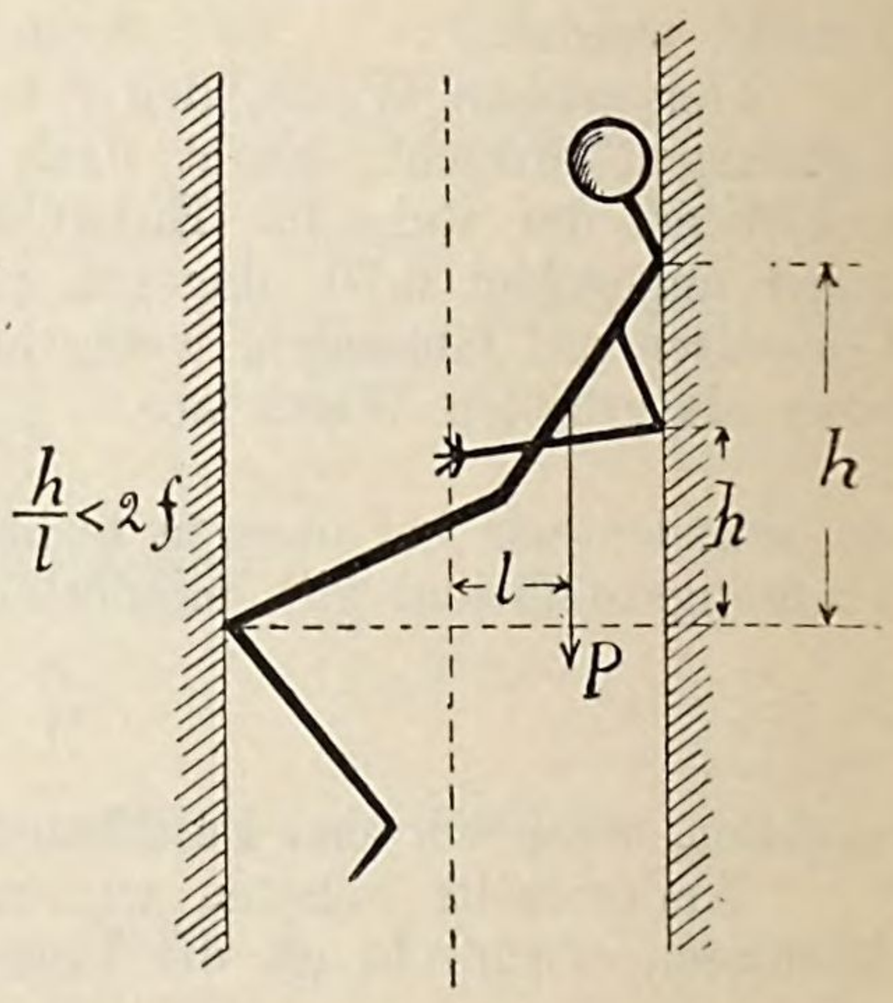


Fig. 422.

In Figur 422 ist ein Schornsteinfeger beim Ersteigen des Schornsteines dargestellt.

h.

Die Zapfenreibung.

§ 312.

Einleitende Bemerkungen. Dieselbe kann als gleitende Reibung angesehen und nach denselben Grundsätzen wie diese in die Rechnung eingeführt werden. Ist es jedoch ohnehin nicht möglich für die Reibung genaue Werthe anzugeben, so wächst die Schwierigkeit noch mehr bezüglich der Zapfenreibung.

So veranlassen neue Zapfen meist eine weit grössere Reibung als solche, die bei sorgfältiger Wartung spiegelblank sich eingelaufen haben.

Man nehme als Reibungswiderstand an:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{3}{2} f \cdot Q \quad \text{bis} \quad \frac{3}{4} f \cdot Q \\ \text{im Mittel:} \\ &= f \cdot Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 673$$

wie bei der gleitenden Reibung.

Die Grösse des Reibungskoëffizienten hängt wesentlich mehr von dem spezifischen Flächendrucke (Länge des liegenden Zapfens), dem Schmiermittel und der Geschwindigkeit, als von der Art der übereinanderhergleitenden Metalle ab.

Für Eisen auf Weissmetall oder Bronze und Oelschmierung rechne man, wenn der spezifische Druck weniger als 30 kg auf 1 qcm beträgt:

$f = 0{,}08$ bei gewöhnlicher Schmierung,
$= 0{,}05$ bei guter „
$= 0{,}01$ bis $0{,}001$ bei sorgfältigster Schmierung.

Bei Wagenschmiere ist etwa:

$$f = 0{,}16.$$

Das Moment der Zapfenreibung, welches durch das Kraftmoment $K \cdot l$ überwunden werden muss, ist:

1. Für den gewöhnlichen Tragzapfen (liegenden Zapfen Fig. 423):

$$Kl = Wr = fQ \cdot r \quad \ldots \quad 674$$

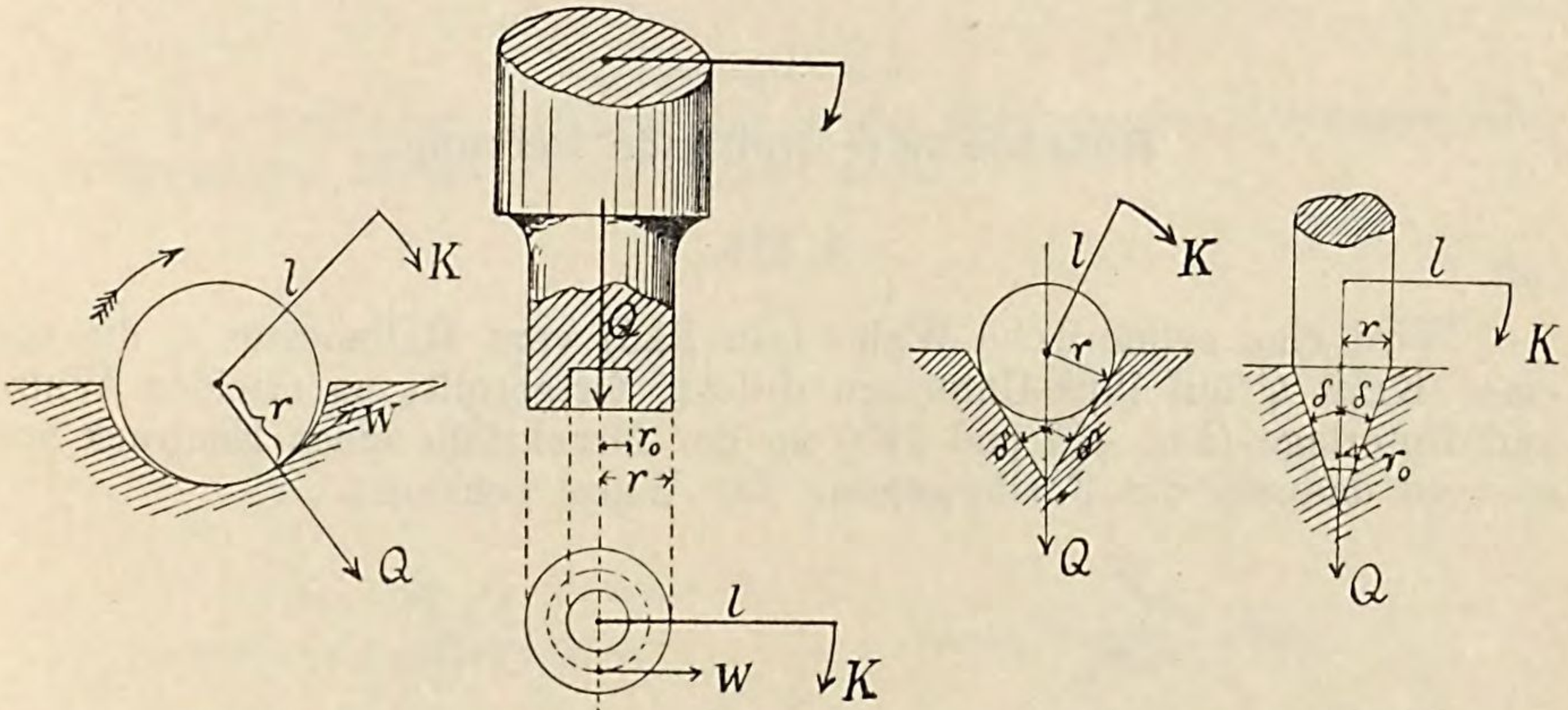


Fig. 423. Fig. 424. Fig. 425. Fig. 426.

2. Für den ringförmigen Stützzapfen (stehenden Zapfen Fig. 424), auch Kammzapfen (Siehe Maschinenbau unter Zapfen);

$$Kl = W \frac{r + r_0}{2} = fQ \cdot \frac{r + r_0}{2} \quad \ldots \quad 675$$

3. Für den vollen Stützzapfen ($r_0 = 0$) (Fig. 424):

$$Kl = W \cdot \frac{R}{2} = f Q \frac{R}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 676$$

4. Für den Tragzapfen im Keilnuthlager (Fig. 425):

$$Kl = W \cdot r = f' \cdot Q \cdot r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 677$$

5. Für den kegelförmigen Stützzapfen (Fig. 426):

$$Kl = W \cdot \frac{r + r_0}{2} = f' Q \frac{r + r_0}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 678$$

wenn in den beiden letzten Fällen mit $f' = \frac{f}{\sin \delta}$ der Reibungskoëffizient der Keilnuthen bezeichnet wird (Siehe § 301).

§ 313.

Die mechanische Arbeit, welche durch die Reibung verzehrt wird, ist:

$A = W^{kg} \cdot 2r^{m}\pi$ mkg bei einer Umdrehung . 679

$A = W^{kg} \cdot 2r^{m}\pi n$ bei n Umdrehungen, oder . 680

in 1 Minute, wenn n die Umdrehungszahl in 1 Minute ist.

$$E = \frac{W^{kg}\, 2r^{m}\pi n}{60} \text{ mkg Effekt in 1 Sekunde} \quad . \quad . \quad 681$$

$$N = \frac{W^{kg}\, 2r^{m}\pi n}{60 \cdot 75} \text{ Pferdekräfte} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 682$$

B.

Rollende oder wälzende Reibung.

§ 314.

Wird eine cylindrische Walze (ein Rad) vom Halbmesser r, die mit einer Kraft Q auf ihre Unterlage drückt, fortgerollt, so erleiden Walze und Unterlage (Fig. 427 und 428) an der Druckstelle einen Eindruck und es wird dadurch die Fortbewegung der Walze gehemmt.

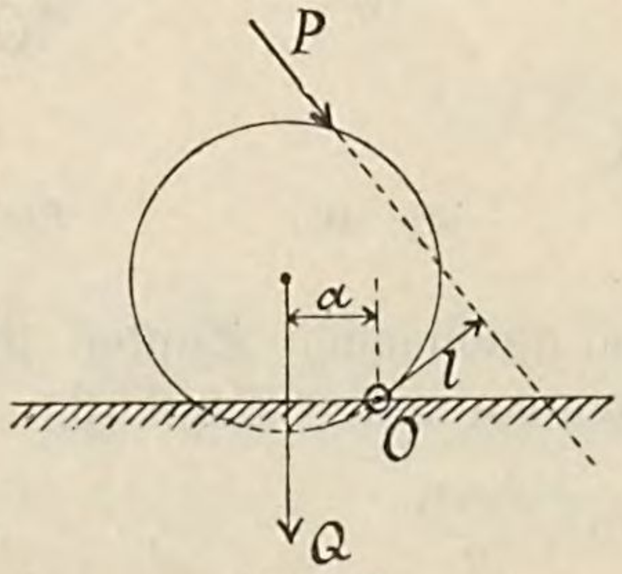


Fig. 427.

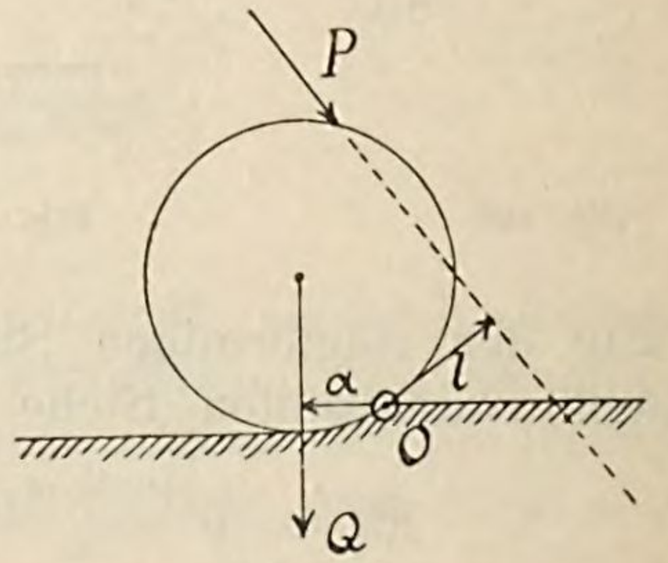


Fig. 428.

Dieser Eindruck ist um so grösser,

1. je weicher Walze und Unterlage,
2. je kleiner der Radius der Walze und
3. je grösser der spezifische Druck (also
4. je schmaler die Walze) ist.

Der Widerstand hier gegen Fortbewegung, die sog. „rollende oder wälzende Reibung“, hat genau genommen mit der bislang behandelten Reibung nichts gemein.

Die rollende Reibung ist vielmehr zu vergleichen mit dem Widerstande, den ein Körper dem Umkippen um eine Kante O (Siehe oben Stabilität) entgegenstellt.

Die zum Umkanten erforderliche Kraft P ergiebt sich aus dem Satz von den statischen Momenten: Fürs Gleichgewicht muss das Triebkraftmoment gleich dem Widerstandsmoment sein:

$$P \cdot l = a \cdot Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 683$$

Der Arm a, welcher die Grösse des Eindruckes misst und durch Versuche ermittelt werden muss, heisst der Koëffizient der rollenden Reibung. Letzterer ist demnach eine Länge und nicht wie der der gleitenden Reibung eine Verhältnisszahl.

Im Folgenden sollen einige für die Praxis wichtige Fälle unterschieden werden.

1. Die Triebkraft P wirkt in der Richtung der Unterlage und greift in der Mitte der Walze an (Fig. 429), dann ist der Hebelarm dieser Kraft genau genug gleich r, folglich:

$$P_1 \cdot r = a \cdot Q,$$

$$\boxed{P_1 = a \cdot \frac{Q}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 684$$

2. Die Triebkraft wirkt wieder in der Richtung der Unterlage, aber im Scheitel der Walze ($l = 2r$) (Fig. 430):

$$P_2 = a \cdot \frac{Q}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 685$$

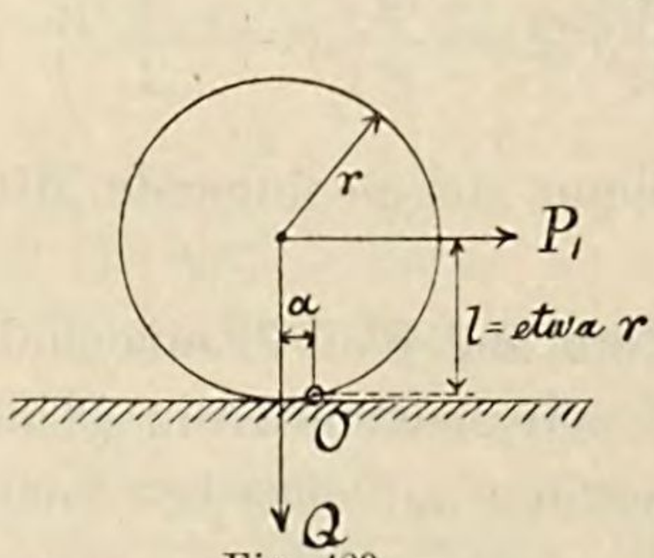


Fig. 429.

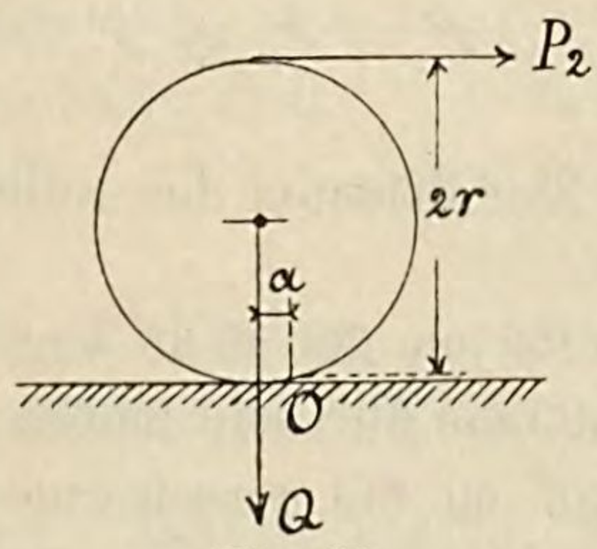


Fig. 430.

3. Die Triebkraft wirkt an einem auf der Walze (oder auf zwei Walzen) liegendem Balken, an dem ebenfalls ein Eindruck erfolgt (Fig. 431):

$$P_3 = (a + a_1) \frac{Q}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 686$$

Wird der Eindruck veranlasst durch das Gewicht der Walze Q und das Gewicht des Balkens Q_1, so ist erforderlich:

$$P = a\,\frac{Q + Q_1}{2r} + a_1\,\frac{Q_1}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 687$$

4. Wird, wie bei einem Wagen, die Last Q durch Räder fortbewegt, so kommt zu der rollenden Reibung am Umfange der Räder noch die Zapfenreibung mit dem Reibungskoëffizienten f hinzu (Fig. 432).

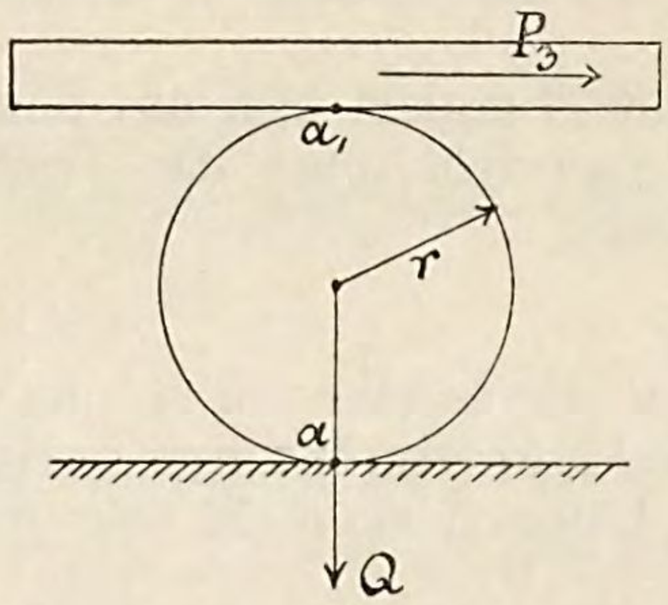


Fig. 431.

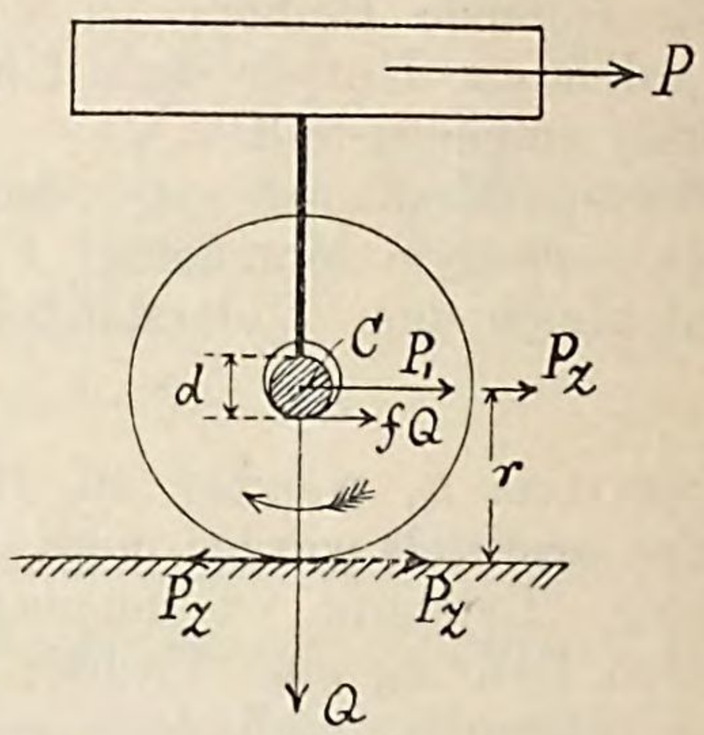


Fig. 432.

Die rollende Reibung ist nach Gleichung 684:

$$P_1 = a\,\frac{Q}{r};$$

die Zapfenreibung, auch auf den Umfang des Rades reducirt, erhält man nach dem Satze von den statischen Momenten für den Mittelpunkt C des Zapfens als Drehpunkt:

$$P_z = \frac{\frac{d}{2}}{r}\,fQ.$$

Demnach ist die erforderliche Zugkraft:

$$P = P_1 + P_z = a\,\frac{Q}{r} + \frac{d}{2r}fQ = \frac{Q}{r}\left(a + \frac{d}{2}\,f\right) \quad . \quad . \quad 688$$

Als Koëffizienten der rollenden Reibung mögen folgende Mittelwerthe gelten:

a = 0,084 cm für nicht sehr hartes Holz auf Holz (Tannenholz),
= 0,05 cm für sehr hartes Holz auf sehr hartem Holz (Eichenholz),
= 0,05 cm für gusseiserne Eisenbahnräder auf eisernen Schienen.

Beispiel 133: Für Eisenbahnen ist im Mittel die zur Fortbewegung auf horizontaler Schienenbahn erforderliche Zugkraft P, wenn gesetzt wird:

r = 50 cm Halbmesser der Räder,

$\frac{d}{2}$ = 4 cm Halbmesser der Zapfen,

$a = 0{,}05$ cm,
$f = 0{,}04$ angenommen,

$$P = Q\,\frac{1}{50}\,(0{,}05 + 4 \cdot 0{,}04) = Q\,\frac{1}{50}\,(0{,}05 + 0{,}16)$$

$$P = Q\,\frac{1}{250} = 0{,}004 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 688$$

Demnach wäre der 250ste Teil der Last als Zugkraft erforderlich. Nennen wir das Verhältniss:

$$\frac{P}{Q} = k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 690$$

so ist für die gewöhnlichen Fälle zu nehmen:

$k = \frac{1}{250} = 0{,}004$ für Eisenbahnen,
$k = 0{,}013$ „ Asphaltstrassen und vorzügliches Steinpflaster,
$= 0{,}015$ „ vorzügliche Chausseen,
$= 0{,}018$ „ gutes Holzpflaster,
$= 0{,}020$ „ „ Steinpflaster,
$= 0\,023$ „ gute Chausseen,
$= 0{,}033$ „ mittelmässiges Steinpflaster,
$= 0{,}045$ „ vorzügliche Erdwege,
$= 0{,}080$ „ gute Erdwege,
$= 0{,}16$ „ schlechte Erdwege.

Man nehme an bei vorzüglich gewarteten, bergmännischen Förderwagen und Bahnen:

$$k = 0{,}010$$

für gewöhnliche Fälle:

$$k = 0{,}015.$$

Im ersten Falle würde zum Fortschaffen einer Last $Q = 1000$ kg eine Zugkraft $P = 10$ kg; im letzteren Falle eine Zugkraft $P = 15$ kg erforderlich sein.

Hölzerne Schlittenkufen

auf glatter Holz- oder Steinbahn ohne Schmiere: $k = 0{,}40$,
mit trockener Seife: $= 0{,}15$,
mit Talg . . . . $= 0{,}05$,
auf Eis und Schnee . . . . . $= 0{,}04$,
mit Eisen beschlagene Kufen auf Eis und Schnee $= 0{,}02$.

Vorstehende Werthe gelten für Drücke von $p = 10$ bis 20 kg auf 1 qcm der Kufenfläche.

Bei guten Schneeschuhen, die mindestens 200 cm Länge und 10 cm Breite haben sollten, würde, wenn das Körpergewicht des Läufers zu 70 kg gerechnet wird, nur der Druck:

$$p = \frac{70}{200 \cdot 10} = 0{,}035 \text{ kg auf 1 qcm der Schuhfläche}$$

betragen.

§ 315.

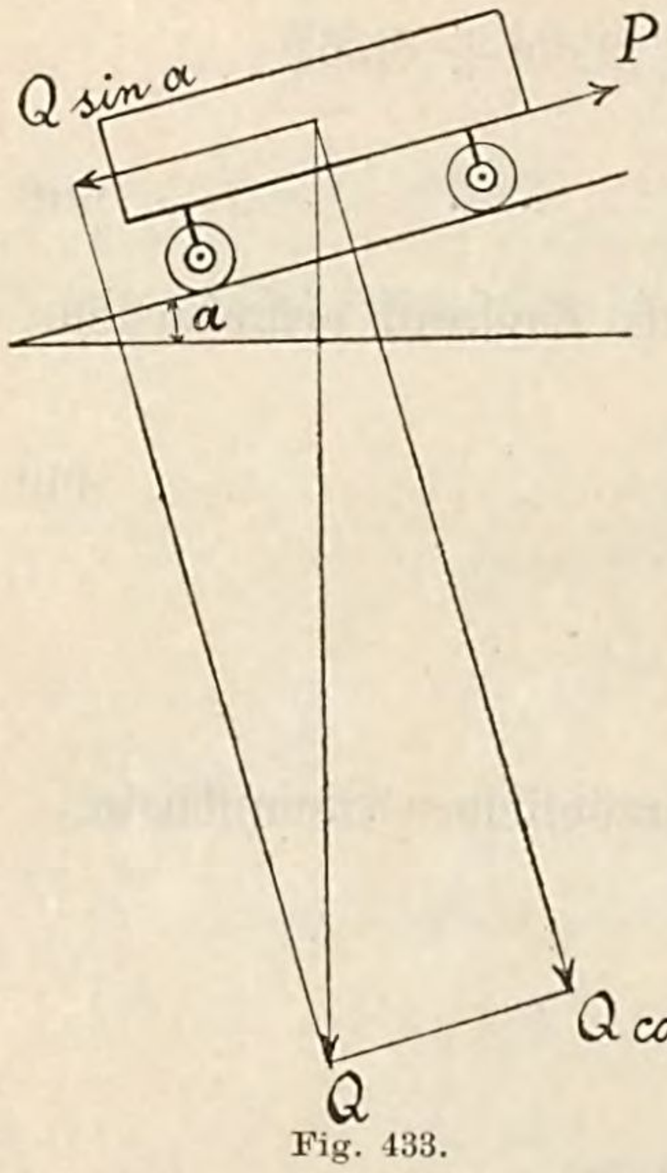


Fig. 433.

Bewegung von Fuhrwerken auf geneigten Bahnen (Fig. 433). Auf Bahnen, die den Winkel α gegen den Horizont einschliessen, wächst die Zugkraft P nahezu um $Q \cdot \sin \alpha$, wenn Q wieder die fortzubewegende Last ist. Auf Reibung wirkt die normal zur Bahn gerichtete Komponente $Q \cdot \cos \alpha$; danach ist:

$$P = Q \cdot \sin \alpha + Q \cdot \cos \alpha \left(\frac{a}{r} + \frac{\frac{d}{2}}{r} f \right); \quad 691$$

(Siehe auch oben unter 4.)

Für $a = 10^0$ ist:

$$P = Q \left[0{,}174 + 0{,}985 \left(\frac{a + \frac{d}{2} f}{r} \right) \right] \quad 692$$

Wegen der Werthe von a und f siehe das Voranstehende.

Der Stoss
und
die durch den Stoss bewirkten Bewegungsänderungen der Körper.

§ 316.

Einleitende Bemerkungen. Der Stoss entsteht bei dem plötzlichen Zusammentreffen zweier Massen, von denen also mindestens eine in Bewegung begriffen sein muss, und ist meist als eine Folge der Trägheit anzusehen.

Auch die Wirkungen bei Explosionen sind als Stosswirkungen anzusehen.

Ueberhaupt finden letztere nicht allein zwischen festen, sondern auch zwischen flüssigen und gasförmigen Körpern statt.

Stoss ist es auch, was wir als Schall, Wärme, Licht empfinden.

In den meisten Fällen pflegt man einen stossenden und einen gestossenen Körper zu unterscheiden. Jedoch die Kraft P, mit welcher an der Stossstelle zwei Körper aufeinander einwirken, ist eine gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete (Gesetz der Wechselwirkung § 8).

Die Dauer t des Stosses ist meistens sehr klein, aber keineswegs verschwindend klein. Man pflegt die Stosskraft auch Momentankraft zu nennen.

Die Wirkung des Stosses hängt ab von der Masse M
und von der Geschwindigkeit V
des gestossenen oder des stossenden Körpers. Als Maass der Stosswirkung gilt deshalb das Produkt, nämlich die:

$$\text{Bewegungsgrösse} = M \cdot V.$$

Siehe auch Gleichung 152.

Der Stoss bewirkt unmittelbar an der Stossstelle eine Zusammendrückung.

Je nachdem diese Zusammendrückung bleibt oder wieder verschwindet, nennt man den Stoss:

unelastisch,

oder:

elastisch.

Treffen zwei hintereinander her sich bewegende Massen aufeinander- so lassen sich im Allgemeinen während des Stosses folgende Bewegungs, erscheinungen unterscheiden:

Bei Beginn des Stosses hat der stossende Körper M die grössere Geschwindigkeit V. Seine Bewegung wird verzögert. Dagegen wird die Bewegung des gestossenen Körpers m mit der Geschwindigkeit v entsprechend beschleunigt. Die Geschwindigkeiten verändern sich demnach. Diese Erscheinung dauert bis zur grössesten Zusammendrückung.

In diesem Augenblicke haben beide Körper dieselbe Geschwindigkeit u.

Die erste Stossperiode ist hiermit beendet. Beim vollkommen unelastischen Stosse bleiben nun die beiden Massen (z. B. Bleikugeln) an der Stossstelle zusammengedrückt. Es erfolgt weiter keine Gestaltsveränderung, also auch keine Geschwindigkeitsveränderung. Sie bewegen sich von nun ab gleich wie eine zusammengehörige Masse mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u weiter.

Bei vollkommen elastischem Stosse ist eine zweite Stossperiode mit Gestalt- und Geschwindigkeitsänderung zu unterscheiden. Indem nämlich die beiden Körper (z. B. zwei vollkommen elastisch gedachte Stahl- oder Elfenbeinkugeln) an der Stossstelle sich wieder ausdehnen, wirken sie weiter gegenseitig genau so aufeinander ein, wie in der ersten Stossperiode. Es erfährt deshalb abermals der stossende Körper eine gleich grosse Verzögerung, der gestossene eine gleich grosse Beschleunigung wie in der ersten Stossperiode.

Nur bei unvollkommen elastischen Körpern fallen die Veränderungen in der zweiten Periode kleiner aus.

Im Allgemeinen sind die stossenden Körper unvollkommen elastisch.

Am Ende der zweiten Stossperiode treten beide Körper ausser Berührung und verlassen einander mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Beim Zusammentreffen an sich elastischer Körper muss in vielen Fällen der Technik der Stoss als ein unelastischer angesehen werden. Bei der bergmännischen Bohrarbeit z. B. schlägt der elastische Bohrstahl auf das elastische Gestein und dennoch wird der Stoss durch das sich bildende

Bohrmehl mehr zu einem unelastischen. Auch der Stoss beim Eintritt eines Wasserstrahles in die Zellen des Wasserrades kann als unelastisch angesehen werden (Siehe meine Maschinenlehre, Wasserräder). Dasselbe gilt vom Stoss beim Zusammentreffen eines Dampf- und Wasserstromes (Giffard's Injektor, Maschinenlehre).

Man unterscheidet noch einen

centrischen oder excentrischen

und einen:

geraden oder schiefen

Stoss.

Bezeichnet man nämlich mit Stosslinie die Senkrechte NN, die man im Stosspunkte O auf der gemeinschaftlichen Stossebene (Berührungsebene)

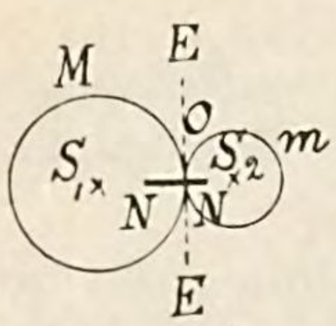


Fig. 434a.

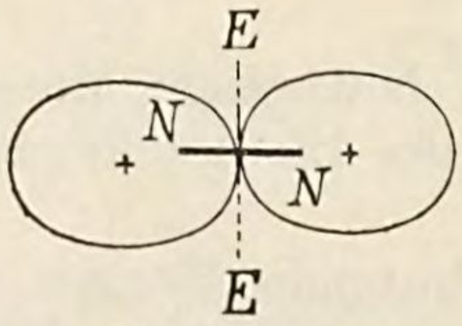


Fig. 434b.

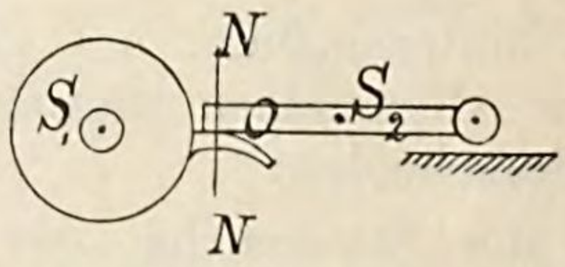


Fig. 435.

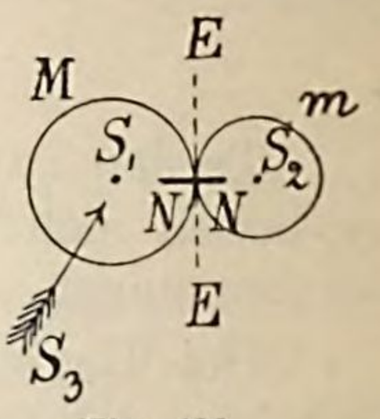


Fig. 436.

EE errichtet, mit $S_1 S_2$ die Verbindende der beiden Schwerpunkte, so ist der Stoss:

centrisch, wenn die Stosslinie NN durch die Schwerpunkte $S_1 S_2$ geht (Fig. 434a),

excentrisch im anderen Falle (Fig. 434b und 435).

Je nach der Bewegungsrichtung im Augenblicke des Zusammenstosses nennt man den Stoss:

gerade, wenn die Bewegungsrichtung mit NN zusammenfällt oder gleichlaufend ist (Fig. 434a),

schief, wenn die Bewegungsrichtung nicht mit NN zusammenfällt. Käme z. B. der Körper M (Fig. 436 und 437) in der Richtung $S_3 S_1$ an, so würde für diesen Körper der Stoss ein schiefer sein.

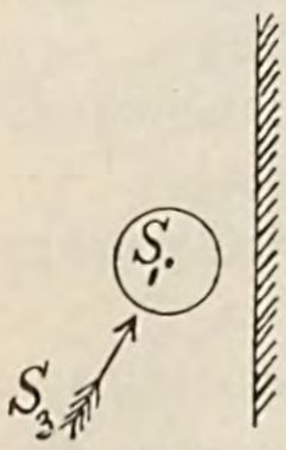


Fig. 437.

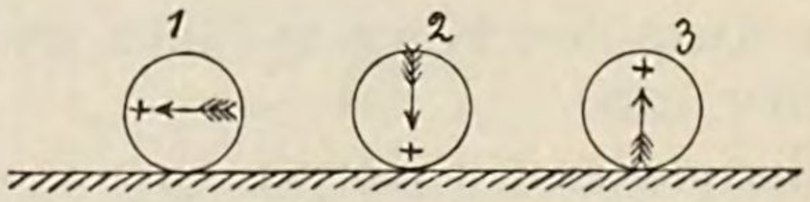


Fig. 438.

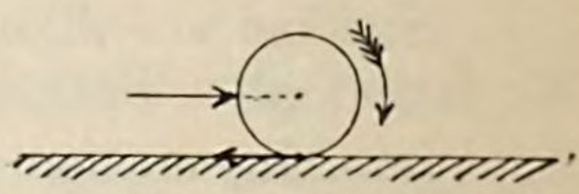


Fig. 439.

Der centrische und gerade Stoss bringt nur eine Aenderung in der fortschreitenden Bewegung, dagegen der excentrische und schiefe auch Drehbewegung hervor (schiefe und excentrische Stoss beim Billardspiel).

Ein in den Punkten 1 2 3 getroffener Ball nimmt die durch die Pfeile angedeuteten Drehungen an (Fig. 438).

Der centrisch getroffene Billardball (Fig. 439) würde keine Drehung annehmen, sondern auf der Billardtafel hingleiten, wenn er durch die Rauhheit der letzteren nicht zum Rollen (Vornüberkippen) gezwungen würde.

In vielen Fällen der Praxis (z. B. beim Schmieden, Erzpochen, Gesteinsbohren, Eintreiben von Pfählen und Nägeln) ist die Wirkung des Stosses nützlich. In sehr vielen anderen Fällen jedoch sind die Stosswirkungen schädlich und deshalb von unseren technischen Vorrichtungen (Bauwerken, Maschinen) fern zu halten oder durch Verwandelung von unelastischen in elastische zu mildern (Puffer bei den Eisenbahnwagen).

Wer an sich die Wirkung zwischen einem unelastischen und elastischen Stoss erproben will, lasse sich rasch das eine Mal auf einen unelastischen, das andere Mal auf einen gepolsterten Sitz nieder.

A.

Der unelastische, gerade, centrale Stoss.

§ 317.

Zwei unelastische Körper von den Massen M und m bewegen sich in derselben Geraden hintereinander her (Fig. 440):

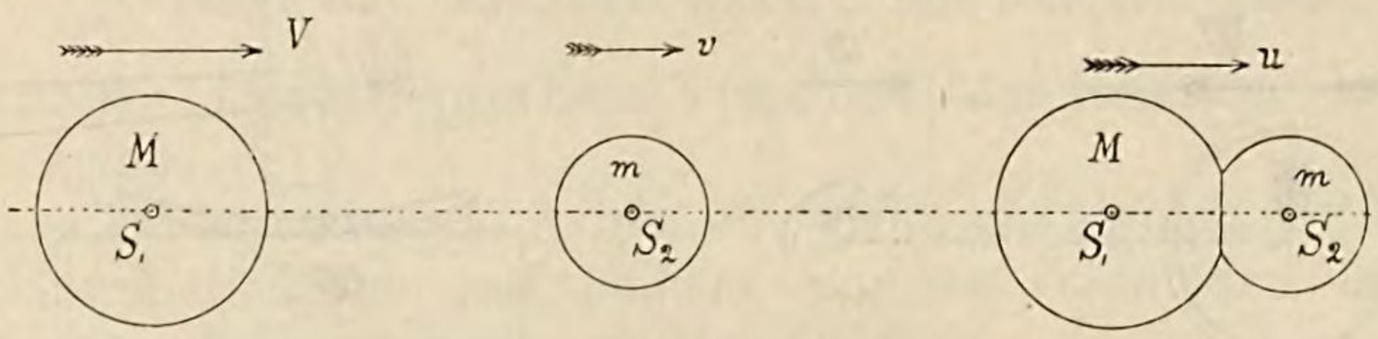


Fig. 440.

M mit $+$ V Geschwindigkeit,
m „ $+$ v „

V ist $> v$,

M holt m ein; der Stoss erfolgt:

M wird verzögert
m „ beschleunigt } bis zur grössesten Zusammendrückung;

dann bewegen sich nach dem Stosse beide Massen wie eine zusammenhängende Masse $(M + m)$ mit derselben Geschwindigkeit u weiter, die sich folgendermassen bestimmen lässt:

Die Bewegungsgrösse vor dem Stosse $= MV + mv$,
nach dem Stosse $= (M + m)\,u$

und behält denselben Werth*), demnach ist:

*) Diesen Erfahrungssatz hat mit Bestimmtheit wohl zuerst Carthesius ausgesprochen. Allgemeiner noch sagt Huygens, dass der Gesammtschwerpunkt der zusammenstossenden Massen sich vor und nach dem Stosse mit derselben Geschwindigkeit bewege. Auf Grund dieses Satzes gilt Huygens als Entdecker des Prinzipes von der Erhaltung des Schwerpunktes.

$$(M + m)\, u = M\, V + m v$$

$$\boxed{u = \frac{M\, V + m v}{M + m} = \frac{Q\, V + q v}{Q + q}} \quad \ldots\ldots \quad 693$$

wenn die Gewichte der Massen beziehungsweise $Q = Mg$,
$q = mg$ sind.

Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit u nach dem Stoss erhält man, wenn man:

die Summe der Bewegungsgrössen durch die Summe der Massen

theilt.

Beispiel 134: $Q = 150\,\text{kg}$, $q = 40\,\text{kg}$; $V = 5\,\text{m}$, $v = 3\,\text{m}$

$$u = \frac{150 \cdot 5 + 40 \cdot 3}{150 + 40} = 4{,}6\,\text{m}.$$

Besondere Fälle:

1. Die Masse m bewegt sich der Masse M entgegen, d. h. v ist negativ (Fig. 441),

folglich:
$$u = \frac{M\, V - m v}{M + m} = \frac{Q\, V - q v}{Q + q} \quad \ldots\ldots \quad 694$$

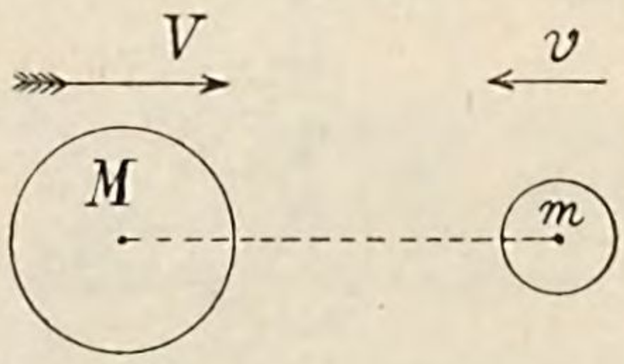


Fig. 441.

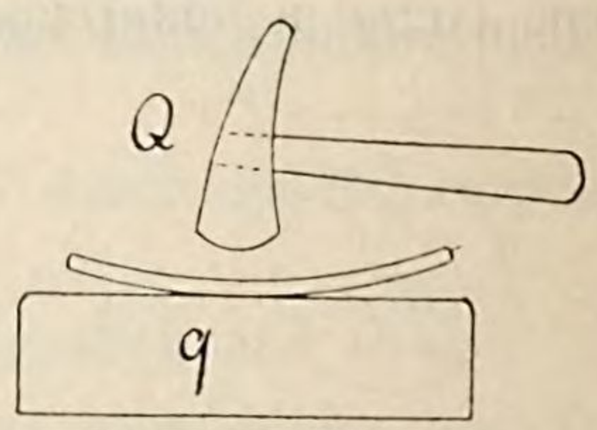


Fig. 442.

Dieser Fall findet Anwendung beim Giffard'schen Injektor (Dampfmaschinenlehre).

Beispiel 135: Für obige Zahlenwerthe ist jetzt:

$$u = \frac{150 \cdot 5 - 40 \cdot 3}{150 + 40} = 3{,}3\,\text{m}.$$

2. Die einander entgegenkommenden Massen sollen nach dem Zusammenstoss liegen bleiben. Dann muss:

$$u = 0 = M\, V - m v,$$

d. h.:
$$\left.\begin{aligned} M\, V &= m v, \\ \frac{M}{m} &= \frac{v}{V}, \end{aligned}\right\} \text{ sein.} \quad \ldots\ldots \quad 695$$

Beide Körper müssen dieselbe Bewegungsgrösse, die kleinere Masse demnach die so viel grössere Geschwindigkeit haben, dass der letzten Proportion genügt wird.

3. Die Massen haben wieder dieselbe Richtung, aber sind gleichgross, also:

$$M = m.$$

Dann ist:

$$u = \frac{MV + Mv}{M + M} = \frac{V + v}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 696$$

4. Die gleich grossen Massen haben entgegengesetzte Richtung:

$$u = \frac{V - v}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 697$$

5. Die Masse m ist vor dem Zusammenstosse in Ruhe, d. h.:

$$v = 0$$

$$u = \frac{M}{M + m} V = \frac{Q}{Q + q} \cdot V \quad \ldots\ldots\ldots \quad 698$$

Beispiel 136: (Fig. 442).

Ein Schuster hämmert mit einem $Q = 0{,}5$ kg schweren Hammer Leder auf einem Stein oder eisernem Ambos, den er auf den Knieen liegen hat. Der Stein hat das Gewicht $q = 20 \cdot Q = 10$ kg. Hammer und Stein sind zwar elastisch, aber durch das Leder wird der Stoss unelastisch gemacht. Alsdann ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich nach dem Zusammenstosse Hammer und Stein nach den Knieen hin bewegen, nur

$$u = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 10} V = \frac{1}{21} V,$$

also nur der $\frac{1}{21}$ Theil der Geschwindigkeit, mit der der Hammer auf das Leder niederfällt. Dementsprechend empfindet der Schuster die Hammerschläge schwächer.

So erklärt es sich, dass ein Athlet ein Stück gluthweiches Eisen mittelst wuchtiger Hammerschläge auf seinem Bauche schmieden lassen kann, wenn er nur den Ambos massig genug wählt.

6. Die Masse m ist sehr gross ($m = \infty$), ihre Geschwindigkeit $v = 0$ alsdann ist:

$$u = \frac{MV + mo}{M + \infty} = O \quad \ldots\ldots \quad 699$$

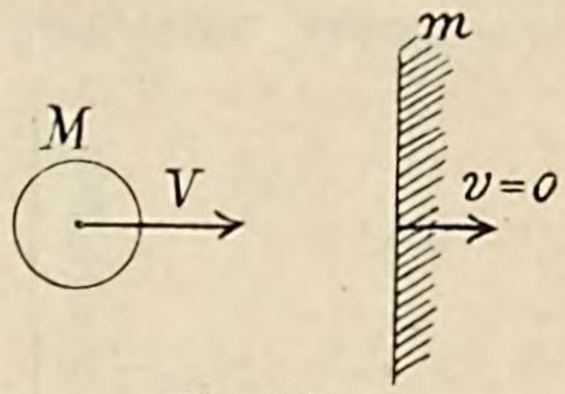


Fig. 443.

Schlägt z. B. eine Bleikugel gegen eine feststehende eiserne Scheibe, deren Masse m gegenüber der Masse M der Kugel als sehr gross angesehen werden darf, so fällt sie nach dem Aufschlagen mit der Geschwindigkeit Null vor der Scheibe nieder.

B.

Der elastische, gerade, centrale Stoss.

§ 318.

Zwei elastische Massen M und m bewegen sich hintereinander her

M mit der Geschwindigkeit V,
m „ „ „ v,

$V > v$

M holt m ein; der Stoss erfolgt.

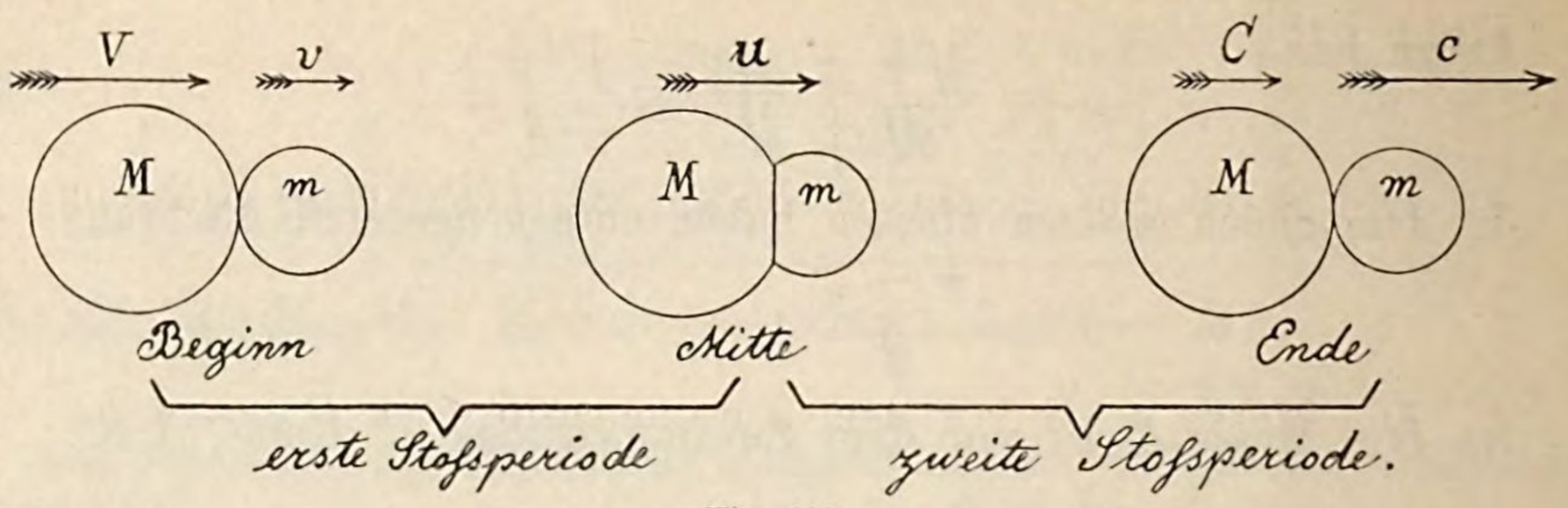


Fig. 444.

Nun erfährt die Masse M eine Geschwindigkeitsabnahme:

in der ersten Stossperiode . . . . . $V - u$
„ „ zweiten „ abermals $V - u$
also im Ganzen . . . . . $2(V - u)$.

Ihre Geschwindigkeit am Ende des Stosses ist demnach:

$C =$ *Anfangsgeschwindigkeit* — *Abnahme*

$$C = V - 2(V - u) \quad \ldots \quad 700$$

Dagegen erfährt die Masse m eine Geschwindigkeitszunahme:

in der ersten Stossperiode . . . . . $u - v$
„ „ zweiten „ abermals $u - v$
also im Ganzen . . . . . $2(u - v)$.

Ihre Geschwindigkeit am Ende des Stosses ist somit:

$c =$ *Anfangsgeschwindigkeit* + *Zunahme*

$$c = v + 2(u - v) \quad \ldots \quad 701$$

Setzt man nun in die Gleichungen 1 und 2 den Werth:

$$u = \frac{MV + mv}{M + m}$$ ein (Gl. 693), so erhält man:

$$\boxed{C = \frac{2mv + V(M - m)}{M + m}} \quad \ldots \quad 702$$

$$\boxed{c = \frac{2MV - v(M - m)}{M + m}} \quad \ldots \quad 703$$

als Gleichungen des Centralstosses elastischer Körper, welche sich in derselben Richtung hintereinander herbewegen.

Besondere Fälle:

1. Bewegen sich die Massen M und m aufeinander zu (Fig. 445), so ist

v negativ

einzuführen, und es erfolgt:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{-2mv + V(M - m)}{M + m}, \\ c &= \frac{+2MV + v(M - m)}{M + m}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 704$$

2. Sind beide Massen gleich gross, also $M = m$ (Fig. 446) und haben sie wieder dieselbe Bewegungsrichtung, so folgt nach den Gleichungen 702 und 703:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{2\,Mv + V(M - M)}{M + M} = v \\ c &= \frac{2\,MV - v\,(M - M)}{M + M} = V \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 705$$

d. h. *zwei gleich grosse elastische Massen vertauschen beim Stoss ihre Geschwindigkeiten.*

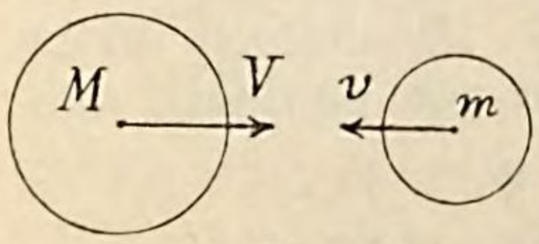


Fig. 445.

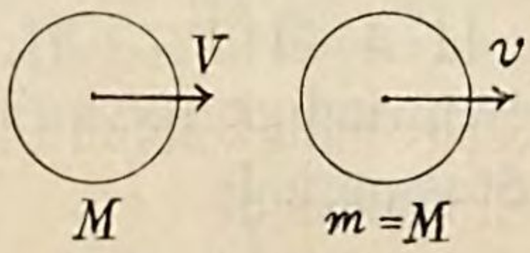


Fig. 446.

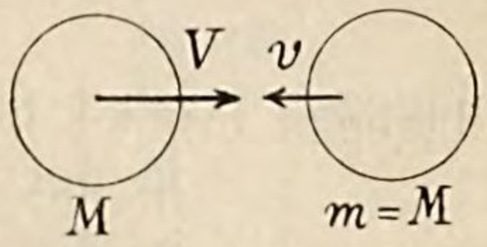


Fig. 447.

3. Haben zwei gleich grosse Massen entgegengesetzte Richtung, ist also (Fig. 447):

$$m = M$$

v negativ, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{-\,2\,Mv + V\,(M - M)}{M + M} = -\,v \\ c &= V \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 706$$

4. Eine Masse stösst auf eine gleich grosse, ruhende (Fig. 448), dann ist für $m = M$ und $v = 0$ nach 702 und 703:

$$C = 0; \qquad c = V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 707$$

d. h. *der stossende Körper kommt zur Ruhe, der gestossene nimmt die Geschwindigkeit des stossenden an.*

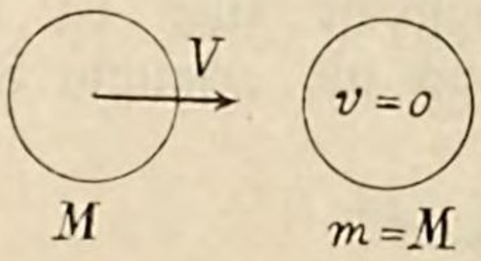


Fig. 448.

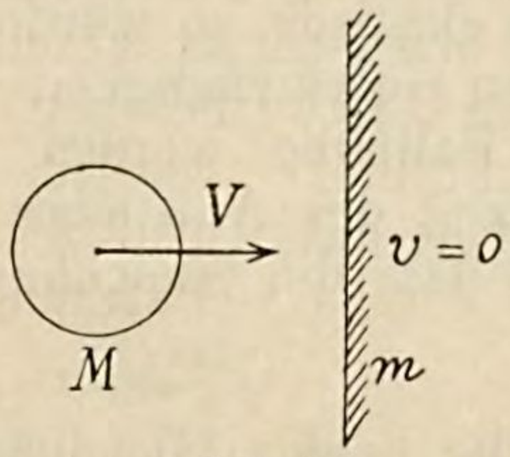


Fig. 449.

5. Stösst eine kleine Masse M auf eine grosse ruhende m (Fig. 449), so bleibt m in Ruhe, M prallt zurück, denn:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{2\,mv + V\,(M - m)}{M + m} = -\,V, \\ c &= \frac{2\,MV - v\,(M - m)}{M + m} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 708$$

wenn M und $V =$ Null gesetzt werden.

C.

Der unvollkommen elastische Stoss.

§ 319.

Im Anschlusse an das, was § 318 vom vollkommen elastischen Stosse gesagt ist, gibt hier Folgendes:

M erfährt die Geschwindigkeitsabnahme:

in der ersten Stossperiode . . . . $V - u$,
in der zweiten „ nur $e(V - u)$,

zusammen:

$$(1 + e)(V - u),$$

dagegen erlangt m die Geschwindigkeitszunahme:

in der ersten Stossperiode . . . . $u - v$,
in der zweiten „ nur $e(u - v)$,

zusammen:

$$(1 + e)\ (u - v).$$

Folglich ist nach dem Stosse:

$$\left.\begin{aligned} C &= V - (1 + e)(V - u), \\ c &= v + (1 + e)(u - v). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 709$$

Der Koëffizient e, welcher den Grad der Elastizität ausdrückt und stets kleiner als 1 ist ($e < 1$) lässt sich durch den Versuch ermitteln:

Lässt man eine Kugel aus dem Stoffe der Masse M (z. B. Elfenbein), dessen Elastizität man bestimmen will, aus der Höhe H auf eine Platte aus dem Stoffe von der Masse m (z. B. ebenfalls Elfenbein) fallen, so erreicht sie die Platte mit der Endgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gH},$$

wird an der Stossstelle zusammengedrückt und springt nun zurück, indem der Eindruck wieder mehr oder weniger verschwindet. Wären die Stoffe vollkommen elastisch, so würde die Eindrückung vollständig verschwinden, mit derselben Geschwindigkeit v der Aufstieg beginnen und die Steighöhe gleich der Fallhöhe werden. In Wirklichkeit aber ist die Anfangsgeschwindigkeit des Aufstieges nur $e \cdot v$ und die erlangte Steighöhe nur gleich h, so dass die Gleichung gilt:

$$ev = \sqrt{2gh};$$

theilt man die beiden Gleichungen durcheinander, so folgt:

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 710$$

Durch Versuch sind so die Koëffizienten für verschiedene Stoffe zu ermitteln. Es ist gefunden etwa:

Für Elfenbein	$e = \frac{8}{9}$,	für Kork	$= \frac{5}{9}$,
„ Stahl	$= \frac{5}{9}$	„ Glas	$= \frac{15}{16}$.

D.

Der schiefe Stoss.

§ 320.

Man zerlege die im Augenblicke des Stosses vorhandenen wirklichen Geschwindigkeiten V_s und v_s so, dass man die central gerichteten Geschwindigkeiten V und v erhält und verfahre mit diesen sowie oben. Die in der Figur nicht bezeichneten Geschwindigkeitsantheile werden durch den Stoss nicht beeinflusst. Sie erzeugen Drehbewegung in der Richtung des unteren Pfeiles.

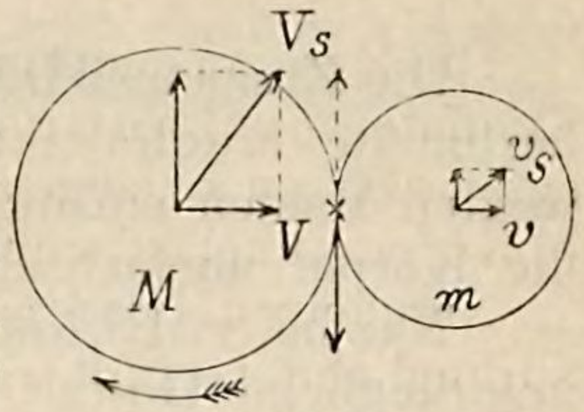


Fig. 450.

E.

Der excentrische Stoss.

§ 321.

Für diesen gelten ebenfalls die im Voranstehenden gefundenen Gleichungen und Gesetze, wenn man unter V, v, u, C, c die Geschwindigkeiten der Stosspunkte O,

$$\left.\begin{aligned} \text{unter } \mathfrak{M} &= \frac{J}{L^2}, \\ \mathfrak{m} &= \frac{i}{l^2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 711$$

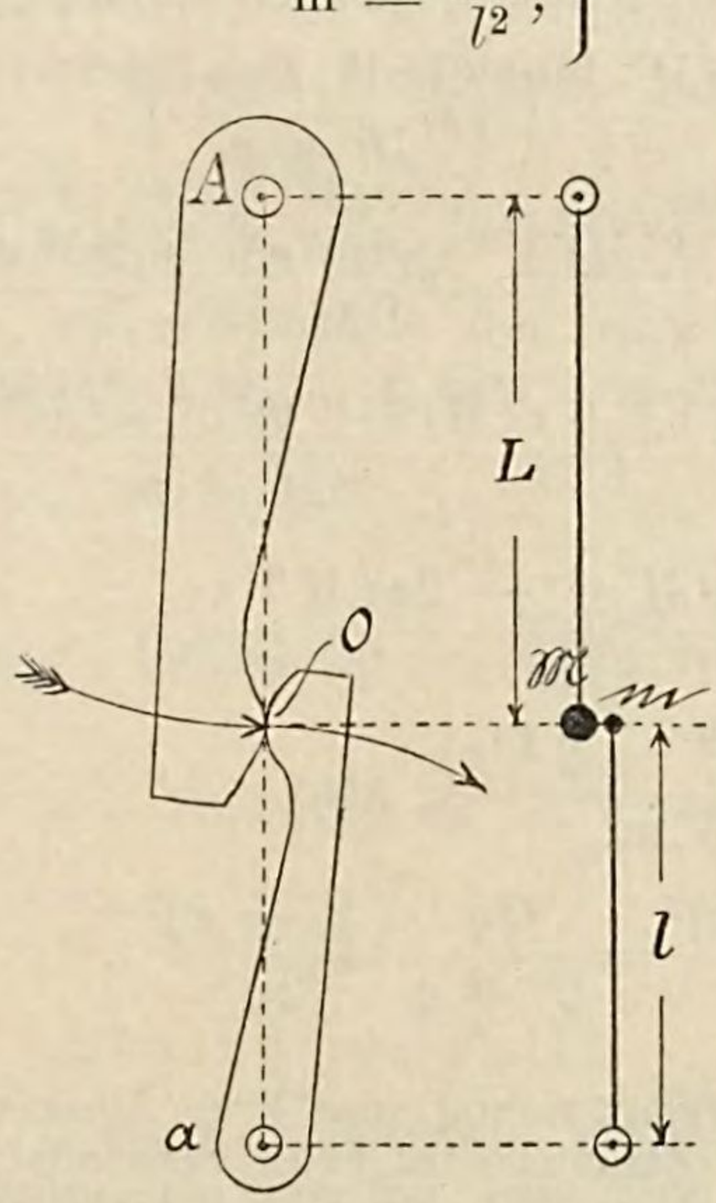


Fig. 451.

die auf diese Punkte reducirten Massen der zum Stoss gelangenden Körper versteht.

F.

Verlust an lebendiger Kraft (mechanischer Arbeit) beim Stoss unelastischer Körper.

§ 322.

Die Zusammendrückung der Körper an der Stossstelle erfordert eine bestimmte mechanische Arbeit, welche als lebendige Kraft den bewegten Massen entzogen wird und in diesen scheinbar verschwindet, wenn die Körper unelastisch sind*).

Nur bei vollkommen elastischen Körpern, die sich wieder auf die ursprüngliche Gestalt ausdehnen, wird die auf Zusammendrückung verwendete mechanische Arbeit auch wieder herausgegeben, findet demnach kein Stossverlust statt**). Man findet den Stossverlust bei unelastischen Körpern, indem man von der lebendigen Kraft vor dem Stosse die lebendige Kraft nach dem Stosse abzieht.

Nach den früheren Annahmen ist für unsere beiden Massen M und m:

$$\text{die lebendige Kraft vor dem Stosse} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m v^2}{2},$$

$$\text{„ „ „ nach „ „} = (M + m)\,\frac{u^2}{2},$$

also der Verlust durch den Stoss:

$$\mathfrak{V} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m v^2}{2} - \frac{(M + m) u^2}{2},$$

oder wenn für u der Werth aus der Gleichung 693 eingeführt wird:

$$\mathfrak{V} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m v^2}{2} - \frac{M + m}{2}\left(\frac{M V + m v}{M + m}\right)^2,$$

$$\mathfrak{V} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m v^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{M^2 V^2 + m^2 v^2 + 2\,\mathrm{M}\, m\, V v}{M + m},$$

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2 V^2 + m M V^2 + m M v^2 + m^2 v^2 - M^2 V^2 - m^2 v^2 - 2\,M m\, V v}{M + m}\right)$$

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{2}\,\frac{m M\, V^2 + m M\, v^2 - 2 m M\, V v}{M + m},$$

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{2}\,\frac{m M (V^2 + v^2 - 2\, V v)}{M + \mathrm{m}}, \text{ also}$$

$$\mathfrak{V} = \frac{M m}{M + m}\,\frac{(V - v)^2}{2} = \frac{Q q}{Q + q}\,\frac{(V - v)^2}{2 g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 712$$

---

*) Schon Bernoulli erklärt richtig, dass beim Stoss weicher Körper ein Theil der lebendigen Kraft auf die Zusammendrückung verwendet werde, so aber in den zusammengedrückten Theilen verbleibe und nun nicht wieder thätig werde, weil die Weichheit der Theilchen es verhindere. (Klein, Princ. der Mech. Seite 22.)

**) In Wirklichkeit findet auch bei dem unelastischem Stosse kein Verlust, sondern nur eine Verwandelung von lebendiger Kraft statt. (Formveränderung, Wärme, Schall, u. s. w.)

wenn mit Q und q das Gewicht der Massen M und m bezeichnet wird.

Diese Gleichung findet z. B. Anwendung bei den Wasserrädern, wenn es sich darum handelt, den Verlust zu ermitteln, welcher entsteht, wenn der Wasserstrahl das Wasserrad trifft*).

Bewegen sich die Massen nicht hintereinander her, sondern einander entgegen, so ist wieder v mit dem entgegengesetzten Zeichen einzuführen:

$$\mathfrak{V} = \frac{Mm}{M+m}\,\frac{(V+v)^2}{2} = \frac{Q\cdot q}{Q+q}\,\frac{(V+v)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 713$$

Wäre m in Ruhe, also

$$v = 0$$

so ist:

$$\mathfrak{V} = \frac{Mm}{M+m}\,\frac{V^2}{2} = \frac{Qq}{Q+q}\,\frac{V^2}{2g}.$$

Beispiel 137: Nach dem Zahlenbeispiele 134 würde in den 3 Fällen der Verlust betragen:

1. $\mathfrak{V} = \frac{150\cdot 40}{150+40}\,\frac{(5-3)^2}{2\cdot 9{,}81} = 6{,}4$ mkg,

2. $\mathfrak{V} = \frac{150\cdot 40}{150+40}\,\frac{(5+3)^2}{2\cdot 9{,}81} = 97{,}8$ mkg,

3. $\mathfrak{V} = \frac{150\cdot 40}{150+40}\,\frac{5^2}{2\cdot 9{,}81} = 39$ mkg.

Der Arbeitsverlust beim Stoss wächst also mit dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit $(V \mp v)$ der beiden Körper, d. i. mit dem Quadrate des Weges, um welchen sich die beiden Körper in einer Sekunde nähern.

Beispiel 138: Träten in einer Maschine in jeder Minute (also in je 60 Sekunden) 120 Stösse von der Art, wie sie durch obige Zahlenbeispiele berechnet sind, auf, so würde der durch diese Stösse für die Maschine erwachsende Arbeitsverlust in den drei Fällen betragen:

1. $\mathfrak{V} = \frac{120}{60}\cdot 6{,}4 = 12{,}8\,\text{mkg} = \frac{12{,}8}{75} = 0{,}17$ Pferde,

2. $\mathfrak{V} = \frac{120}{60}\cdot 97{,}8 = 195{,}6\,\text{mkg} = \frac{195{,}6}{75} = 2{,}6$ „

3. $\mathfrak{V} = \frac{120}{60}\cdot 39 = 78{,}0\,\text{mkg} = \frac{78{,}0}{75} = 1{,}04$ „

§ 323.

Besonderer Fall.

In vielen Fällen, z. B. beim Schmieden, Pochen der Erze, beim Einschlagen von Nägeln, beim Einrammen von Pfählen befindet sich im Augenblicke des Stosses der getroffene Körper in Ruhe, ist also:

$$v = 0.$$

*) Siehe meine Maschinenlehre.

In allen diesen Fällen ist somit:
die gesammte lebendige Kraft vor dem Stosse:

$$A = \frac{MV^2}{2} = \frac{QV^2}{2g} = QH, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 714$$

der Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoss

$$\mathfrak{V} = \frac{m}{M+m}\,\frac{MV^2}{2} = \frac{q}{Q+q}\,\frac{QV^2}{2g} = \frac{q}{Q+q}\;QH \quad . \quad 715$$

der Rest an lebendiger Kraft nach dem Stosse:

$$\mathfrak{R} = \frac{M}{M+m}\,\frac{MV^2}{2} = \frac{Q}{Q+q}\,\frac{QV^2}{2g} = \frac{Q}{Q+q}\,QH \quad . \quad 716$$

wenn mit H die der Geschwindigkeit V entsprechende Fallhöhe bezeichnet wird.

Es verhalten sich also zu einander:

$$A : \mathfrak{V} : \mathfrak{R} = 1 : \frac{m}{M+m} : \frac{M}{M+m} = M+m : m : M = Q+q : q : Q \quad 717$$

Soll der Verlust gross werden, so ist m, die Masse des ruhenden, also gestossenen Körpers gross zu wählen; soll dagegen der Rest gross sein, so ist die Masse M des bewegten, also stossenden Körpers gross zu wählen. Im Folgenden sollen kurz mit „Verlust“ und „Rest“ die obigen Beträge $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden, in welche das vor dem Stoss vorhandene Arbeitsvermögen durch den unelastischen Stoss zerlegt wird. Nicht immer ist der Stossverlust $\mathfrak{V}$ nachtheilig, sondern in vielen Fällen nützlich. So z. B. ist

der Verlust nützlich beim Schmieden des Eisens, beim Pochen der Erze, überhaupt in allen Fällen, bei denen eine Formveränderung des gestossenen (ruhenden) Körpers durch den Stoss bezweckt wird;

der Rest dagegen nützlich beim Einschlagen von Nägeln, beim Einrammen von Pfählen, überhaupt in allen denjenigen Fällen, in denen eine Bewegung des gestossenen (ruhenden) Körpers durch den Stoss gewünscht wird.

Hierher würde auch das bergmännische Gesteins-Bohren (§ 326) gehören: man sollte bei diesem also ebenfalls dafür sorgen, dass das Gewicht Q des Fäustels wesentlich grösser ist als das des Bohrers. (Uebrigens ist in allen genannten Fällen der Stoss als ein nahezu unelastischer anzusehen.)

G.

Beispiele.

§ 324.

Beispiel 139: Stosserscheinungen beim Dampfhammer. Bei dem grossen Dampfhammer der Schiffsbau-Anlage zu Wilhelmshafen beträgt das Gewicht des Hammers $Q = Mg = 15000$ kg,

das des Amboses $q = mg = 300000$ kg;

sodann ist beim Aufschlagen des Hammers auf das weiche Schmiedestück:

$$\left.\begin{aligned} \text{der Verlust } \mathfrak{V} &= \frac{300\,000}{300\,000 + 15\,000} QH = \frac{20}{21} Q \cdot H, \\ \text{der Rest } \quad \mathfrak{R} &= \frac{150\,000}{300\,000 + 15\,000} QH = \frac{1}{21} Q \cdot H. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 718$$

Es werden demnach von der gesammten Arbeitsmenge QH, welche in dem von der Höhe H herabfallenden Hammer in dem Augenblicke des Aufschlagens aufgespeichert sind, $\frac{20}{21} = 95$ pCt. auf Formveränderung des Schmiedestückes verwendet, also ausgenutzt, und nur $\frac{1}{21} = 5$ pCt. auf den Ambos übertragen, also verloren.

Nicht so günstig gestaltet sich das Verhältniss bei dem zur Zeit grössten Hammer der Welt, welchen das Stahlwerk in Terni besitzt.

Hierbei beträgt das Hammergewicht $Q = 100\,000$ kg,
das Ambosgewicht $q = 1\,000\,000$ kg,

somit der auf Formveränderung des Schmiedestückes verwendete Verlust:

$$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,000 + 100\,000} = \frac{10}{11} \text{ also } 90 \text{ pCt.},$$

dagegen der auf Bewegung des Ambos übertragene, also verloren gehende Rest 10 pCt. von der im aufschlagenden Hammer enthaltenen gesammten Arbeitsmenge.

Der Ambos ist vergleichbar einem Damme, der die Bewegung beschränkt, hindert, den Arbeitsstrom gegen den Erdboden hin eindämmt, und dem Zwecke nach nicht unähnlich dem Ventile, welches den Flüssigkeitsstrom aufhält (§ 1).

Ist, wie in folgenden Beispielen, der Zweck des Stosses Bewegungs- und nicht Formveränderung, so ist der Rest, also ein grosses Hammergewicht, nützlich.

Der einzuschlagende Nagel, der einzurammende Pfahl, der bergmännische Gesteinsbohrer sollen die durch den aufschlagenden Hammer, Bär oder das Fäustel mitgetheilte Bewegung keineswegs hemmen wie jener Ambos, dienen vielmehr, wenigstens während der durch den Stoss herbeigeführten Bewegungsvorgänge, nur als Mittel, die empfangene Bewegung auf die Wand, das Erdreich zu übertragen, gleichsam fortzuleiten, dabei an ihren Oberflächen Reibung zu überwinden, und zugleich in ihrer Umgebung den Stoff zu verdichten, oder zu zermalmen (§ 1).

§ 325.

Beispiel 140: Stosserscheinungen bei der Ramme. Bei einer Kunstramme zum Einschlagen der Pfähle sei das Gewicht des Rammklotzes:

$$Q = 400 \text{ kg},$$

das des einzurammenden Pfahles:

$$q = 200 \text{ kg},$$

$$\left.\begin{aligned} \text{dann würde sich ergeben als Verlust } \mathfrak{V} &= \frac{200}{400 + 200} QH = \frac{1}{3} QH \\ \text{als Rest } \mathfrak{R} &= \frac{400}{400 + 200} QH = \frac{2}{3} QH \end{aligned}\right\}. \quad 719$$

d. h. es würden von der im Rammklotze enthaltenen Arbeit 33 pCt. durch den Schlag verloren gehen und nur 66 pCt. auf Eintreiben des Pfahles, also auf Ueberwindung des Erdwiderstandes W verwendet werden.

Dieser Erdwiderstand bedingt die Tragfähigkeit des eingerammten Pfahles und soll im Folgenden ermittelt werden.

Beträgt die Fallhöhe unseres Klotzes:

$$H = 1{,}5 \text{ m}$$

und sinkt der Pfahl beim letzten Schlage um:

$$h = 0{,}002 \text{ m}$$

ein, so ist nach der Gleichung:

Mechan. Arbeit des Widerstandes = mechan. Arbeit der Triebkraft

$$W \cdot h = \frac{2}{3} Q \cdot H,$$

$$W = \frac{2}{3} \frac{400 \cdot 1{,}5}{0{,}002} = 200\,000 \text{ kg}.$$

Durch den letzten Schlag des auffallenden 400 kg schweren Klotzes ist somit der Pfahl so eingetrieben, dass er nunmehr eine ruhende Belastung bis 200000 kg tragen würde, ohne tiefer einzusinken.

Hat der Pfahl am Kopfende den Durchmesser

$$d = 40 \text{ cm},$$

also den Querschnitt $\frac{d^2 \pi}{4} = 1256$ qcm, so würde von jener Belastung $p = \frac{200\,000}{1256} = 160$ kg auf 1 qcm kommen.

In der Regel rechnet man jedoch für Pfähle, welche eingerammt werden, bis sie festen Grund erreichen, nur:

$p = 70$ kg auf 1 qcm, ... 720

für Pfähle, die vermöge der Reibung im weichen Erdreich stehen, sogar nur:

$p = 14$ kg auf 1 qcm 721

Das Eintreiben des Pfahles wird meist so lange fortgesetzt, bis für die nach obigen Regeln berechnete Flächenbelastung sich:

$p = 150$ kg auf 1 qcm

ergiebt.

Erfahrungsgemäss ist ein Pfahl genügend eingerammt, wenn er durch die letzten 30 Schläge mit einem 400 kg schweren, aus 1,5 m Höhe herabfallenden Bär (d.i. durch eine Gesammtleistung von $30 \cdot 400 \cdot 1{,}5 = 18000$ mkg) nur 5 Millimeter eingetrieben wird. (Siehe auch Rankine [Uebers. von Kreuter] 1880, S. 670.)

§ 326.

Beispiel 141: Stosserscheinungen bei der bergmännischen Bohrarbeit. Auch der Vorgang bei der bergmännischen Gesteinsbohrarbeit hat eine gewisse Aehnlichkeit mit dem bei der Rammarbeit oder

beim Einschlagen eines Nagels mittelst des Hammers, Es ist auch bei ihr die Nutzleistung offenbar abhängig von dem Verhältnisse, in welchem das Gewicht Q des Fäustels zu dem Gewichte q des Bohrers steht.

Setzen wir voraus, der Stoss beim Schlage des Fäustels auf den Bohrer, unter dessen Schneide das Gestein zermalmt wird, wäre ein unelastischer, so gelten auch hier die obigen Regeln.

Im Clausthaler Bergrevier kommen zur Anwendung:

Stahlfäustel vom Gewichte $Q = 1{,}5$ bis $1{,}75$ kg
und stählerne Anfangsbohrer „ „ $q = 0{,}5$ kg (30 cm lang)
„ Mittelbohrer „ „ $q = 1{,}0$ kg (59 cm lang)
„ Abbohrer „ „ $q = 1{,}5$ kg (88 cm lang)

Für das $Q = 1{,}5$ kg schwere Fäustel würde sich bei den verschiedenen Bohrern ergeben:

$$\frac{Q}{q} = \frac{1{,}5}{0{,}5} \qquad \frac{1{,}5}{1{,}0} \qquad \frac{1{,}5}{1{,}5}$$

$$\frac{\textit{Nutzleistg.}\,(\Re)}{\textit{Gesammtleistg.}} = \frac{1{,}5}{1{,}5 + 0{,}5} = 0{,}75 \;\Big|\; \frac{1{,}5}{1{,}5 + 1{,}0} = 0{,}6 \;\Big|\; \frac{1{,}5}{1{,}5 + 1{,}5} = 0{,}50$$

Für ein $Q = 2{,}0$ kg schweres Fäustel würde bei den verschiedenen Bohrern sein:

$$\frac{Q}{q} = \frac{2{,}0}{0{,}5} \qquad \frac{2{,}0}{1{,}0} \qquad \frac{2{,}0}{1{,}5}$$

$$\frac{\textit{Nutzleistg.}\,(\Re)}{\textit{Gesammtleistg.}} = \frac{2{,}0}{2{,}0 + 0{,}5} = 0{,}80 \;\Big|\; \frac{2{,}0}{2{,}0 + 1{,}0} = 0{,}67 \;\Big|\; \frac{2{,}0}{2{,}0 + 1{,}5} = 0{,}57$$

Nach diesen Annäherungsberechnungen würden von der Gesammtleistung des Arbeiters ausgewerthet:

80 % bei Anwendung eines 2 kg schweren Fäustels und eines 0,5 kg schweren Anfangbohrers, dagegen nur

50 % (30 % weniger) bei Anwendung eines 1,5 kg schweren Fäustels und eines 1,5 kg schweren Abbohrers.

Jedenfalls erscheint es zweckmässig (innerhalb der zulässigen Grenzen), möglichst leichte Bohrer und dazu möglichst schwere Fäustel zu wählen.

Das hierüber Gesagte gilt jedoch nur für den unelastischen Stoss. Beim Bohren auf hartem Gestein zieht der Arbeiter ein leichtes Fäustel dem schweren vor. Das widerspricht durchaus nicht dem obigen.

§ 327.

Beispiel 142: Stosserscheinungen an einem Schmiedehammer, der an der Stirn von dem Daumen einer Welle getroffen und gehoben wird.

Es seien für die rotirende Daumenwelle mit Schwungrad (Fig. 452):

M die Masse,
L der Abstand des Stosspunktes O von dem Drehpunkte E,
J das Trägheitsmoment der Welle mit Einschluss des Schwungrades bezogen auf E,

also $\frac{J}{L^2} = \mathfrak{M}$ die auf den Stosspunkt reducirte Masse der Daumenwelle mit Schwungrad,

V die Geschwindigkeit im Punkte O des Daumens im Augenblicke des Zusammenstosses.

ferner für den Hammer:

m die Masse,

l der Abstand des Stosspunktes O von dem Drehpunkte e,

i das Trägheitsmoment bezogen auf e,

also $\frac{i}{l^2} = \mathfrak{m}$ die auf den Stosspunkt reducirte Masse,

$v =$ Null die Geschwindigkeit im Punkte O des Hammers.

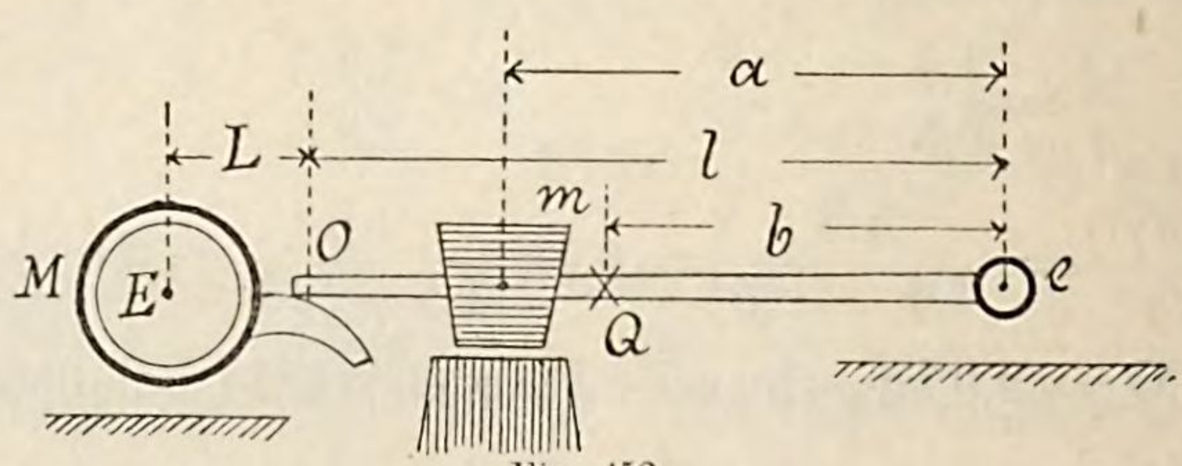


Fig. 452.

Dann ist, wenn der Stoss als ein unelastischer angenommen wird, die Geschwindigkeit nach dem Stosse:

$$u = \frac{\mathfrak{M} \cdot V}{\mathfrak{M} + \mathfrak{m}} \text{ (Gl. 698)},$$

der Stossverlust:

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M} + \mathfrak{m}} \frac{\mathfrak{M} V^2}{2} \text{ (Gl. 715)},$$

oder:

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}} + 1} \frac{\mathfrak{M} V^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 722$$

Hieraus folgt, dass der Stossverlust um so geringer ist, je grösser man das Verhältniss:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}},$$

also die Schwungradmasse $\mathfrak{M}$ wählt.

Beispiel 143: Mittelpunkt des Stosses oder Mittelpunkt der Trägheit. Durch den excentrischen Stoss bei O wird im Allgemeinen auch eine Druckwirkung auf die Achse e erfolgen. Soll letzteres vermieden werden, so muss der Stoss in demjenigen Punkte Q stattfinden, in welchem die Hammermasse $\mathfrak{m}_1$ und die Hammerstielmasse $\mathfrak{m}_2$ vereinigt gedacht werden kann, wenn diese vereinigten Massen auf die Drehbewegung dieselbe Wirkung hervorbringen sollen, wie die über den Hammer und Stiel vertheilte Masse. In Wirklichkeit ist

das Trägheitsmoment der Hammermasse $\mathfrak{m}_1 a^2$,

„ „ des prismatischen Hammerstieles $\frac{1}{3}\mathfrak{m}_2 l^2$,

dagegen:

das „ der in Q vereinigt gedachten Gesammtmasse $(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) b^2$,

daraus folgt, wenn die wirklichen Massen und die in Q vereinigt gedachten gleichwerthigen Massen dieselbe Wirkung geben sollen:

$$(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) b^2 = \mathfrak{m}_1 a^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{m}_2 l^2,$$

$$b = \sqrt{\frac{\mathfrak{m}_1 a_1 + \frac{1}{3}\mathfrak{m}_2 l^2}{\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 723$$

Wäre beispielsweise:

$$\mathfrak{m}_1 = 9 \cdot \mathfrak{m}_2,$$
$$a = 0{,}8\, l,$$

so würde sein:

$$b = \sqrt{\frac{9\,\mathfrak{m}_2\, 0{,}8^2 l^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{m}_2 l^2}{9\,\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_2}},$$
$$b = 0{,}78\, l.$$

Wenn in dieser Entfernung von e der Daumen den Hammerstiel erfasste, so würde die Stosswirkung sich nicht auf den Drehpunkt e übertragen. Man nennt den Punkt Q auch den Stossmittelpunkt oder Mittelpunkt der Trägheit, und den Hammer nicht mehr einen Stirn-, sondern einen Brusthammer. Es ist auch Q als Schwingungspunkt in Bezug auf a anzusehen (Siehe das physische Pendel § 287).

Für einen mit der Hand geschwungenen Eisenstab ergiebt sich durch Versuch der Mittelpunkt des Stosses als derjenige Punkt, in welchem man den Stab heftig auf eine scharfe Kante aufschlagen lassen darf, ohne in der Hand ein „Prellen“ zu verspüren.

§ 328.

Beispiel 144: Stosserscheinungen am sogen. ballistischen Pendel. Bestimmung der Fluggeschwindigkeit V der Geschosse.

Ein ruhendes Pendel (ballistisches Pendel), dessen im Schwerpunkte S vereinigt gedachte Masse m ist, werde am unteren Ende bei O von der Kanonenkugel, deren Masse M sein mag, getroffen und um den Aufhängepunkt a in Schwingung versetzt.

Der Stoss sei unelastisch, alsdann ist die Geschwindigkeit nach dem Stosse:

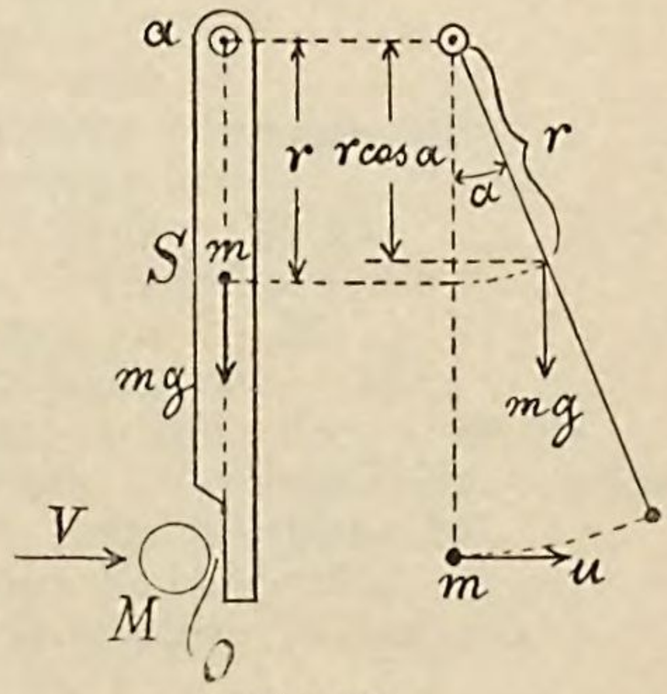


Fig. 453.

$$u = \frac{MV + \mathfrak{m}o}{M + \mathfrak{m}} \text{ (Gl. 693),}$$

wenn mit $\mathfrak{m}$ die auf den Stosspunkt O reducirte Masse des Pendels bezeichnet wird. Schlägt das Pendel in Folge des Stosses um den Winkel α, der durch Beobachtung genau bestimmt werden muss, aus, so ist nach dem Satz von der Arbeit (§ 86):

$$\frac{\mathfrak{m} \cdot o^2}{2} - \frac{\mathfrak{m} \cdot u^2}{2} = (-mg) \cdot (r - r \cos \alpha).$$

Das Gewicht mg ist hier negativ eingeführt, weil es die Bewegung, d. h. die Erhebung des Schwerpunktes auf die Höhe $(r - r \cos \alpha)$ zu hindern sucht.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$u = \sqrt{2 \frac{m}{\mathfrak{m}} gr (1 - \cos \alpha)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 724$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung ein und löst für die Unbekannte V auf, so folgt:

$$V = \frac{M + \mathfrak{m}}{M} \sqrt{2 \frac{m}{\mathfrak{m}} gr (1 - \cos \alpha)} \quad \ldots \ldots \quad 725$$

(Siehe auch das Zahlenbeispiel: Ritter, Techn. Mech. 1892, S. 630.)

Druck von C. Grumbach in Leipzig.

Register.

Affinität, chemische 1.
Aberration des Sternenlichtes. Bradley 67.
Abhängigkeit der Erdbeschl. g oder des Gew. G von R 138.
— der Erdbeschl. g oder des Gew. G von φ 141.
Achse, freitragende — (als zweiarmiger Hebel) 225.
Achsen, „freie“ — giebt es drei in jedem Körper 252.
— — verlangt meistens die Technik 253.
Achsen-Parallelogramm 170.
Achsensystem willkürlich zu wählen 176.
Aequator, Umfangsgeschwindigkeit 18. 117.
Aggregatzustände 1. 8.
d'Alembert (1717—1783) 8.
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik 175.
— Grundbegriffe u. Erfahrungsgesetze 1.
Amerikanische Pulverramme v. Shaw 90.
Ampère 149.
Anfangsgeschwindigkeit 22.
Anfangspunkt O des Achsensystemes vortheilhaft zu wählen 180.
Angriffspunkt einer Kraft darf in ihrer Richtung verlegt werden 157. 173.
Antrieb, Satz vom — 88. 269.
Arbeit (Energie), Satz von der — 92. 270.
—, Bedeutung des Satzes von der — für das alltägliche Leben, die Technik und die Wissenschaft 96.
—, Besprechung einiger besonderer Fälle des Satzes von der — 96.
—, wenn die Kraft- und Bewegungsrichtung nicht zusammenfallen 97.
—, negative — 99.
— der Schwerkraft 99.
— ist Null für die senkrecht zur Bahn gerichtete Kraft 99. 125.
— der Centripetalkraft ist Null 100.
—, wenn die Kraft stets in die Richtung der krummlinigen Bahn fällt 100.
— einer konstanten, stets sich selbst parallelen Kraft 100.
— beliebig vieler Kräfte 101.
—, virtuelle — 102.
—, bildliche Darstellung der — 103.
— einer sich parallel bleibenden, konstanten Kraft ist b. Kreislauf Null 101.
— zu messen mittelst des Indikators 104.
— — — Pronys Zaum 323.
—, mech. —, fortschr. Massen 92. 119.
Arbeit, mechanische —, gedrehter Massen 270.
—, mechanische —, rollender Massen 271.
Archimedes (287—212 vor Chr. Geburt) 8. 112.
Astatischer Regulator 124.
Atwood's Fallmaschine verglichen mit einer Fördermaschine 88.
Auflagerdruck 220.
Aufwärts geworfene Körper 24.
Augenblickl. Drehpunkt f. d. Schubstange eines Kurbelgetr. 151.

Backenbremse 169.
Bär der Ramme 106.
Bahn geworfener Körper 62.
Balancier 223.
Ballistische Kurve 55.
Ballistisches Pendel 351.
Balken an den Enden unterstützt (Brückenträger) 220.
Bandbremse 310.
Barycentr. Methode 201.
Belastung (äussere), Spannung (innere) 6.
Belastung eines eingerammten Pfahles 107.
Bergmännische Bohrarbeit, Stosserschein. 348.
Bergwerkspumpen 223.
Beschleunigung, Satz von der — 87. 255.
— (p) (Acceleration) 3. 20. 22.
— der Erde nach der Sonne hin 62.
— des Mondes nach der Erde hin 62.
Beschleunigungs-Widerstand 5.
Bewegtes nur ist wahrnehmbar 1.
Bewegung, Ruhe, Lage, Zeit sind relative Begriffe 2.
—, einfache 13.
—, fortschreitende 72.
—, geradlinige 9. 13.
—, gleichförmige 13.
—, gleichförmig veränderte 21.
—, krummlinige 9. 13.
—, ungleichförmige 19. 27.
—, unfreie, Zwangs — 175.
—, Zerlegung der — 34.
—, zusammengesetzte — 13.
—, Zusammensetzung der — 29. 34.
— von Fuhrw. auf geneigten Bahnen 334.
— auf der Kugeloberfläche 101.
— veranlasst Reibung 285.
Bewegungs-Hinderniss (Reibung) 5.
— -Arten 35.

Bewegungs-Gesetz. Mathematischer Ausdruck 2. 3. 13. 22. 47. 58.
— -Grösse 88. 337.
— -Lehre = Mechanik 1.
— -Vorgänge am Kolben einer Dampfmaschine, Pumpe 27.
— -Vorgänge am astat. Regulator 125.
— -Widerstand des Stellzeuges 127. 284.
— -Zustand des Schwerpunktes 158.
— — — Umfanges einer Seiltrommel 18.
— -Zustand bei der Kanonenkugel 28.
— Zustand bei der Fördertonne 28.
Bewegungen der Himmelskörper 158.
—, freie in unfreie zu verwandeln 179.
— in derselben Ebene 30. 45. 150.
— im Raume 32. 50. 149.
—, sechs überhaupt mögliche — 179.
—, Wagenrad zur Darstellung der sechs mögl. — 175. 179.
—, Atom- — 1.
—, Molar- — 1.
—, Molekular- — 1.
—, Dreh- — mit Rücksicht auf Vertheilung der Masse 250.
—, Dreh- — fortrollender Massen 271.
Bildl. (graph.) Darst. d. gleichf. Bew. 15.
— — d. ungleichf. Bew. 25.
— — d. Arbeit einer konstant. Kraft 103.
— — — — gleichf. veränd. Kraft 103.
— — — — veränderl. Kraft 103.
— — — — n. Gr. u. Richt. veränd. Kraft 104.
Bohrarbeit, bergmännische 5. 101.
Bremsbacken 169.
Brennpunkt der elliptischen Planetenbahnen 134.
Brückenwage 185. 223.
Brusthammer 222.
Bunge'sche kurzarmige Wage 212.
Buttermaschine 115.

Centim.-Gramm-Sek. (C-G-S)-System 4.
Central-Bewegungen 56.
— -Kräfte 113.
Centraler Stoss 337.
Centrifugalbeschleunigung p 58.
— q in der Entfernung Eins 59.
— -Druck $P = 0{,}00112\ Grn^2$ 117.
— -Eisenbahn 118.
— oder konisches Pendel 118. 120.
— -Pendel verwerthet als Schwungkugel-Regulator 122.
— -Spannung in gedrehten Körpern 114. 118.
Centripetal-Beschleunigung 58.
—, Centrifugal-Kraft 113. 114.
Charnir-Brücke 235.
Copernikus (1473—1543) 134.
Cremona. „Polygonal-Methode“ 1872 245
Culmann. „Graph. Schnitt-Methode“ 1864. 1866 245.
Cycloide 150.
Cylinder, oscillirender 155.

Dachstuhl 230.
Dampfhammer, Stosserscheinungen beim — 346.
Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine 94.
Dampfmaschine 27. 44. 94. 124.
Dampfmasch., Leistg. sämmtl. der Erde 108.
Dampfturbine von De Laval 274.
Dampframme 91.
Decimalwage 214.
Deskartes (Cartesius) (1596—1650) 5.
Diagramm 154.
Differentialbremse 311.
Drehachsen in der Technik sollen meist „frei“ sein 253.
Drehkran 174. 180.
Drehkräfte 164 u. folg.
Drehpunkt oder Drehachse 111.
Dyn (Einheit der Kraft) 4.
Dynamik, Lehre vom Uebergewicht der Kräfte, oder von den ungleichförm. Beweg. (Kraftlehre) 7. 8.
Dynamische Stabilität 229.

Ebbe und Fluth ändern die Bewegung des Erdballes 158.
Ebene, schiefe 43. 108. 290. 334.
Einheit der Masse 75. VIII.
— der Kraft 76. VIII.
— des Gewichtes 76. VIII.
— der mechanischen Arbeit 93.
Einleitung 1.
Eintheilung aller Vorkehrungen der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft 1.
Einzelbewegungen in derselben Ebene 30.
— im Raume 32.
Einzelkraft 164.
— ist zerlegbar in ein Kräftepaar und eine Einzelkraft 173.
Eisenbahnwagenrad 179.
Eisenbahngeradführung d. Formtische d. Buchdrucker-Schnellpresse 154.
Ellipse, Kreis, Gerade; Verwandtschaft derselben 153.
Ellipsenzirkel 154.
Empfindlichkeit der Wagen 112.
Energie, Satz von der — 92.
—, kinetische (thatkräftig vorhandene), potentielle oder mögliche E., Energie der Lage, Spannkraft. Werk, Wirkung 92.
— -Satz, Bedeutung f. Leben, Technik und Wissenschaft 96.
Endgeschwindigkeit fallender Körper nur abhängig von der Fallhöhe, nicht von der Bahnneigung, hat im gleichen Niveau denselben Werth 43.
Entfernungen der Planeten von d. Sonne 135.
Erdbeschleunigung p in der Mondentfernung 139.
— $g_\varphi = 9{,}7806 + 0{,}0506 \cdot \sin^2 \varphi$ 144.
— in der geograph. Breite von Berlin 145.

Erdbeschleunigung in der geograph. Breite von Aachen 145.
— in der geogr. Breite von Clausthal 145.
Erdmasse-Bestimmung 140.
Erfahrungssatz der Beschleunigung 3.
— der Trägheit (ohne Kraft keine Bewegungsänderung) 4.
— der Unabhängigkeit der Wirkungen 5.
— der Wechselwirkung 6.
Erzaufbereitung, rotirender Herd der bergmännischen 66.
Erztonne im tonnlägigen Schachte 84.
Euler (1707—1783) 151.
Evans'sche Geradführung 154.
Excentrische Planeten-Bewegungen 135.

Fahrstrahl 134.
Fahrstuhl des Bergmannes 5.
Federwage im Luftballon 71.
Festen Körper, Erklärung der 157.
Flaschen- oder Rollenzüge 317.
—, gewöhnliche — 317.
—, Güteverhältniss bei den — 319.
—, Potenz — 319.
—, Differential — (Weston) 320.
—, Selbsthemmung bei — 321.
Flächendruck 227.
Fliehkraft 114.
— verwendet zum Heben von Flüssigkeiten (Centrifugalpumpen, Centrifugalventilatoren) 115.
— verwendet zum Trennen fester und flüssiger Körper (Centrifugen, Oelschleudern) 115.
— verwendet zum Trennen nach dem relativen spezifischen Gewichte 115.
— verwendet zum Messen der Umdrehungsgeschwindigkeit der Wellen (Tachometer) 115.
— verwendet um die Wirkung des Fallbestrebens zu vergrössern (Bodensatzbildung in der Aufbereitung, Chemie) 118.
Fördermaschine 28. 111.
Fördermaschinen sind nicht mit grossen Schwungmassen zu versehen 279.
Förderseil und Seiltrommel 18.
Foucault'sche Kupferscheibe 116.
Freier Fall 23.
Fuhrwerke auf geneigten Bahnen 334.
Fussgänger und Reiter 65.

Galilei (1564—1642) 4. 5. 8.
Gall fand den von Leverrier berechneten Neptun 135.
Gebläse 223.
Gelenkkette 241. 242.
Geometrischer Körper, Definition 149.
Geometrischer Punkt, Zusammensetzung u. Zerlegungen, dessen Bewegung 29.
Gerade mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels geführt 152.
Geradführung, hypocycloidische 154.
— von Evans 154.
Geschlossenes Polygon 39.
Geschosse als Trabanten der Erde 61.
Geschwindigkeiten an den beiden Enden einer Schubstange 45.
Geschwindigkeit, der Weg in 1 Sekunde 13.
—, mittlere, wirkliche 19.
— der Elektricität (Beispiel 3) 16.
— des Lichtes (Beispiel 3) 16.
— des Schalles (Beispiel 3) 16.
— des Wassers in einem Wassergraben 16.
— nach dem Stosse 338. 340.
— der Spitze eines Uhrzeigers 18.
— eines Punktes am Aequator 18. 117.
— der Erde um die Sonne 18.
— eines Punktes am Radumfange 18.
Geschwindigkeitshöhe 24.
Gesetzliches Kilogramm VIII. 76.
Getriebe- oder Zwanglauflehre 149.
Gewichte verh. sich umgek. wie die Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte 138.
Gewichts-Einheit VIII.
Gewichts-Ordnung (gesetzl. u. internation.) VIII. 76.
Gewichtsverminderung durch Erddrehung 117.
Giffard's Injektor 338.
Gleichförmigkeitsgrad 280. 283.
Gleichgewicht 7.
— ist labil, stabil, indifferent 207.
Gleichgewichtsbedingungen, die sechs allgemeinen — der Mech. 175.
— 80. 102. 112. 113.
Gleichgewichtszustände betrachtet am „Stehauf", Hollundermarksäulchen, pendelnden Mann, an den auf der Nadelspitze hängenden Gabeln, auf der Seilbahn hängenden Gefässen 209.
Gleichungen, Zusammenstellung f. d. gleichf. veränderte Bewegung 22.
Gleitende Reibung 387.
Gradbogen, Hänge- — des Markscheiders zum Messen der Neigung der zwei Punkte verbindenden Schnur 218.
Graphische Darstellung (siehe bildl. D.).
Graphostatik, graphische Statik 245.
Gravitation 1. 7. 114.
Grosse Räder vortheilhaft 96. 258. 277.
Guldin-Pappus-Regel zur Bestimmung von Inhalten 201.

$H = \frac{900}{n^2}$ m (Centrifugal-Pendel, Schwungkugel-Regul.) 122.
Hängegradbogen 218.
Häuerleistung 101.
Hebel, einfacher oder einarmiger. — Anwendungen 221.
—, zusammengesetzter. Anwendung. 222.

Hebel am Sicherheitsventil 225.
Hebelarm eines Kräftepaares 165.
Hipparch (150 vor Ch.) 14.
Hirschler Teich, mechanische Arbeit beim Dammbruch 107.
Hobelmaschinen, Geradführungen bei 155.
Horizontalschub $H = Q \frac{l}{2h}$.
Huygens (1629—1695) 58. 134. 337.
Huygens Gesetz der Centralbewegung $v^2 = p \cdot r$ (1673) 58. 60.
Hüttenkran 180.
Hypocycloide, Gerade, Verwandtschaft derselben 154.

Indicator 105. 154. 155.
Inhalte von Körpern 205.
Innere Anstrengung im Konstruktionstheile 181.
Innere Kräfte (Erdbeben, vulk. Ausbr.) verändern nicht den Bewegungszustand (der Erde) 158.
Interferenzerscheinungen 30.
Internationales Kilogramm VIII. 76.

Jupiter, Umlaufszeit 12 Jahre 135.

Keil, Kraftverhältnisse am —; ohne Reibung 109.
—, Kraftverhältnisse am —; mit Reibung 300.
— -Presse 301.
— -Schraubenpresse 302.
—, Allgemeine Theorie 302.
— -Nuthen 303.
— —, Reibungskoëff. für — 304.
Keilnuth-Räder von Robertson und Minotto 305.
Kepler (1571—1630) — Gesetze 134.
Kettenbrücke, Belastung gleichförm. über Horizontalpr. vertheilt 242.
Kettenlinie 241.
Kettenreibung 315.
Kinetische Energie (thatkräftig vorh.) 92.
Kinematik 7. 149.
Klemmen; Erscheinung des — 325.
Kniehebel-Mechanismus 230.
— -Bremse 233.
Knotenpunkte 240. 245.
Koëffizienten der gleitenden Reibung 289.
— der rollenden — 333.
— für unvollkommen elastische Körper 342.
Kolben-Bewegung einer Dampfm., Pumpe 27.
Kolben-Beschleunigung in der Totlage 61.
Kolben-Cylinder 7. 149.
Komponente (Seitenbewegung) 30.
Kosten des Rammens 91.
Kraft (P) = Masse (m). Beschleunig. (p) 3. 72.
Krafteinheit VIII.
Kraftgewinn, Geschwindigkeitsverlust 112.
Kraftsinn 86.
Kraft, Mittel- — durch Rechn. gef. nach Grösse, Richtg. u. Lage 160.
—, Lage der Mittel- — 160. 161. 162.
— Centripetal- — 251.
— Centrifugal- — 251.
— und Widerstand (P, W) beim Kurbelgetriebe 281.
— zu bestimmen aus m und p 87.
— — — m, v, t 89.
— — — m, v, s 93.
— — — N, v 95.
— — — N, R, n 96.
— — — W, w, s 96.
Kräfte, Zusammensetzung und Zerlegung derselben 76.
— in derselben Ebene 77. 160.
— zwei Kräfte 77, 157.
— drei Kräfte 77. 159.
— -Polygon 81.
— -Parallelogramm 81.
— im Gleichgewicht bilden ein geschlossenes Polygon 82.
— vier Kräfte (im Raume) 83.
— an den Enden der Schubstange 85.
—, Messen der 86.
— Graphostatik 82. 161.
—, Zusammensetzung der —, die in verschiedenen Punkten des festen Körpers angreifen 160.
—, Zusammensetz. nicht paralleler — 160.
—, Zusammensetzung paralleler — 161.
—, Mittelpunkt paralleler 162.
—, gleichlaufende, parallele — 182.
—, Angriffspunkt der Mittelkraft gleichlaufender — 183.
— -Polygon 246.
— -Plan (Kräftepolygon und Seilpolygon) 248.
Kräftepaar 157.
— ist bestimmt durch sein Moment $\mathfrak{M} = P \cdot l$ 167.
— ist gleichwerthig für jede Drehachse, welche senkrecht zu seiner Wirkungsebene steht 167.
Kräftepaares, Verlegung des — in seiner Wirkungsebene verändert nicht dessen Wirkung 167.
Kräftepaar an der Magnetnadel, am Uhrschlüssel 165.
— u. Einzelkr. zusammensetzbar zu einer Einzelkr. 173.
Kräftepaare kommen nicht vor in der Mech. des Punktes 153.
— oder Drehkräfte werden gebildet durch zwei gleiche, parallele, entgegengesetzte Kräfte 163.
— sind nicht durch Einzelkräfte ersetzbar 164.
— haben nicht eine bestimmte Drehachse 164.
— werden in der Praxis meist durch Einzelkräfte hervorgebracht 164. 174.

Kräftepaares, Hebelarm oder Arm eines — 165.
— Moment eines — 166.
— Achse eines — 166.
— Drehsinn eines — 166.
Kräftepaare, Zusammensetzung und Zerlegung der — 167.
—, zwei in derselben Ebene oder in gleichlaufenden Ebenen, in demselben Sinne drehende sind gleichwerthig, wenn sie gleiches Moment haben 168.
—, zwei in derselben Ebene oder in gleichlaufenden Ebenen wirkende im entgegengesetzten Sinne drehende — von gleichem Moment heben sich auf oder halten sich im Gleichgewicht. Das resultirende Paar ist Null 168.
— in derselben Ebene lassen sich durch ein gleichwerthiges (resultirendes) ersetzen 168.
—, zwei in nicht parallel laufenden Ebenen wirkende — lassen sich mit Hilfe des Achsenparallelogrammes zu einem result. zusammensetzen 170.
— bei Drehung von Körpern 251.
Kräften, Verallgemeinerung des Satzes von den drei — 159.
— Verallgemeinerung des Satzes von den vier — 159.
Kran, Thür als Beweise, dass Einzelkräfte Kräftepaare und Zapfendrücke hervorbringen 174. 180.
— als Stangenverbindung 235.
Kreislauf 101.
Krummlinige Bewegungen entstehen durch Zusammensetzung ungleichartiger geradliniger 14. 47.
— — können als kreisende Bew. aufgefasst werden 57.
— — entstehen durch Normalacceleration 60.
— —, deren Grundgleichung 60.
Krummlinige Bewegung erfordert Centripetalkraft und erzeugt Centrifugalkraft 114.
Krümmungshalbmesser (Parabel, Schraubenlinie) 63.
Krupp's Riesenkanonen 56. 90. 105.
Kugel, Sehnen derselben werden in gleichen Zeiten durchfallen 44.
Kunstramme 91.
Kunstkreuz, Kunstwinkel 223.
Kurbel-Haspel 110.
Kurbelgetriebe (Geschw. Kraft) 27. 44. 61. 85. 151. 155. 156. 280.
Kurbelschleife, oscillirende 155.
Kurbelzapfen 156.

Lappenpolirscheibe 115.
Laufkran 30. 41.
Laviren der Schiffe 40.
Lebendige Kraft 92.
Leistung einer Kraft 94.
— der kräftigsten Cornwaller Pferde 94.
— eines Arbeiters 108.
— einer Wasserkraft 108.
Leonardo da Vinci (1452—1519) 1.
Leverrier berechnete den unbekannten Neptun 1846 135.
$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_w$ nahezu, wenn als Kraftmasch: Wasserräder und Turbinen, und wenn als Arbeitsm.: Mahlmühlen, Centrifugalp., Ventil., Schleifm., Kapselräder, Kreissägen, Papiermasch., Webereien, Spinnmasch., Dynamomasch. verwendet werden 278.
$\mathfrak{M}_k \gtrless \mathfrak{M}_w$, wenn als Kraftm.: Kolbenm. (Dampfm.), als Arbeitsm.: Kolbenpumpen, Kolbengebl., Walzwerke, Pochwerke, Hammerwerke, Sägegatter benutzt sind 278.
Magnetismus 1.
Masseinheiten (Siehe auch „Inhalt“ VIII) 4.
— des Weges, der Zeit 14.
Mass- und Gewichtsordnung VIII. 76.
Masse (m) 3.
Masseneinheit Inhalt VIII.
Massenmittelpunkt 158.
Masse, „reducirte“ $\frac{J}{r^2}$ 257. 260.
Massenvertheilung zur Drehachse 250.
Materieller Körper, Definition 149.
Materiellen Körper, Mechanik der 157.
Mathematik, hervorragende Bedeutung derselben für die Mechanik 2.
Maxim-Mitrailleuse 90.
Mayer, Rob. (1842) 93.
Mechanik oder Bewegungslehre 1.
—, Aufgabe derselben 2.
—, Nutzen derselben. Vorwort IV. 2.
—, als Grundlage der Technik und der Naturwissensch. 1.
— der Körper 8.
— des geometr. Punktes (Phoronomie) 8. 14.
— des materiellen Punktes 8. 72.
—, Eintheilung derselben 9.
— der geometrischen Körper 149.
— der materiellen Körper 157.
Mechanische Arbeit wird nicht „gewonnen“ 112.
Merkur, Umlaufszeit 0,25 Jahre 135.
Messen der Kräfte 86.
— der Zeit durch das Pendel 210.
— der Fallbeschleunigung durch das Pendel 133. 210.
Meter-Kilogramm (mkg) 94.
Meteorit gehört dem Sonnensystem an, oder nicht an 63.
Mittelbewegung (Resultante) 30.
Mittelkraft, gefunden durch das Polygon-, Parallelogramm-Gesetz 31.

Mittelkraft, gefunden durch Rechnung 31.
Mittelpunkt des Stosses oder d. Trägh. 350.
Mittlere Geschw. 14. 19. 22.
Mittlere Zeit 14.
Momentancentrum 151.
Moment, statisches 165.
Momentenachsen stehen senkrecht zur Ebene des Paares 176.
Mondbeschleunigung 140.
Mondgeschwindigkeit 62.
Motoren 94.

Natur ist Bewegung 1.
Naturwissenschaften 1.
Neptun, Umlaufszeit 164 Jahre 135.
Newton (1642—1726) 1.
Newton'sches Gravitationsgesetz (Kepler-Huygens) oder Gesetz der allgemeinen Schwere $P = k \frac{mM}{r^2}$ 136.
Niagara-Wasserfall, Leistung desselben 108.
Normalacceleration 58.
— im Warzenkreise 61.
Nothwendigkeit der Zerlegung 43.

Oberflächen 203.
Oel beruhigt das Meer 246.
Ovalwerk (Ellipsenzirkel) von Leonardo da Vinci 154.

$P = m\frac{v^2}{r} = mrw^2 = \frac{G}{g} r w^2 = 0{,}00112\,G r n^2$ 114. 117.
$P = \frac{75\,N}{v} = 71\,620\,\frac{1}{R}\,\frac{N}{n}$ 95. 96.
Pappus 201.
Parabelbewegung 46—50.
Parabelbewegung eines schräg austretenden Wasserstrahles 47.
Parabel bei der Bewegung des astatischen Regulators 125.
Paraboloidfläche 125.
Parallelepipedon 33. 172.
Parallelogrammgesetz 31. 34. 39. 65. 81.
— gilt für alle Bewegungsarten und Kräfte 35.
Pendel, Schwingungs- — 119. 131. 275.
—, Centrifugal- — 118. 120.
—, —. Umlaufszeit 120.
—, — als Regulator 122.
—, Reversions- — 276.
—, Ballistisches — 351.
—, zum Messen der Erdbeschleunigung 132. 144. 200.
—, zum Messen der Zeit 210.
Perpetuum mobile III. 1. 112.
Pferdekraft = 75 mkg in 1 Sek. 94.
— in verschiedenen Ländern 95.
Pferdekräfte N aus P und v zu bestimmen 95.
Phoronomie 13. 149.
Planeten-Bewegung 134.
Planetenradführung od. hypocycl. Geradführung 154.
Pochen der Erze 5.
„Pol" oder „augenblicklicher Drehpunkt" (Momentancentrum) 151.
Pochstempels, Theorie des — 325.
Polbahn 152.
Polster, Puffer 5.
Polygongesetz 31. 33. 34. 39. 65. 81.
— bezw. Parallelogramm-Gesetz, dessen Anwendung auf die verschiedenen Bewegungsarten 35.
— gilt für alle Bewegungsarten und Kräfte 35.
— geschlossenes 82.
Projektionen 31.
Projektion des Weges in der Richtung der Kraft 98. 102. 104.
— der Gesammtoberfläche einer Kugel ist Null 101.
Prony's Zaum od. Bremsdynamometer 323.
Pseudo-astatischer Regulator 126.
Pulverramme v. Amerikaner Shaw 90. 105.

Querschnittfläche von Trägern 193.

Rad an der Welle 222.
Räder, im Eingriff stehende — 69.
Ramme, Stoss bei der — 347.
Redtenbacher (1809—1863) 86.
Reaktion 6.
Regulator von Watt 122.
— von Porter 123.
— von Kley 126.
— von Proëll 127.
— von Buss 127.
Reibung äussert sich bei jeder Beweg. 285.
— hindert und fördert die Beweg. 286.
—, Gesetz der Wechselwirkung 285.
— wird vermindert durch Poliren und Schmieren 285.
— beim Riementrieb, an der Bremse, am Keil, Nagel, an der Schraube, am Meeresspiegel 286.
— Wichtige Bemerkungen über — 286. 287.
—, Gleitende —. $W = f \cdot Q$ 287.
— auf der schiefen Ebene 291.
— nützt beim „Hängen" 292.
— bei der flachgängigen Schraube 293.
— — scharfgängigen Schraube 295. 296.
— wälzende oder rollende 330.
Reibungs-Koëffizient 286. 288.
— bei der scharfgäng. Schraube 296.
— -Winkel φ. $\operatorname{tg}\varphi = f$ 289.
— -Kegel 290.
Resultante (Mittelbewegung) 30.
Resultat beliebiger Kräfte am Körper ist 1 Paar und 1 Einzelkraft 177.
Reuleaux 7. 149.

Reversionspendel 133.
Ricochettiren 54.
Riemen-Triebwerke 311.
Ritter A., „Rechnende Schnittmethode“ 1861 245.
Robervals Wage 214.
Röhrenleitung, am Seil aufgehängt 241.
Rollbewegung 150.
—, Arbeit bei der — 271.
Rollen, Bewegung einer ebenen Figur in einer Ebene ist auf ein — zurückzuführen 153.
Rollende Reibung 330.
Rollenzüge (Siehe Flaschenzüge).
Rolllinie, Cycloide 150.
Rotation, Drehung 149.
Rotirender Herd des Aufbereitungsmannes 66.

Satz von den drei Kräften. Anwendungen: Thür, Wetterfahne, Hüttenkran, Uferkran, Fallthür, Sparrenverbindung, Stangenverbindungen 216.
Schacht, dessen Tiefe durch den freien Fall der Körper zu bestimmen 29.
Schaufelstellung bei Wasserrädern und Turbinen 67.
Scheinbare Bewegung 64.
— — auf dem Flusse 66.
— — im Eisenbahnwagen 70.
— — im Wasserglase 70.
— — in dem Fahrstuhle 71.
— — im Luftschiffe 71.
— — im Fernrohre 67.
Scheingewichte sind die beobachteten Gewichte 142.
Schiebung 149.
Schiefe Ebene 43. 290.
Schiefen Ebene, Kraftverhältnisse auf der — 108.
Schmiedehammer, Stosserscheinungen am— 349.
Schmieden 5.
Schmiermittel, Wirkung der — 286.
Schnellzug, verheerende Wirkung beim Zusammenstoss 107.
Schraube, flachgängige 292.
—, scharfgängige 296.
—, ungebührl. Beanspruchung der — 297.
—, ohne Ende 298.
Schrauben-Bewegung 150.
— -Linie 150.
— -Spindel — Schraubenmutter 7.
Schubstange des Kurbelgetriebes, Bewegung der — 44. 156.
Schussweite der Kanonen 56.
Schwengel der Pumpe 221.
Schwerebene 184.
Schwerlinie 184.
Schwerpunkt liegt in d. „freien Achse“ 253.
— ist Angriffsp. der Mittelkr. der Centrifugalkräfte 255.
Schwerpunkt, Erhaltung der Beweg. des Schwerpunktes 91.
Schwerpunktsbestimmungen 184—201.
Schwerpunktes, Satz von der Erhaltung der Bewegung des — 91.
Schwingungen 27.
Schwingungsbewegungen im Kreise, in der Ellipse, in der Geraden 129.
Schwingungsdauer d. physisch. Pendels 275.
Schwingungspunkt d. physisch. Pendels 276.
Schwingungspendel 119. 131.
Schwingungszeit des Schwingungspendels $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 132.
Schwungkugel-Regulator 122. 284.
Schwungrad, Bestimmung des Gewichtes derselben 280. 283.
Schwungräder 270.
—, Zweck und Berechnung 277.
—, möglichst nahe der Maschine, von der die Unregelmässigkeiten ausgehen 278.
—, sind nothwendige Uebel, die Widerstände veranlassen 278.
— für Dampfm. mit Kurbelgetriebe. Berechnung 280.
Sechs mögliche Bewegungen 179.
Sehnen von den Endpunkten des lothrechten Durchmessers eines Kreises, einer Kugel ausgehend, werden in gleichen Zeiten durchfallen 44.
Seil- und Riemen-Triebwerke 311.
Seilpolygon 39. 245.
Seilpolygones, Knotenpunkte des — 246.
Seilreibung. $T = te^{fa}$ 305—310.
Seil-Steifigkeit 312.
Seitenbewegung (Komponente) 30.
Seitenbewegungen, nur gleichförmig und in derselben Ebene 36.
—, nur gleichförmig und im Raume 38.
—, nur ungleichförmig (beschl., verzög.) 41.
— sind ungleichartig (gleichförm. u. ungleichförmig) 45.
Sekunden-Pendel. $L = 0{,}994$ m 133.
—, Länge des — zu London = 1 Yard = 0,914 m 210.
Setzmaschinen, Geradführung bei — 155.
Sicherheitsventil-Hebel 225.
Sonnenbeschleunigung 139.
Sonnentag 14.
Spannkraft (potentielle Energie) 92.
Spannungen, Centrifugal- — im Innern gedrehter Körper 273.
Sparren 161. 230.
— -Verbindung 217.
Spec. Gewicht des Erdkörpers $s = 5{,}6$ 141.
Specifischer Druck 227.
Stabilitätsmoment 228.
Standfähigkeit um so grösser, je tiefer S und je höher M 209.
Stangenverbindungen 230.
—. Zwei Stangen im Scheitel belastet 230.

Stangenverbindungen. Zwei Stangen, eine unbelastet 234.
—. — —. Anwendung des Satzes von den 3 Kräften 234.
—. — —. Kranvorrichtung 235.
—. Drei Stangen, die mittlere belastet 236.
—. — —, die mittlere unbelastet 236.
—. Vier Stangen. *H* überall wie im Scheitel 237.
—. Beliebig viel Stangen 239.
—. Kette, Seil (Stangenzahl ∞) 241.
—. Labile, stabile Gleichgewichtslage 241. 242.
—. Bildl. Darst. der Kräfte an — 238.
Stanz- und Prägwerke 233.
Statik, ein besonderer Fall der Dynamik 8
—, Lehre von dem Gleichgewicht der Kräfte, oder von den gleichförmigen Beweg. (Gleichgewichtslehre) 7. 8.
Statischer Regulator. Stasie 124. 126.
Statisches Moment = Kraft × Hebelarm 110. 111.
Steifigkeit der Seile 312.
Steigzeit aufwärts geworfener Körper 24.
Steighöhe „ „ „ 24.
Steinbrecher 232.
Stellrad am Steuerruder 165.
Stellzeug am Regulator 123.
Sternentag 14.
Stirnhammer 222.
Stoff, Raum, Zeit 3. 4.
Stoss 5. 334.
Stoss-Wirkung, Schilderung derselben 335.
—, elastischer wird in unelastischen verwandelt 335. 339.
Stoss, unelastischer, gerader, centraler — 337.
—, elastischer, gerader, centraler — 339.
—, unvollkommen elastischer — 342.
—, schiefer — 343.
—, excentrischer — 343.
— -Verlust an leb. Kraft (Arbeit) beim unelastischen — 344.
— -Verlust nützlich bei Formveränderungen 346.
— -Rest nützlich bei Bewegungsveränderungen 346.
— -Erscheinungen beim Dampfhammer 346.
— — bei der Ramme 347.
— — bei der bergm. Bohrarbeit 348.
— — am Schmiedehammer 349.
— — am ballist. Pendel 351.

Technik, die — verlangt meist „freie Drehachsen“ 253.
— trachtet die 6 möglichen Bewegungen einzuschränken 175.
Techniker muss die Umdrehungsgeschwindigkeiten genau beschränken 273.
— muss das Schwungrad auf der rechten Stelle der Welle anbringen 278.
Terni, grösster Hammer der Welt im Stahlwerk zu — 347.
Tonnlägiger Schacht 84.
Totlage beim Kurbelgetriebe 281.
Trabanten der Erde zu erzeugen 61.
Trägheit, Mittelpunkt der — 350.
Trägheits-Moment $J = \Sigma (mr^2)$ 250. 256. 276.
— -Moment auch für die Biegungsfestigkeit 256.
— -Arm 257.
— -Halbmesser 257.
— -Momenten, Besondere Werthe von —
$J = Me^2 + J_s$ 259.
$J_z = J_y + J_x$ 259.
$J = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{\varepsilon}$ 279.
Trägheitsmomente 157.
Translation, Schiebung 149.
Triebwerke, Seil- und Riemen — 311.
Trigonometrische Tangente des Reibungswinkels = *f* 289.
— — des Winkels zw. Zeit- und Weglinie = *c* 15.
Turbinen 6. 67. 274.

Ueberhöhung der äusseren Eisenbahnschiene 127.
Uferkran 216.
Umdrehungsgeschw., zulässige — gedrehter Schmiedeeisenstangen 274.
— grösste bis jetzt erreichte $v = 175$ m bei der De Laval-Turbine 274.
— zulässige — für Mühlteine 275.
Umfangsgeschwindigkeit 58.
— am Aequator 117.
—, zulässig bei Rädern 274.
Umlaufsgesetz der Planeten 136.
Umlaufszeit 59.
— des Centrifugalpendels hängt von *H* ab 121.
Umlaufszeit *t* des Centrifugalpendels 120.
— bei Centralbewegungen $t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{q}}$ 59.
Umlaufszeiten der Planeten 135.
Umwandelung, nicht Vernichtung bewirkt die Natur 119.
Unterstützung der Körper in einem Punkte (in 1. Drehachse) 206.
— — in zwei Punkten 215.
— — in drei Punkten 225.
— — in mehr als drei Punkten (Flächendruck, Stabilitätsmoment, Dynam. Stabilität) 227.
Ur- und Natureigenschaft der Körper 87.

Vektoren 150.
Ventil 347.
Vergleich zwischen den Bewegungen der Uhrzeigersp. und der Himmelsk. 18.

Vergleich zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung 20.
— zwischen den Bewegungen eines Regentropfens und Lichtstrahles 67.
— zwischen den Bewegungen von Boten u. Ausführungen von technischen Arbeiten (Schächten, Stollen etc.) 16.
— zwischen Bew.-Vorg. an einer bergm. Förderm. und der Atwood'schen Fallm. des Physikers 88.
— zwischen einer in Drehung versetzten Tasse und der Centrifugalpumpe 115.
— zwischen den Kleidern einer Balletänzerin und den Kugeln des Watt'schen Schwungkugelregulators 116.
— zwischen Schwungrad und Centrifugalregulator 284.
— zwischen dem Kräftepaare des Theoretikers (Poinsot 1777—1859) und Praktikers 164.
— zwischen dem Satz von den mechanischen Arbeiten und dem Satze von den statischen Momenten auf Grund der Bewegungsvorgänge an einem Berghaspel 110.
— zwischen Ellipse, Kreis, Geraden, Hypocycloïden 153. 154.
— zwischen dem „bebenden", „speienden" Erdballe und einem in Folge innerer Kräfte sich „krümmenden, windenden, zerplatzenden Riesen" 158.
— zwischen Pendel und Balkenwage 210.
— zwischen Stangenverbindungen und Gelenkketten 244.
— zwischen einem beliebigen gedrehten Körper und einem Tänzer 251.
— zwischen Massen in Bezug auf ihr Trägheitsmoment 257.
— zwischen Wurfbeweg., Bew. des Centrifugal- und Schwingungspend. 120.
— zwischen Wurf und Centralbew. 56. 57.
— zwischen Sammelteichen und Schwungrädern 278.
— zwischen Ambos und Ventil 347.
— zwischen Centrifugal- und Schwingungspendel 133.
— zwischen Zinsrechnung und gleichf. beschleunigter Beweg. 22.
Verwandelung des Fallbestrebens mg durch Fadenspannung in Centripetalkraft mrw^2 (Centrifugalpendel) 119.
Verwandtschaft zwischen Wurfbewegung, Bewegung des Centrifugal- u. Schwingungspendels 120.
Virtuelle Arbeit 102.
— Geschwindigkeit 102.

$$Ww = \frac{mv^2}{2} = Ps \quad 96.$$

Wälzende Reibung 330.
Wage, gewöhnl., zweiarm. Balken- —. 211.
Wage, Haupterforderniss derselben 211.
Wage, Empfindlichkeit ders. $\operatorname{tg} a = q \frac{L}{G \cdot l}$ 211. 212.
— Schwingungsdauer wächst mit der Empfindlichkeit 212.
— Kurzarmige Bunge'sche — 212.
— Gewichtsbestg. = Winkelmessg. 212.
—, Schnell- — (oder römische —), $Q = \left(\frac{P}{r}\right) x$, Gew.-B.=Längenm. 213.
—, dänische — 214.
—, von Roberval 214.
—, Brücken- — 223.
Wagenrad zur Darstellung der 6 möglichen Bewegungen: 3 Schiebungen und 3 Drehungen 175. 179.
Wasserhaltungsmaschinen 223.
Wasserstrahl beim Eintritt in das Wasserrad 40.
Watt (1736—1819) 94. 122.
Wechselwirkung 6. 285. 334.
Weg 13.
— -Linie 15.
Wellenlehre 30.
Wellenlinie 27.
Werk, Wirkung 92.
Widerstandskoëfficient $k = \frac{P}{Q}$ 316.
Wie und wo? 35. 46.
William Siemens 108.
Windevorrichtung (bergm. Fördereinrichtung) 168. 173.
Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{Pl}{J} = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{J}$ 256. 277.
Winkelgeschwindigkeit 58. 142. 254. 269. 272.
Wirkung, Werk 92.
Wirkungsgrösse 94.
Wurfbewegung 30. 45. 51.
— wie sie meist behandelt wird, ist kein natürlicher Vorgang 56.
Wurfhöhe (h) 52.
Wurfweite (l) 53.

Yard als Pendellänge 210.

Zapfen — Zapfenlager 7.
— -Druck 165. 174.
— -Reibung 314. 329.
Zeitlinie 15.
Zinsrechnung, Grundgleichung der — 22.
Zucker-Centrifuge 115.
Zugramme 91.
Zunahme an leb. Kraft = verrichteter mech. Arbeit 92.
Zusammenhang zwischen mech. Arb. und stat. Moment 110.
Zusammensetzung, Zweck der — 30. 34.
Zuwachs des Weges = Geschwindigkeit 20.
— der Geschwindigk. = Beschleunig. 20.
Zwanglauflehre 149.

Lehrbuch der Kinematik.

Für Studierende der Maschinentechnik, Mathematik und Physik

geometrisch dargestellt

von

Dr. **L. Burmester,**

Professor an der königl. sächs. technischen Hochschule zu Dresden.

Erster Band: **Die ebene Bewegung.**

Mit einem Atlas von 57 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. 1888. XX, 941 Seiten. Brosch. Preis 57 Mark.

Technische Thermodynamik

von

Dr. **Gustav Zeuner,**

kgl. sächs. Geheimer Rath und Professor an der königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Dritte vollständig neu bearbeitete Auflage der

„Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie".

In zwei Bänden.

Erster Band.

Fundamentalsätze der Thermodynamik. Lehre von den Gasen.

Mit 73 in den Text gedruckten Holzschnitten.

In gr. 8. 1887. XII, 454 Seiten. Preis 13 Mark.

Zweiter Band.

Die Lehre von den Dämpfen.

Mit 48 in den Text gedruckten Holzschnitten.

In gr. 8. 1890. VIII, 474 Seiten und XXIX Seiten Tabellen. Brosch. Preis 14 Mark.

Beide Theile in einen Band gebunden 29 Mark 50 Pf.

Die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine

für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure,
Finanzbeamte, Versicherungsgesellschaften und Zahlenrechner überhaupt

von

F. Reuleaux, Professor.

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

Mit einer lithographirten Tafel.

In gr. 8. 1892. VII, 60 Seiten. Brosch. Preis 2 Mark.

Das Gesetz
der
Proportionalen Widerstände und seine Anwendungen.
Nebst Versuchen
über das Verhalten verschiedener Materialien bei gleichen Formänderungen
sowohl unter der Presse als dem Schlagwerk.

Von

Friedrich Kick,
k. k. Regierungsrath und ordentlichem öffentlichem Professor der mechanischen Technologie
an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

Mit 3 lithographirten Tafeln und 44 Holzschnitten.

In gr. 8. 1885. X, 118 Seiten. Brosch. Preis 6 Mark.

Die Lehre von der Energie
historisch-kritisch entwickelt.
Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik

von

Dr Georg Helm,
Oberlehrer an der Annenschule zu Dresden.

In gr. 8. 1887. VI, 104 Seiten. Brosch. Preis 3 Mark.

Versuch einer graphischen Dynamik.

Von

Dr. R. Proell,
Ingenieur der Niederschlesischen Maschinenbau-Gesellschaft in Görlitz.

Mit einem Atlas von 10 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. 1874. XII, 212 Seiten. Brosch. Preis 8 Mark.

Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung
von
Trägheits- und Centrifugalmomenten
ebener Massenfiguren

von

Robert Land,
Ingenieur in Dresden.

Separat-Abdruck aus dem **„Civilingenieur“**, Band XXXIV, Heft 2.

In gr. 8. 1888. 66 Seiten. Brosch. Preis 1 Mark 80 Pf.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.

Albert Bose
Buchbinderei
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoppe, Oskar,

Elementares Lehrbuch der technischen Mechanik für Studirende und zum Selbstunterricht

Bd.: 1

1894

Math.a. 114 td-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650283-5